Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Année universitaire 2021-2022

***Corrigé de l'examen de MATHS 1***

**Exercice n° 1.** ***(08 pts.)***

1. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}}_{P(n)}.$$

Pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} \text{ et } 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{1+2}{2^1}.$$

Autrement dit, $P(1)$ est vraie.
Soit $n \geq 1$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2(n+2)}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 + \frac{-2n-4+n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(n)$ est vraie.

2. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k.$$

   (a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

i. Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$x + x = 2x,$$

par conséquent

$$\exists k = x \in \mathbb{Z} : x + x = 2k,$$

d'où $x\mathcal{R}x$ et donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

ii. Symétrie : Soient $x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y$. On a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y + x = 2k \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

iii. Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z} :\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Montrons que $x\mathcal{R}z$.

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k\ldots\ldots (1)$$

$$y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} : y + z = 2k'\ldots\ldots. (2)$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : x + z = 2(k + k' - y) \\ &\Rightarrow \exists k'' = (k + k' - y) \in \mathbb{Z} : x + z = 2k'' \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

**Conclusion :** De i), ii) et iii), $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

(b) Déterminons la classe d'équivalence de $0$.

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{x \in \mathbb{Z} /\ x\mathcal{R}0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} /\ \exists k \in \mathbb{Z} : x + 0 = 2k\} \\ &= \{2k /\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Exercice n° 2.** ***(07 pts.)***

Considérons l'application $f$ définie par :

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{R} - \{3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{4x + 1}{x - 3}. \end{aligned}$$

1. Montrons que $f$ est injective : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{3\} : f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{4x_1 + 1}{x_1 - 3} = \frac{4x_2 + 1}{x_2 - 3} \\ &\Longrightarrow (4x_1 + 1)(x_2 - 3) = (4x_2 + 1)(x_1 - 3) \\ &\Longrightarrow 4x_1x_2 - 12x_1 + x_2 - 3 = 4x_2x_1 - 12x_2 + x_1 - 3 \\ &\Longrightarrow 13(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Donc $f$ est injective.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminons $f^{-1}(\{a\})$.

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\{a\}) & = & \{x \in \mathbb{R}-\{3\}/\ f(x) \in \{a\}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}-\{3\}/\ f(x) = a\} \\ & = & \left\{x \in \mathbb{R}-\{3\}/\ \dfrac{4x+1}{x-3} = a\right\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}-\{3\}/\ 4x+1 = ax-3a\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}-\{3\}/\ (a-4)x = 3a+1\} \\ & = & \left\{x \in \mathbb{R}-\{3\}/\ x = \dfrac{3a+1}{a-4},\ a \neq 4\right\}. \end{array}$$

On a $3a+1 \neq 3(a-4)$, donc $x = \dfrac{3a+1}{a-4} \neq 3$. Finalement,

$$f^{-1}(\{a\}) = \left\{\frac{3a+1}{a-4},\ a \neq 4\right\}.$$

Surjectivité de $f$ : L'application $f$ n'est pas surjective car $y = 4$ n'a pas d'antécédent (d'après ce qui précède ).

3. $D =?$ tel que

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}-\{3\} & \longrightarrow & D \\ & x & \longmapsto & h(x) = f(x) \end{array}$$

soit bijective. D'après la question précédente, $h$ est injective car $f$ l'est et $f$ est surjective pour $D = \mathbb{R}-\{4\}$. D'où, $h$ est bijective pour $D = \mathbb{R}-\{4\}$.
**Détermination de $h^{-1}$** :

$$\begin{array}{rccl} h^{-1}: & \mathbb{R}-\{4\} & \longrightarrow & \mathbb{R}-\{3\} \\ & x & \longmapsto & h^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-4}. \end{array}$$

**Exercice n° 3.** ***(05 pts.)***
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $g : [-9, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+9} + \alpha \ \text{ si } \ -9 \leq x \leq 0, \\ \\ \beta x + 2 \ \text{ si } \ x > 0. \end{cases}$$

1. Continuité de $g$ sur $[-9, +\infty[$:
a) $g$ est continue sur $[-9, 0[ \cup ]0, +\infty[$ car la fonction $x \longmapsto -\sqrt{x+9} + \alpha$ est continue sur $[-9, +\infty[$, donc en particulier sur $[-9, 0[$ et la fonction $x \longmapsto \beta x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]0, +\infty[$ . Donc $g$ est continue sur $[-9, 0[ \cup ]0, +\infty[, \forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.
b) continuité de $g$ en $0$ :
Pour que $g$ soit continue en $0$, il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = g(0).$$

On a $g(0) = -\sqrt{0+9} + \alpha = -3 + \alpha$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (\beta x + 2) = 2$$

et

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (-\sqrt{x+9} + \alpha) = -3 + \alpha.$$

Donc $g$ est continue en $0$ si et seulement si

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = g(0),$$

c'est à dire, si et seulement si $\alpha = 5$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Conclusion : $g$ est continue sur $[-9, +\infty[$ si et seulement si $\alpha = 5$ et $\beta$ est quelconque dans $\mathbb{R}$.

2. Dérivabilité de $g$ sur $]-9, +\infty[$:

$g$ est dérivable sur $]-9, 0[\cup]0, +\infty[$ car la fonction $x \longmapsto -\sqrt{x+9} + \alpha$ est dérivable sur $]-9, +\infty[$, donc en particulier sur $]-9, 0[$ et la fonction $x \longmapsto \beta x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]0, +\infty[$ . Donc $g$ est dérivable sur $]-9, 0[\cup]0, +\infty[, \forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

b) Dérivabilité de $g$ en $0$ : On impose la condition $\alpha = 5$ car si non $g$ n'est pas continue en $0$, donc $g$ n'est pas dérivable en $0$.

On a $g(0) = -\sqrt{0+9} + 5 = -3 + 5 = 2$.

$$\begin{aligned} g'_d(0) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\beta x + 2 - 2}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\beta x}{x} \\ &= \beta. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g'_g(0) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-\sqrt{x+9} + 5 - 2}{x - 0} \\ &= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x+9}}}{1} \\ &= \frac{-1}{6}. \end{aligned}$$

Donc $g$ est dérivable en $0$ si et seulement si

$$g'_d(0) = g'_g(0),$$

c'est à dire, si et seulement si

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \text{et} \\ \beta = \dfrac{-1}{6}. \end{cases}$$

Conclusion : $g$ est dérivable sur $]-9, +\infty[$ si et seulement si $\alpha = 5$ et $\beta = \dfrac{-1}{6}$.