Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Introduction : Dans ce chapitre, nous examinons les systèmes qui se composent de deux ou plusieurs oscillateurs qui sont couplés dans une certaine façon et qui ont plus d'une pulsation d'oscillation. Nous allons voir que ce couplage produit de nouveaux et d'importants effets physiques. Chacune des pulsations correspondent à une manière différente dans laquelle le système peut osciller. Ces différentes façons sont appelés « modes normaux ». Les modes normaux d'un système sont caractérisés par le fait que toutes les parties du système oscillent avec la même pulsation. Les oscillateurs sont couplé parce qu' ils se trouvent rarement dans un isolement complet et sont généralement capables d'osciller avec de différentes façons. Les oscillateurs couplés sont également importants car ils ouvrent la voie à la compréhension des ondes dans les milieux continus. Le mouvement des ondes dépend des systèmes voisins qui vibre et qui sont couplées entre elles et peuvent donc transmettre de l'énergie entre elles.

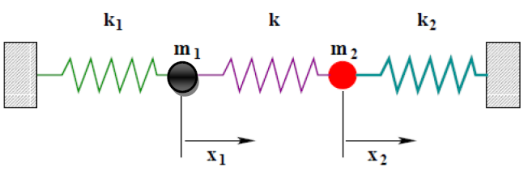
Degrés de libertés

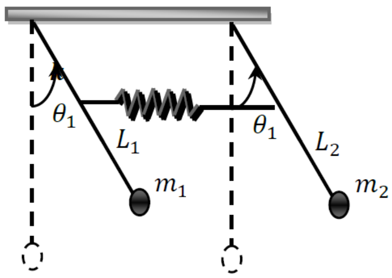
Les variables **indépendantes** nécessaires à la description d'un système en mouvement sont appelées **degrés de liberté.** S'il y a **N** variables indépendantes q_i, on écrit **N** équations de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} + F_1, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} + F_2, \\ \vdots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_N}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_N} = -\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_N} + F_N. \end{cases}$$

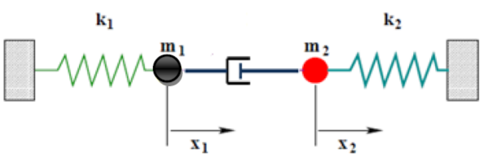
5.1 Types de couplage

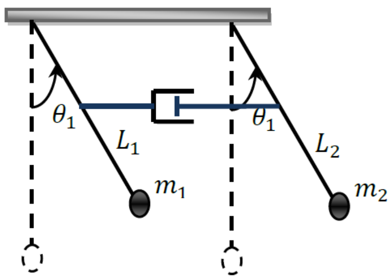
a) ***Couplage Elastique :*** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.



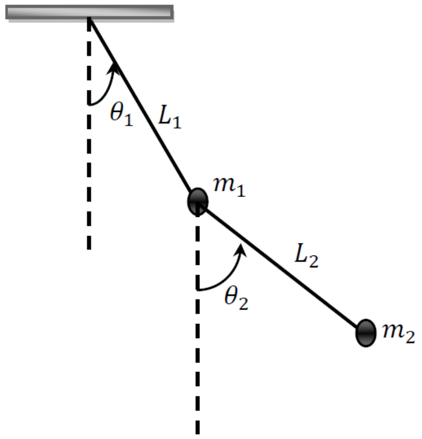


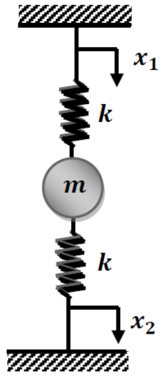
b) ***Couplage Visqueux :*** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par résistance, équivalents au couplage par amortisseur.





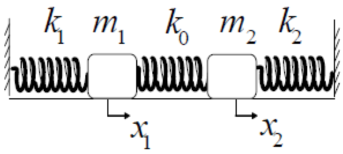
c) ***Couplage Inertiel :*** Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.





5.2 Systèmes libres à deux degrés de libertés **(Couplage élastique)**

5.2.1 Equations du mouvement



Soit le système libre ci-contre. Les deux variables indépendantes sont x_1 et x_2. k_0 est appelé élément de **couplage**.

$T = \frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2. \quad U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_0\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2.$

Le Lagrangien est: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_0\left(x_1 - x_2\right)^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2.$

Les deux équations de Lagrange s'écrivent: (*Pour $\mathcal{D}=0$, $F=0$: Système non amorti et non forcé.*)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 + \left(k_1 + k_0\right)x_1 - k_0x_2 = 0. \\ m_2\ddot{x}_2 + \left(k_0 + k_2\right)x_2 - k_0x_1 = 0. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

5.2.2 Modes propres (normaux)

En **mode normale** (ou **propre**) la solution de (5.1) est

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = A_1\cos\left(\omega t + \phi_1\right). \\ x_2 = A_2\cos\left(\omega t + \phi_2\right). \end{array}} \tag{5.2}$$

A_1, A_2, ϕ, dépendent des conditions initiales. Pour trouver ω, utilisons la représentation complexe:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = A_1\cos\left(\omega t + \phi_1\right) \longrightarrow \underline{x}_1 = \underline{A}_1e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2\cos\left(\omega t + \phi_2\right) \longrightarrow \underline{x}_2 = \underline{A}_2e^{j\omega t} \end{array}}$$

(5.1) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \left(-\omega^2 + \dfrac{k_1 + k_0}{m_1}\right)\underline{A}_1 - \dfrac{k_0}{m_1}\underline{A}_2 = 0. \\ -\dfrac{k_0}{m_2}\underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + \dfrac{k_0 + k_2}{m_2}\right)\underline{A}_2 = 0. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(-\omega^2 + a\right)\underline{A}_1 - b\underline{A}_2 = 0. \\ -c\underline{A}_1 + \left(-\omega^2 + d\right)\underline{A}_2 = 0. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Pour que (5.3) soit vrai sans que $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$ soient tous les deux nuls, il faut que son **déterminant caractéristique** soit nul:

$$\Delta\left(\omega\right) = \begin{vmatrix} -\omega^2 + a & -b \\ -c & -\omega^2 + d \end{vmatrix} = 0.$$

Ceci nous donne l'**équation caractéristique**:

$$\boxed{\omega^4 - \left(a + d\right)\omega^2 + \left(ad - bc\right) = 0.}$$

Les deux solutions réelles et positives ω_1 et ω_2 de cette équation sont appelées **pulsations propres** ou **normales**. La plus petite est appelée la **fondamentale**, l'autre est appelée l'**harmonique**.

• **Premier mode propre**: Pour $\omega = \omega_1$, le système (5.3) implique que $\frac{A_{1(1)}}{A_{2(1)}} = \frac{-\omega_1^2 + d}{c} > 0$.

La vibration est dite en **phase** car la solution (5.2) s'écrit dans ce cas $\begin{cases} x_{1(1)} = A_{1(1)} \cos(\omega_1 t + \phi) . \\ x_{2(1)} = A_{2(1)} \cos(\omega_1 t + \phi) . \end{cases}$

• **Deuxième mode propre**: Pour $\omega = \omega_2$, le système (5.3) implique que $\frac{A_{1(2)}}{A_{2(2)}} = \frac{-\omega_2^2 + d}{c} < 0$.

La vibration est dite en **opposition de phase** car (5.2) s'écrit $\begin{cases} x_{1(2)} = A_{1(2)} \cos(\omega_2 t + \phi) . \\ x_{2(2)} = -A_{2(2)} \cos(\omega_2 t + \phi) . \end{cases}$

Dans le cas général, le système vibre dans une **superposition** de ces deux modes propres.

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

où A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes.

Les doubles indices sont utilisés pour les amplitudes des différentes composantes harmoniques ; le premier indice se réfère à la coordonnée et le second à la pulsation. Par exemple A_{12} est l'amplitude de $x_1(\mathrm{t})$ à la pulsation ω_2.

Lorsque $A_{12} = A_{22} = 0$, x_1 et x_2 correspondant à la première solution particulière sont des fonctions sinusoïdales, en phase, de pulsation ω_1 ; on dit que le système oscille dans le premier mode. Dans ce cas

$$x_1 = A_{11}\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_{21}\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

Lorsque $A_{11} = A_{21} = 0$, $x_1$et x_2 correspondant à la seconde solution particulière et sont des fonctions sinusoïdales, en opposition de phase, de pulsation ω_2 ; on dit que le système oscille dans le second mode. Dans ce cas

$$x_1 = A_{12}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2 = A_{22}\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

5.2.3 cas particulier de deux oscillateurs identiques

Calcul des constantes d'intégration

Considérons le cas particulier de deux oscillateurs identiques tels que $m_1 = m_2 = m$ et $k_0 = K$ $k_1 = k_2 = k$. Dans ce cas les pulsations propres sont respectivement égales à

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{2K}{k}}$$

On pose : $\boxed{\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{A_{1(1)}}{A_{2(1)}} = \mu_1 \text{ et } \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{A_{1(2)}}{A_{2(2)}} = \mu_2}$

Les rapports d'amplitudes correspondant à ces pulsations sont respectivement $\mu_1 = +1$ et $\mu_2 = -1$.

Soit $x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}$ *et* $\dot{x}_{20}$ les valeurs initiales respectives de $x_1, x_2, \dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$. Tenant compte de ces conditions initiales, on obtient le système d'équations suivant qui permet de déterminer les constantes d'intégration A_{11}, A_{12}, ϕ_1 et ϕ_2

$$
\begin{aligned}
&A_{11}\ \cos(\phi_1) + A_{12}\ \cos(\phi_2) = x_{10} \\
&A_{11}\ \cos(\phi_1) - A_{12}\ \cos(\phi_2) = x_{20} \\
&-\omega_1\, A_{11}\ \sin(\phi_1) - \omega_2\, A_{12}\ \sin(\phi_2) = \dot{x}_{10} \\
&-\omega_1\, A_{11}\ \sin(\phi_1) + \omega_2\, A_{12}\ \sin(\phi_2) = \dot{x}_{20}
\end{aligned}
$$

Les solutions de ce système d'équations sont

$$A_{11} = \frac{x_{10} + x_{20}}{2\ \cos(\phi_1)} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{x_{10} - x_{20}}{2\ \cos(\phi_2)}$$

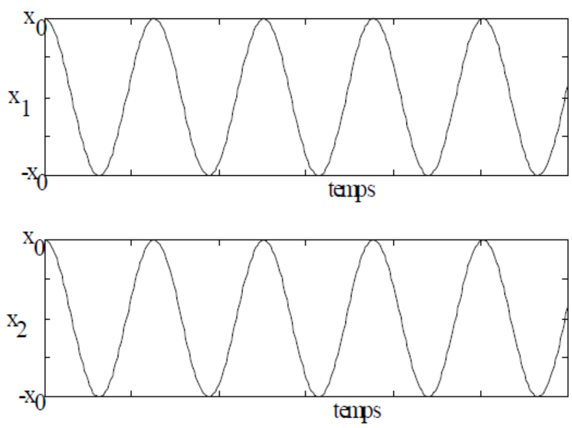
ou encore

$$A_{11} = \frac{\dot{x}_{10} + \dot{x}_{20}}{2\,\omega_1\ \sin(\phi_1)} \quad \text{et} \quad A_{12} = \frac{\dot{x}_{20} - \dot{x}_{10}}{2\,\omega_2\ \sin(\phi_2)}$$

1. Considérons le cas particulier suivant $x_{10} = x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \ \dot{x}_{20} = 0$; on obtient dans ce cas $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{12} = 0$ et $A_{11} = x_0$; d'où

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0\ \cos(\omega_1 t) \\
x_2 &= x_0\ \cos(\omega_1 t)
\end{aligned}
$$

   Pour ces conditions initiales particulières, les deux masses oscillent en phase à la même pulsation ω_1. On dit que le système oscille dans le mode fondamental.

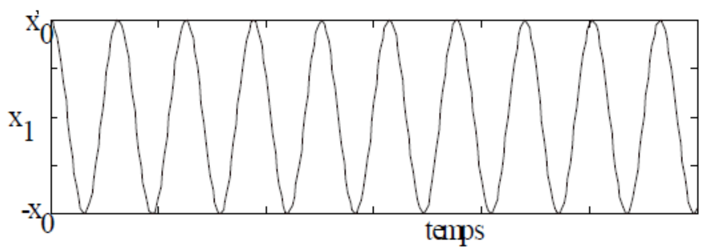


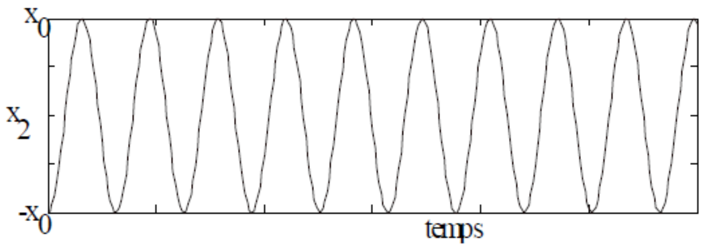
Oscillations dans le mode fondamental

2. Considérons un autre cas particulier pour lequel $x_{10} = -x_{20} = x_0$ et $\dot{x}_{10} = \ \dot{x}_{20} = 0$. On obtient dans ce cas $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{11} = 0$ et $A_{12} = x_0$; d'où

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0\ \cos(\omega_2 t) \\
x_2 &= -x_0\ \cos(\omega_2 t)
\end{aligned}
$$

   On dit que le système oscille dans le second mode car les deux masses oscillent en opposition de phase avec la même pulsation ω_2.





Oscillations dans le mode harmonique

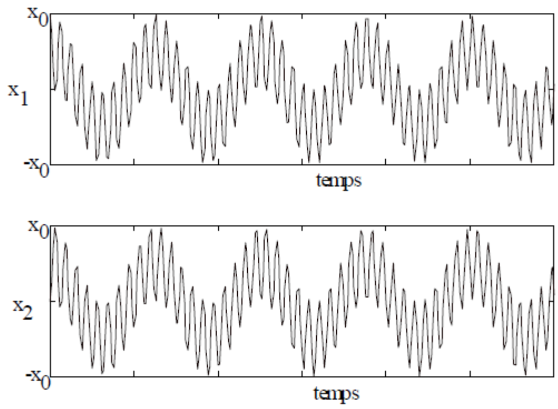
3. Considérons enfin le cas particulier suivant $x_{10} = x_0$, $x_{20} = 0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$; d'où $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_{11} = A_{12} = x_0/2$. Les solutions s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_1\, t\right) + \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_2\, t\right) \\ x_2(t) &= \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_1\, t\right) - \tfrac{x_0}{2} \cos\left(\omega_2\, t\right) \end{aligned}$$

Les solutions ne sont plus des fonctions purement sinusoïdales du temps mais des combinaisons linéaires de deux fonctions sinusoïdales de pulsations respectives ω_1 et ω_2. x_1 et x_2 peuvent s'écrire sous la forme

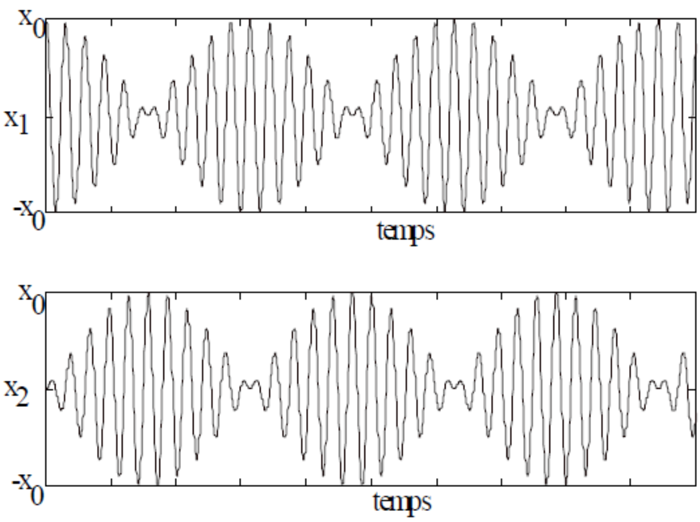
$$\begin{aligned} x_1\,(t) &= x_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \\ x_2\,(t) &= x_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{aligned}$$

La figure suivante représente le résultat obtenu dans le cas où ω_1 est très différent de ω_2 (c'est-à -dire si $K >> k$).



Oscillations dans le cas des conditions initiales : $x_{10} = x_0$, $x_{20} = 0$ et $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$

Si ω_1 est peu différent de ω_2 (c'est-à -dire si $K << k$), on observe un phénomène de battement (voir figure ci-dessous).



Phénomène de battements