Université A/MIRA de Bejaia
Faculté Technologie
Département Génie électrique (L2)

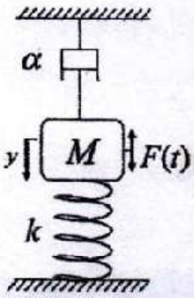
Année Universitaire 2021/2022 (Covid-19)
Semestre : 03
Matière : Physique 3

SERIE DE TD N° 03

EXERCICE 01

Une masse m suspendue par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement α, oscille verticalement sous l'effet d'une excitation F de la forme

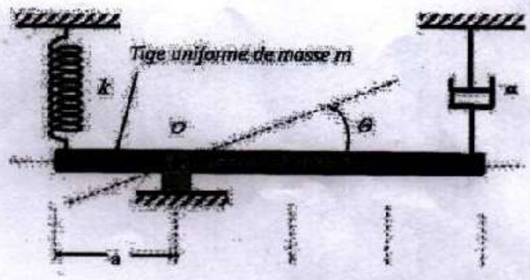
$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U, et la fonction de dissipation D.
2. Déduire le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3. Trouver à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (Préciser son amplitude A et sa phase φ).
4. Déterminer la condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R.
5. Déterminer la bande passante B pour un amortissement faible : $\lambda << \omega_0$.

EXERCICE 02

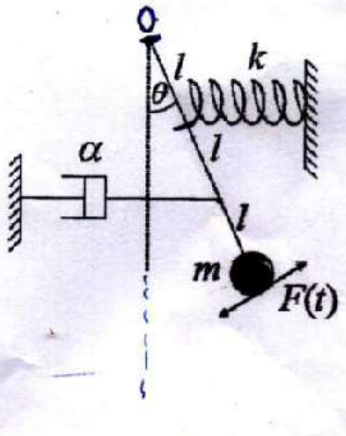
Une tige rigide et homogène de masse M =10 kg et de longueur L = 4a (a =0.25m) peut pivoter librement dans le plan vertical autour d'un axe passant par O. Ecartée de sa position d'équilibre (θ=0), la tige se met à osciller (Fig. ci-contre).



1. Trouver l'énergie cinétique du système.
2. Trouver l'énergie potentielle.
3. Trouver la fonction de dissipation D
4. Etablir l'équation de mouvement.
5. On suppose qu'au bout do 4 périodes, l'amplitude initiale de vibration est divisée par dix. Si la période d'oscillations amortis est égale à 0,6 s, calculer la valeur du coefficient de frottement α.
6. De ce qui précède déduire ω_0 ensuite calculer la constante de raideur k du ressort.

EXERCICE SUPPLEMENTAIRE

Dans le système ci-contre, la boule est ponctuelle et la tige est de longueur total 3l et de masse négligeable, avec $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.



1. Trouver l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle U et la fonction de dissipation D. ($\theta \ll 1$).
2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.
3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente de l'équation du mouvement. (Préciser son amplitude A et sa phase φ).
4. Déduire la pulsation de résonance Ω_R.
5. Donner les pulsations de coupure Ω_{c1}, Ω_{c2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\lambda \ll \omega_0$.
6- Calculer Ω_R, B et le facteur de qualité si m=1 Kg, k=15 N/m, l=0.5 m, α=0.5 N.s/m, g=10 m.s-2.

Série N° 3

Exo 1 :

I 1 - $T = \frac{1}{2} m v^2$; m est en translation suivant (Oy)

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2}$$

2 - $U = U_m + U_k = -mgh + \frac{1}{2} k (y + y_0)^2 + C_{te}$ (1)

Il faut simplifier l'expression de U et trouver y_0

à l'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = -mg + k(y + y_0)\Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow -mg + ky_0 = 0 \quad (2)$$

je remplace (2) dans (1)

$$U = -mgy + \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} k y_0^2 + k y y_0 + c_{te}$$

$$= y(\underbrace{-mg + ky_0}_{=0}) + \frac{1}{2} k y^2 + \overset{(+)}{C_{te}}$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} k y^2 + C_{te}}$$

3 - $\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{y}^2}$

II - $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2 + C^{te}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} = F_0 \cos \Omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -ky \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} = \alpha \dot{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{y} + \underbrace{\left(\frac{\alpha}{m}\right)}_{2\lambda}\dot{y} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{\omega_0^2} y = \underbrace{\left(\frac{F_0}{m}\right)}_{A_0} \cos \Omega t \quad (*)$$

éq^{t} diff. d'ordre II avec second membre (EASM) qui admet une solution générale : $y_g = y_h + y_p$

solution du ESSM peut prendre la forme soit $y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

ou ; $y = e^{-\lambda t}(A + Bt)$

ou ; $y = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

C'est la solution du régime transitoire qui va disparaitre avec le t : $t \to \infty$, $y_h \to 0$

Cette solution particulière, du régime permanent prend la forme de l'excitation

$y_p = A\cos(\Omega t + \phi)$

A : amplitude

ϕ : déphasage

$(*) \Rightarrow \ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \cos\Omega t$ —— $(**)$

avec: $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $A_0 = \frac{F_0}{m}$

III -

$y = A\cos(\Omega t + \phi) \Rightarrow \underline{y} = A e^{j(\Omega t + \phi)}$

$\underline{y} = \underbrace{A e^{j\phi}}_{\underline{A}} e^{j\Omega t}$

$\underline{A}\, e^{j\Omega t}$

$|\underline{A}| = A$

$Arg(\underline{A}) = \phi$

$\Rightarrow$ Il suffit de trouver $\underline{A}$ pour trouver l'amplitude et la phase

$\underline{y} = \underline{A} e^{j\Omega t}$

$\dot{\underline{y}} = \underline{A} j\Omega e^{j\Omega t}$

$\ddot{\underline{y}} = -\underline{A}\Omega^2 e^{j\Omega t}$

et ; $A_0 \cos\Omega t = A_0 e^{j\Omega t}$

je remplace ds $(**)$

$-\underline{A}\Omega^2 \cancel{e^{j\Omega t}} + 2\lambda \underline{A} j\Omega \cancel{e^{j\Omega t}} + \omega_0^2 \underline{A} \cancel{e^{j\Omega t}} = A_0 \cancel{e^{j\Omega t}}$

$\Rightarrow \underline{A}\left(-\Omega^2 + j2\lambda\Omega + \omega_0^2\right) = A_0$

$\Rightarrow \underline{A} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\lambda\Omega}$

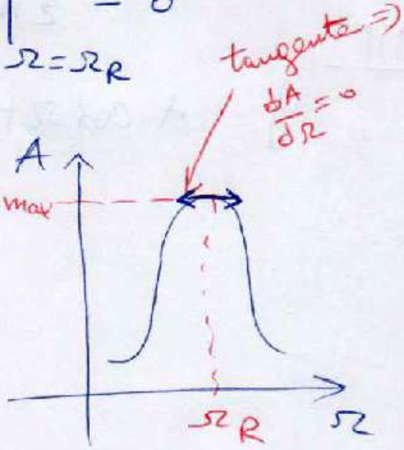
On remplace par les expressions de ω_0^2 et λ

$\Rightarrow |\underline{A}| = \boxed{A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}}$; $\boxed{tg\,\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$

IV – $\Omega_R = ?$

C'est la fréquence pour laquelle l'amplitude A est maximale $\Rightarrow \left.\dfrac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$

$$A = \frac{\overbrace{A_0}^{X}}{\underbrace{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}_{Y}}$$



$$\frac{dA}{d\Omega} = \frac{X'.Y - Y'.X}{Y^2}$$

Le numérateur $X = A_0 \Rightarrow X' = 0$

Le dénominateur $Y = \left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\Omega^2\lambda^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow Y' = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}\left(2(-2\Omega)(\omega_0^2-\Omega^2)^{2-1} + \cancel{8}^{\,4}\lambda^2\Omega\right)}{\left[\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\Omega^2\lambda^2}\right]^{2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = \frac{-\left(-2\Omega_R(\omega_0^2-\Omega_R^2)+4\lambda^2\Omega_R\right)}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\Omega^2\lambda^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\,\cancel{\Omega_R}(\omega_0^2-\Omega_R^2) - \cancel{4}\,\lambda^2\cancel{\Omega_R} = 0$$

$$\omega_0^2 - \Omega_R^2 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\Omega_R = (\omega_0^2-2\lambda^2)^{1/2}}$$

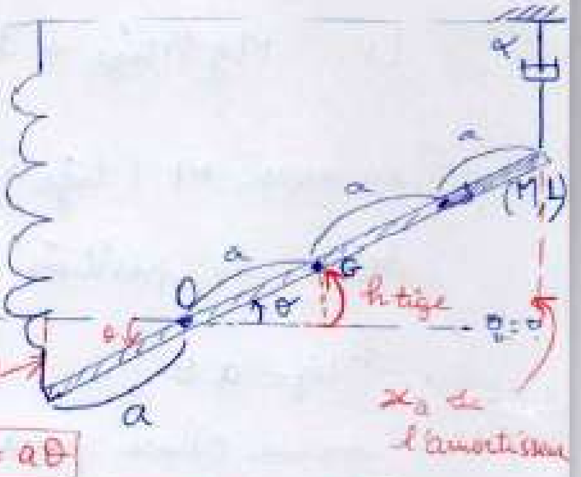
V - $B = ?$

pour $\lambda \ll \omega_0$

$$B = 2\lambda = 2 \cdot \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\alpha}{m}}$$

Série 3

Exo2 :



→ tige (M, L)

avec $\boxed{L = 4a}$

$I_{G\,tige} = \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{12} M (4a)^2$; $(X + \Delta\ell)$

avec $\boxed{x = a\theta}$

I - $T = T_M$; M fait une rotation autour de (O) ; la tige fait une rotation à une distance "a" de son centre de gravité G, Alors on applique le théorème de « Huggens - Steiner »

$\boxed{I_{/O} = I_{/G} + M(OG)^2}$

$= \frac{1}{2} I_{M/O} \dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2}\left(I_{M/G} + M.(OG)^2\right)\dot{\theta}^2$

$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M (4a)^2 + Ma^2\right)\dot{\theta}^2$

$= \left(Ma^2\left(\frac{16}{12} + 1\right)\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}$

$= \left(Ma^2\left(\frac{28}{12}\right)\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}$

$$\boxed{T = \left(\frac{7}{3} Ma^2\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}}$$

II - $U = U_M + U_k$

$U = Mg\,h_{tige} + \frac{1}{2} k (x + \Delta\ell)^2 + cte$

à "t = 0", le ressort est allongé de "$\Delta\ell$" puisque il porte à son extrémité une masse (tige "M")

$$U = Mg\,h_{tige} + \frac{1}{2} k (x + \Delta l)^2 + cte$$

la masse M (tige) monte vers le haut selon la position de son centre "G" ;

$h_{tige} = a\theta$;

même chose pour $x = a\theta$

$$U = Mg\,a\theta + \frac{1}{2} k (a\theta + \Delta l)^2 + cte \quad — (*)$$

Il faut simplifier l'expression de U et trouver la Δl :

à l'équilibre $\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = Mga + k(a)(\underbrace{a\theta}_{0} + \Delta l)\Big|_{\theta=0} = 0$$

$$\Rightarrow Mg\cancel{a} + k\cancel{a}\Delta l = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Mg + k\Delta l = 0}$$

en remplace ds (*).

$$U = Mga\theta + \frac{1}{2} k a^2\theta^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2 + ka\theta\Delta l + cte$$

$$U = \frac{1}{2} k a^2\theta^2 + \theta a(\underbrace{Mg + k\Delta l}_{0}) + Cte$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 + C_{te}}$$

III – $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha v^2$; $v = \dot{x}_a = 3a\dot{\theta}$

$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 9a^2 \dot{\theta}^2 = \frac{9}{2} \alpha a^2 \dot{\theta}^2}$$

IV – $\mathcal{L} = T - U = \left(\frac{7}{3} M a^2\right) \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 + C_{te}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \text{——(1)}$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{7}{3} M a^2\right) \ddot{\theta}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -k a^2 \theta$

$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 9 \alpha a^2 \dot{\theta}$

je remplace dans (1) :

$$\ddot{\theta} + \frac{9 \alpha a^2}{\frac{7}{3} M a^2} \dot{\theta} + \frac{k a^2}{\frac{7}{3} M a^2} \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{27 \alpha}{7 M}}_{2\lambda} \dot{\theta} + \underbrace{\frac{3k}{7M}}_{\omega_0^2} \theta = 0$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{7M}}$ [rad/s] ;

$\lambda = \frac{27 \alpha}{14 M}$ [s^{-1}] .

V - le système oscille $\Rightarrow$ m^{vt} pseudopériodique

$\hookrightarrow \theta = \underbrace{Ae^{-\lambda t}}_{C\text{ : l'amplitude}} \cos(\omega_a t + \varphi)$

$t \longrightarrow t + 4T_a$

$C_{initiale} \longrightarrow C_{finale} = \dfrac{C_{initiale}}{10}$ — (1)

$T_a = 0{,}6\,S$.

$\alpha = ? \Rightarrow \lambda = \dfrac{27\alpha}{14M} \Rightarrow \boxed{\alpha = \lambda \cdot \dfrac{14M}{27}}$ — (2)

je dois trouver λ pour déterminer α :

$C_{initiale} = Ae^{-\lambda t}$

$C_{finale} = Ae^{-\lambda(t+4T_a)}$

je remplace dans (1) et je simplifie :

$(1) \Leftrightarrow \cancel{Ae^{-\lambda t}} e^{-\lambda 4T_a} = \dfrac{\cancel{Ae^{-\lambda t}}}{10}$.

$\ln e^{-\lambda 4T_a} = \ln \dfrac{1}{10}$

$+\lambda 4T_a = +\ln 10$

$\lambda = \dfrac{\ln 10}{4 \cdot T_a} = 0{,}96\ s^{-1}$

je remplace ds (2) $\Rightarrow \alpha = 4{,}92\ kg\,s^{-2}$

VI. Déduire ω_0 :

pulsation amorti

le m^{vt} est amorti $\Rightarrow$ $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

et d'autre part : $\omega_a = \dfrac{2\pi}{T_a}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T_a} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 + \lambda^2$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_a}\right)^2 + \lambda^2}} = \text{A.N.}$$

d'après l'expression de $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3k}{7M}}$.

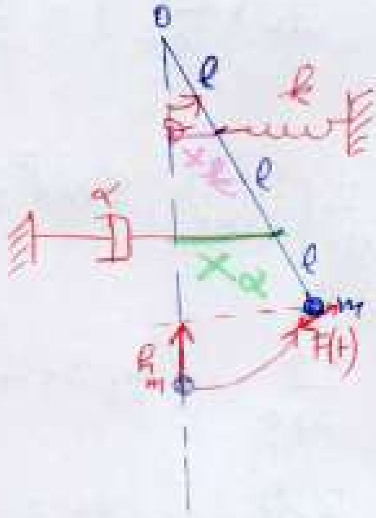
on détermine k :

$$\omega_0^2 = \frac{3k}{7M} \Rightarrow \boxed{k = \frac{7M}{3}\omega_0^2} = \text{A.N.}$$

Série 3

Ex 03 : syst. amorti forcé :

$F(t) = F_0 \cos \Omega t$



I – $T = T_m$; "m" en rotation

$= \frac{1}{2} I_{m/O} \dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2} m (3\ell)^2 \dot{\theta}^2$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(9m\ell^2)\dot{\theta}^2}$$

$U = U_m + U_k$

$= mg h_m + \frac{1}{2} k x_k^2 + c^{te}$; $x_k = \ell\theta$

$= mg\, 3\ell \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2} k \ell^2 \theta^2 + c^{te}$

$$\boxed{U = (mg3\ell + k\ell^2)\frac{\theta^2}{2} + c^{te}}$$

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha v^2$, $v = \dot{x}_\alpha$; $x_\alpha = 2\ell\theta$

$\dot{x}_\alpha = 2\ell\dot{\theta}$

$= \frac{1}{2}\alpha(2\ell\dot{\theta})^2$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\alpha \cancel{4}^{2}\ell^2\dot{\theta}^2$

$$\boxed{\mathcal{D} = 2\alpha\ell^2\dot{\theta}^2}$$

I - $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}(9m\ell)\dot{\theta}^2 - (mg3\ell + k\ell^2)\frac{\theta^2}{2} + \underline{U_0}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = \mathcal{M}^{\vec{F}}_{/0} = 3\ell F_0 \cos \Omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = 9m\ell^2 \ddot{\theta} \\ \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = (mg3\ell + k\ell^2)\theta \\ \\ \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha\ell^2\dot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4\alpha\ell^{\cancel{2}}}{9m\cancel{\ell}}\dot{\theta} + \frac{mg3\ell + k\ell^2}{9m\ell^{\cancel{2}}}\theta$$

$$\ldots = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cancel{\ell}F_0}{\underset{3}{\cancel{9}}m\ell^{\cancel{2}}}\cos\Omega t$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{4\alpha\ell}{9m}}_{2\lambda}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{3mg + k\ell}{9m}}_{\omega_0^2}\theta = \underbrace{\frac{F_0}{3m\ell}}_{A_0}\cos\Omega t$$

III -

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos\Omega t \quad \text{——} (1)$$

(1) est une éq$^{\underline{n}}$ diff d'ordre II avec second membre (EASM), elle admet une solution générale de la forme :

$$\theta_g = \underbrace{\theta_h}_{\text{(EASS)}} + \underbrace{\theta_p}_{\text{solution permanente}}$$

θ_{h} va disparaître avec le temps,

la solution permanente prend la forme

de l'excitation:

$$\theta_p = A \cos(\Omega t + \phi) \rightsquigarrow \underline{\theta}_p = A e^{j(\Omega t + \phi)}$$

pour trouver A et ϕ nous allons utilisé

la représentation Complexe pour les fct

en "cosinus" :

$$\underline{\theta}_p = A e^{j(\Omega t + \phi)} = \underbrace{A e^{j\phi}}_{\underline{A}} e^{j\Omega t}$$

$$|\underline{A}| = A \qquad \text{Arg}(\underline{A}) = \phi$$

Si on trouve $\underline{A}$ alors on peut

déterminer A (l'amplitude) et

ϕ (la phase ou le déphasage à l'origine)

$$\underline{\theta}_p = \underline{A}\, e^{j\Omega t}$$

$$\dot{\underline{\theta}}_p = \underline{A}\ \Omega j\, e^{j\Omega t}$$

$$\ddot{\underline{\theta}}_p = -\underline{A}\ \Omega^2 e^{j\Omega t}$$

et, $A_0 \cos \Omega t \rightarrow A_0 e^{j\Omega t}$

$\Downarrow$

je remplace ds 1 :

$$\Rightarrow -\underline{A}\,\Omega^2 \cancel{e^{j\Omega t}} + 2\lambda \underline{A}\,\Omega j\, \cancel{e^{j\Omega t}} + \omega_0^2 \underline{A}\, \cancel{e^{j\Omega t}}$$

$$= A_0\, \cancel{e^{j\Omega t}}$$

$$\Rightarrow -\underline{A}\,\Omega^2 + 2\lambda \underline{A}\,\Omega j + \omega_0^2 \underline{A} = A_0$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + j\, 2\lambda\Omega}$$

$$A = |\underline{A}| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega}$$

je dois remplacer par l'expression de λ et ω_0 pour finaliser mon développement ...

$$A = \frac{\frac{F_0}{9ml}}{\text{---------}}$$

- - - - -

IV - Ω_R ; à la résonance, l'amplitude est maximale : cf travail ds l'exo 1

$$\left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

V - $\Omega_{c_1} = \omega_0 - \lambda$

$\Omega_{c_2} = \omega_0 + \lambda$

$B = \Omega_{c_2} - \Omega_{c_1} = 2\lambda$

VI - Application numérique .....

$\Omega_R = \text{...}$

$B = \text{...}$