SOLUTION DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

I) Série N°1

EX04

Soit les fonctions vectorielles de la variable réelle $t$suivantes :

$$\vec{r}_1(t) = (3t^2)\vec{\imath} - (2t^2)\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos(\omega t)\,\vec{\imath} - \sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

Où αet ωsont des constantes réelles positives. Calculer :

1. Leurs dérivées première et seconde par rapport àt ainsi que leurs modules.
2. L'intégrale$\int \vec{r}_1(t)dt$ sachant que pour $t = 0$, on a $\vec{r}_{10} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

SOLUTION

1) Calcul des dérivées premières et secondes des 2 vecteurs e leurs modules.

$$\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = (6t)\vec{i} - (4t)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\right\| = \sqrt{(6t)^2 + (-4t)^2 + (1)^2} = \sqrt{52t^2 + 1}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\left\|\frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2}\right\| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$$

$$\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} = -\omega\sin(\omega t)\vec{i} - \omega\cos(\omega t) - \alpha e^{-\alpha t}\vec{k}$$

$$\left\|\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}\right\| = \sqrt{(-\omega\sin(\omega t))^2 + (-\omega\cos(\omega t))^2 + (-\alpha e^{-\alpha t})^2} = \sqrt{\omega^2 + \alpha^2 e^{-2\alpha t}}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_2(t)}{dt^2} = -\omega^2\cos(\omega t)\vec{i} + \omega^2\sin(\omega t)\vec{j} + \alpha^2 e^{-\alpha t}\vec{k}$$

$$\left\| \frac{d^2\overrightarrow{r_2}(t)}{dt^2} \right\| = \sqrt{\omega^4 + \alpha^4 e^{-4\alpha t}}$$

2)

$$\int \vec{r_1}(t)\,dt = \int \left[\left(3t^2\right)\vec{i} - \left(2t^2\right)\vec{j} + (t+1)\vec{k} \right] dt = (t^3+1)\vec{i} - (\frac{2}{3}t^3 - 1)\vec{j} + \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right)\vec{k}$$

$$\int \vec{r_1}(t)\,dt = \int \left[\left(3t^2\right)\vec{i} - \left(2t^2\right)\vec{j} + (t+1)\vec{k} \right] dt = t^3\vec{i} - \frac{2}{3}t^3\vec{j} + \left(\frac{t^2}{2} + t \right)\vec{k} + \vec{C}$$

Sachant qu'à t=0

$$\int \vec{r_1}(0)\,dt = \int \left[\left(3(0)^2\right)\vec{i} - \left(2(0)^2\right)\vec{j} + (0+1)\vec{k} \right] dt = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k} + \vec{C} = \overrightarrow{r_{10}} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Donc

$$\vec{C} = \overrightarrow{r_{10}} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

D'où

$$\int \vec{r_1}(t)\,dt = \int \left[\left(3t^2\right)\vec{i} - \left(2t^2\right)\vec{j} + (t+1)\vec{k} \right] dt = (t^3+1)\vec{i} - (\frac{2}{3}t^3 - 1)\vec{j} + \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right)\vec{k}$$

EX05

On considère dans le plan Oxy d'un repère orthonormé $Oxyz$, deux vecteurs unitaire perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine O. Leurs sens est tel que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre direct. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tournent autour de Oz. On pose $(Ox, \vec{u}) = \theta$.

1- Donner les composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$;
2- Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base orthonormée ;
3- Donner les composantes des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$;
4- Calculer $(d\vec{u}/d\theta)$ et $(d\vec{v}/d\theta)$;
5- Si $\theta = \theta(t)$, Calculer $(d\vec{u}/dt)$ et $(d\vec{v}/dt)$;
6- Soit le vecteur $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}$:
  a- calculer $(d\vec{r}/dt)$ et $(d^2\vec{r}/dt^2)$;
  b- Si $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, exprimer x et y en fonction de ρ et θ et inversement.

Solution

1- $\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{v} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}$

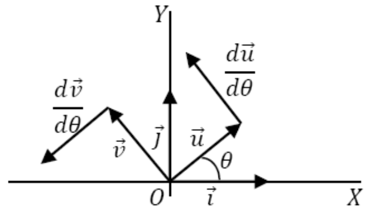
2- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

3- $\begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{v} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{v} \end{cases}$

4- $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} = \vec{v}$; $\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$

Ainsi la dérivée par rapport à θ d'un vecteur unitaire tournant est le vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire.

5- Dérivées par rapport au temps :



$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{v} = \dot{\theta}\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u} = -\dot{\theta}\vec{u}$$

6- Si $\vec{r} = \rho\vec{u}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u} + \rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u} + \rho\dot{\theta}\vec{v}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \ddot{\rho}\vec{u} + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{v} + \rho\ddot{\theta}\vec{v} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{u} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{v} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{v} + \rho\ddot{\theta}\vec{v} + \rho\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\vec{u}\right)$$

$$= \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{v}$$

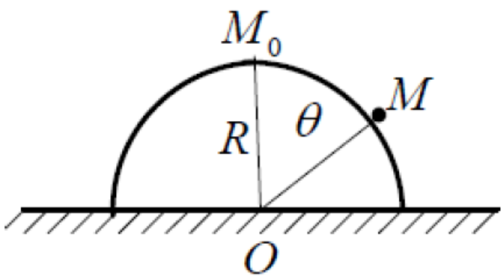
$7 -\ \vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u} = \rho\left(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}\right) = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

III) Série N°1

Exercice 2

Une demi-sphère de rayon $R = 2m$ et de centre O repose sur un plan horizontal. Une particule de masse m , partant du repos du point M_0 situé en haut de la demi sphère, glisse sous l'action de son poids.



1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la particule au cours de son glissement, sachant que le coefficient de frottement cinématique sur la surface de la sphère est μ_C.

2- En négligeant les frottements :

a- démontrer que la vitesse acquise au point M défini par l'angle $\theta = \widehat{MOM_0}$ est donnée par l'expression $v = 2Rg(1 - \cos(\theta))$,

b- en déduire alors l'angle θ_0 sous lequel la particule quitte la surface de la sphère.

c- calculer la vitesse v_0 correspondante.

Au moment où la particule quitte le point M avec la vitesse v_0:

- Trouver la vitesse v instantanée en fonction de θ_0, v_0, g et le temps t.
- les modules des forces tangentielles et normales.

Solution :

La particule est soumise à trois forces, son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{N}$ de la surface de la sphère sur la particule et la force de frottement $\vec{f}$. A partir de la figure (a) ci-dessous, et en appliquant a relation fondamentale de la dynamique nous pouvons écrire :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$$

Projetons les forces sur les deux axes MT et MN :

$$P_T - f = ma_T = m\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow mg\sin\theta - f = m\frac{dv}{dt} \rightarrow (1)$$

$$-N + P_N = ma_N = m\frac{v^2}{R} \Leftrightarrow -N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} \rightarrow (2)$$

L'expression de la force de frottement cinétique est :

$$\left.\begin{array}{l} f = \propto N \\ N = mg\cos\theta - m\dfrac{v^2}{R} \end{array}\right| \Rightarrow f = \propto\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right)$$

Remplaçons dans l'équation (1) pour obtenir l'équation différentielle du mouvement :

$$mg\sin\theta - \propto\left(mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R}\right) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} - \frac{\propto}{R}v^2 = g\left(\sin\theta - \propto\cos\theta\right)}$$

2/ **Mouvement sans frottement** :

a/ Revenons à l'équation (1) en supprimant f et en simplifiant par la masse :

$$\frac{dv}{dt} - g\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g\sin\theta$$

On multiplie les deux membres par $d\theta$, sachant que $\dfrac{d\theta}{dt}=\omega=\dfrac{v}{R}$:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\theta}{dt}dv=g\sin\theta.d\theta\\ \dfrac{d\theta}{dt}=\omega=\dfrac{v}{R}\end{array}\right| \Rightarrow vdv=gR\sin\theta.d\theta\rightarrow(3)$$

Intégrons les deux membres de l'équation(3) sachant que le domaine de variation de θ est $[0,\theta]$, celui de v est $[0,v]$:

$$\int_0^v vdv=gR\int_0^\theta \sin\theta.d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}v^2-0=-Rg(\cos\theta-\cos 0)$$

On obtient finalement :

$$v^2=2Rg(1-\cos\theta)\Rightarrow \boxed{v=\sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}}\rightarrow(4)$$

b/ Recherche de la valeur angulaire θ_0 pour laquelle la particule quitte la surface de la sphère : cela se produit lorsque la force de réaction $\vec{N}$ s'annule.

Revenons à l'équation (2) et calculons N :

$$-N+mg\cos\theta=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow N=mg\cos\theta-m\frac{v^2}{R}$$

On remplace v^2 par sa valeur pour aboutir à :

$$N=mg\cos\theta-m\frac{2Rg(1-\cos\theta)}{R}\Rightarrow \boxed{N=mg(3\cos\theta-2)}$$

D'où l'angle recherché est :

$$mg(3\cos\theta_0-2)=0\Rightarrow \cos\theta_0=2/3\Rightarrow \boxed{\theta_0=48^\circ}$$

Discussion : D'après l'expression obtenue, l'angle θ_0 ne dépend ni de la masse de la particule, ni du rayon de la sphère, ni de l'accélération de pesanteur, *avec pour condition* $v(0)$ *nulle*.

N.B : Si $v_0\neq v(0)$ v_0 étant la vitesse avec laquelle la particule quitte la surface de la sphère.

$v(0)$: La vitesse absolue.

Dans le cas où la vitesse initiale n'est pas nulle, on peut démontrer que :

$$\boxed{\cos\theta_0=\frac{2}{3}+\frac{v(0)^2}{3Rg}}$$

Dans ce cas l'angle θ_0 dépend de $v(0)$, R et g mais reste indépendant de m .

c/ Calcul de la vitesse correspondante :

$$\left.\begin{array}{l}v_0^2=2Rg(1-\cos\theta_0)\\ \cos\theta_0=2/3\end{array}\right| \Rightarrow v_0=\sqrt{2Rg(1-2/3)}\ ,\ \boxed{v_0=3,65ms^{-1}}$$

3/ Etude du mouvement lorsque la particule quitte la surface de la sphère.

Nous sommes en présence du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre.

a/ On étudie le mouvement dans le repère MXY (figure(b)).

Suivant l'axe des X : le mouvement est rectiligne uniforme :

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow v_x = v_0.\cos\theta_0 \rightarrow (5)$$

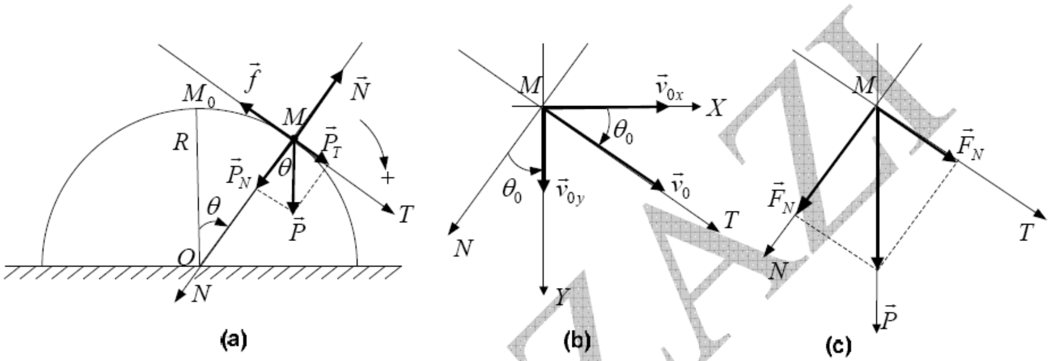
Suivant l'axe des Y : le mouvement est rectiligne uniformément varié :

$$\sum \vec{F}_y = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow a_y = g = Cte$$

$$v_y = gt + v_0 \sin\theta_0 \rightarrow (6)$$

Passons à l'expression de la vitesse instantanée du projectile :

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v_0^2 = 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{g^2t^2 + 2gv_0 \sin\theta_0.t + 2Rg\left(1-\cos\theta_0\right)}}$$



L'expression du vecteur vitesse est donc : $\boxed{\vec{v} = v_0.\cos\theta_0.\vec{i} + \left(gt + v_0 \sin\theta_0\right)\vec{j}}$

b/ Intensités des forces normale et tangentielle : figure (c).

Force tangentielle:

$$F_T = m.a_T = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{F_T = \frac{mg\left(gt + v_0\sin\theta_0\right)}{\sqrt{g^2t^2 + 2gv_0\sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$

Force normale : Il n'est pas conseillé d'appliquer la formule $F_N = m\dfrac{v^2}{r}$ car le rayon de courbure est inconnu, à ne pas confondre avec le rayon R de la sphère !!

Cette force est calculée à partir de la relation : $\vec{P} = \vec{F}_N + \vec{F}_T \Rightarrow \boxed{F_N = \sqrt{P^2 - F_T^2}}$

D'où :

$$\boxed{F_N = mg\sqrt{1 - \frac{g^2t^2 + 2gv_0\sin\theta_0.t + v_0^2\sin^2\theta_0}{g^2t^2 + 2gv_0\sin\theta_0.t + v_0^2}}}$$