MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Références bibliographiques

MECANIQUE DU POINT MATERIEL. Cours et Exercices

ZIANI Nossair et BOUTAOUS, Ahmed Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algérie, 2015/2016

Polycopié d'exercices et examens résolus de Mécanique du point matériel

M. Bourich, Université Cadi Ayyad, Maroc 2014

MECANIQUE DU POINT MATERIEL. Cours et Applications

Hicham CHAABANE, ISITCom, Hammam, Tunisie 2010

PHYSIQUE/CHIMIE

ADRIEN G., ISBN :2-7117 - 1513-2, France 1989

PHYSIQUE/CHIMIE

CHEN P., GUILLEMARD R. et NANICHE P., ISBN :2-7117 - 3381-1, France 1957

Chapitre 1 : Calcul vectoriel

1.1 Définition d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par une origine A, le support la droite *(AB)*, le sens de A vers B et le module. Il est représenté par un segment orienté. Il est défini par une direction, un sens sur cette direction et une longueur. Cette longueur est appelée la norme de ce vecteur.

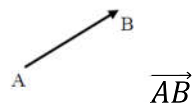

Figure 1.1 : Representation d'un vecteur

1.2 Vecteur unitaire

Chaque vecteur peut être exprimé en fonction d'un vecteur unitaire qui se différencier du vecteur porteur par son module qui est l'unité.

$$\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\vec{U} \qquad (1.1)$$

Avec $\left|\vec{U}\right| = 1$ et $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$

1.3 Opération sur les vecteurs

1.3.1 Adition de deux vecteurs

L'adition de deux vecteurs est la somme de ces derniers pour former une résultante (fig. 1.1):

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} + \vec{V_2} \qquad (1.2)$$

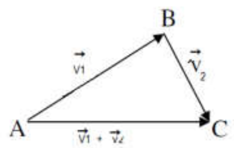

Figure 1.2 : Adition de deux vecteurs

1.1.2 Soustraction de deux vecteurs

La soustraction est l'addition d'un vecteur avec l'inverse du vecteur qu'on veut soustraire de ce dernier (fig. 1.2).

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} + \left(-\overrightarrow{V_2}\right) \qquad (1.3)$$

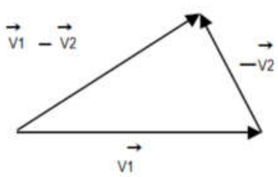

Figure 1.4 : Soustraction de deux vecteurs

1.4 Représentation d'un point

1.4.1 Système de coordonnées cartésiennes

Chaque Point est repéré par ses coordonnées. S'il s'agit d'un repère linéaire par une seule coordonnée *(x)*, d'un repère plan par deux coordonnées *(x,y)* et dans l'espace par trois coordonnées *(x,y,z)*. Ces coordonnées sont les projections de la position sur chaque axe doté d'un vecteur unitaire. La position du point peut être exprimée par un vecteur position qui lie l'origine du repère choisi à la position.
Le repère est orthonormé, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires sont normés à l'unité et orthogonaux entre eux.

a. Cas à deux dimensions

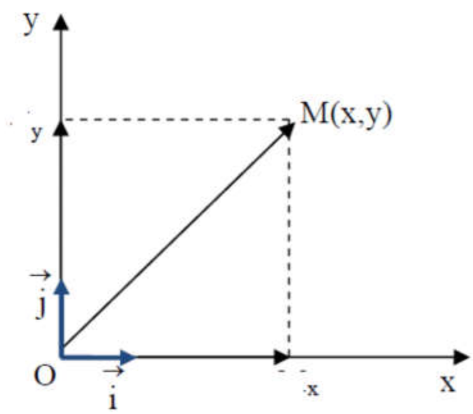

Figure 1.5 : Représentation du vecteur position dans le système d'axes *(Oxy)* de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Dans ce repère orthonormé direct un point *M* est repéré par ses coordonnées cartésiennes *(x,y)* . le vecteur position *M* s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \qquad (1.4)$$

$$\overrightarrow{OY} = \left|\overrightarrow{OY}\right|\vec{J} = y\vec{J} \qquad (1.5)$$

Dans l'espace le repère est :

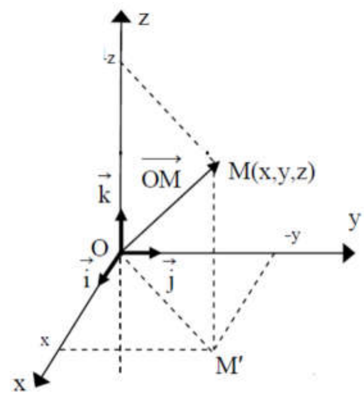

Figure 1.6 : Représentation du vecteur position dans un système d'axes *(Oxyz)* de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (1.6)$$

Lorsque les coordonnées *x*, *y* ou *z* de *M* subissent une variation élémentaire *dx*, *dy* ou *dz*, le point *M* se déplace respectivement de *dx* suivant *(Ox)*, dy suivant *(Oy)* ou dz suivant *(Oz)*. Ainsi, le volume élémentaire *dV* est petit parallélépipède rectangle d'arêtes *dx*, *dy* et *dz*

$$dV = dx\,.\,dy\,.dz \qquad (1.7)$$

c. Expression d'un vecteur dans une base cartésienne à deux dimensions

Soient deux positions $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$, le vecteur formé par les deux points s'exprime par l'expression suivante :

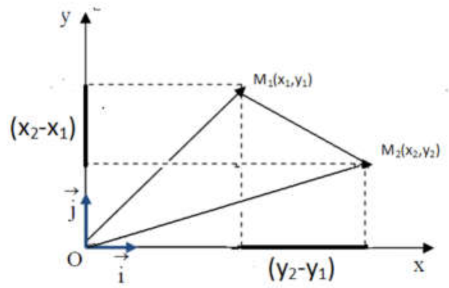

Figure 1.7 : Représentation du vecteur déplacement dans le repère *(Oxy)* de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} \qquad (1.8)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} \qquad (1.9)$$

Son module est :

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.10)$$

1.5 Produit scalaire entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$et $\overrightarrow{V_1}$,leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire.

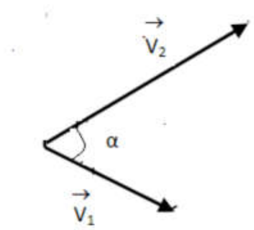

Figure 1.9 : Représentation de deux vecteurs avec α l'angle entre eux

$$\vec{V}_1\vec{V}_2 = |\vec{V}_1||\vec{V}_2| \cos\alpha \qquad (1.11)$$

Avec α est l'angle entre les deux vecteurs.
Ce produit admet quelques propriétés tel que :

$$\vec{\imath}\,.\vec{\imath} = 1 \qquad (1.12)$$

$$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0 \qquad (1.13)$$

Le module du vecteur $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ est :

Soient Les coordonnées du vecteur $\vec{V}_1(x_1,y_1,z_1)$ et celles de $\vec{V}_2(x_2,y_2,z_2)$

Leur produit scalaire donne :

$$\overrightarrow{V_1}\,\overrightarrow{V_2} = (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k})(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k}) \qquad (1.14)$$

$$\overrightarrow{V_1}\,\overrightarrow{V_2} = (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \qquad (1.15)$$

Alors pour calculer le module de $\overrightarrow{V_1}$ on a :

$$\overrightarrow{V_1}\,\overrightarrow{V_1} = |\overrightarrow{V_1}|^2 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2) \qquad (1.16)$$

$$|\overrightarrow{V_1}| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} \qquad (1.17)$$

est donc le module de ce vecteur.

1.6 Produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, leur produit vectoriel est un vecteur orienté :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V} \quad (1.18)$$

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

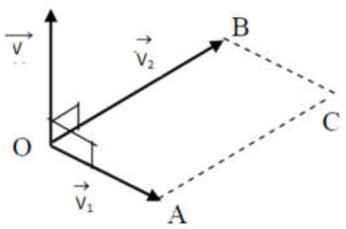

Figure 1.10 : Représentation du produit vectoriel en appliquant la règle du tirebouchon

- sa norme vaut :

$$|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}| = |\overrightarrow{V_1}||\overrightarrow{V_2}| \sin\alpha \quad (1.19)$$

Avec α est l'angle entre les deux vecteurs.

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 0 \qquad (1.20)$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad (1.21)$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) \qquad (1.22)$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (1.22)$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} \qquad (1.23)$$

Chapitre 2 : Cinématique

2.1 Définition

La cinématique est l'étude des mouvements des masses, quantité de la matière, indépendamment des causes qui les engendrent.

2.2 Le point matériel

On appelle un point matériel, le centre de gravité d'un corps sans dimension géométrique dont on néglige le mouvement de rotation autour lui-même.

2.3 Référentiel

Le mouvement est une notion relative : un corps est en mouvement par rapport à un autre corps pris comme référence et appelé *référentiel*.

- Le choix d'une origine des temps permet d'associer à chaque date la position du mobil ponctuel à cet instant.
- Un ensemble de trois vecteurs de base est associé au référentiel choisi. On peut ainsi définir les coordonnées des vecteurs physiques représentatifs du mouvement étudier.

2.4 Vecteur position

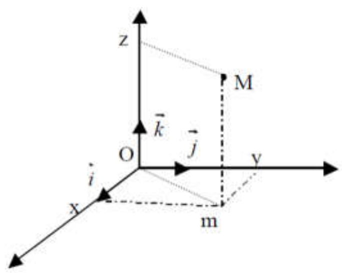

Figure 2.1 : Représentation de la position du mobil M dans le système d'axes (Oxyz) de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (2.1)$$

x est la projection de *M* sur l'axe *(ox)*, *y* sur l'axe *(oy)* et *z* sur l'axe *(oz)*, on les nomme les coordonnées de *M*, comme le point *M* est en mouvement donc sa position varie dans le temps ces coordonnées sont fonction du temps.

$$x=f(t) \quad y=g(t) \quad z=h(t) \qquad (2.2)$$

Qu'on appelle les équations horaires.

2.5 Vecteur déplacement

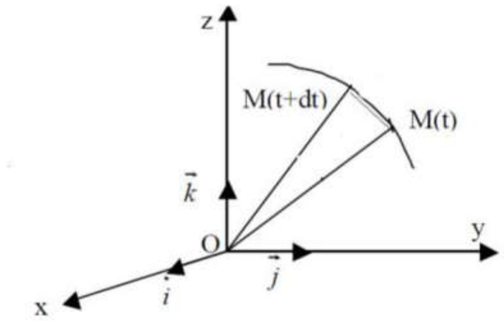

Figure 2.2 : Représentation d'un déplacement infinitésimal

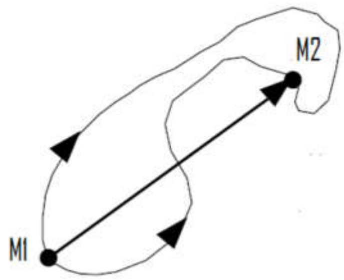

Figure 2.3 : Vecteur déplacement avec deux différentes trajectoires

Soient deux points M_1 à l'instant t et un autre M_2 à l'instant $(t+dt)$ (fig. 2.2), on peut définir trois chemins différents entre ces deux points, qui correspondent au même vecteur
C'est le vecteur déplacement formé par l'origine M_1 et l'extrémité M_2, qui définit un mouvement qui se fait du point M_1 au point M_2 (Fig. 2.2).

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{DM_1} \qquad (2.3)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|\vec{U} \qquad (2.4)$$

$\vec{U}$est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

2.6 Trajectoire

C'est l'ensemble des points occupés par un mobil à tous les instants (fig. 2.2, 2.3). Mathématiquement c'est une relation liant les coordonnés x, y et z *entre eux* indépendamment du temps. Cette équation est obtenue en éliminant le temps entre les différentes coordonnées ou équations horaires.

$$y=f(x,z) \text{ ou } x=g(y,z) \text{ sinon } z=h(x,y) \qquad (2.5)$$

2.7 Vecteur vitesse

La vitesse exprime la variation de la position du point en fonction du temps. Elle est une grandeur vectorielle du fait que le mouvement du point directionnel.
Deux vitesses peuvent être définies ; la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

a- Vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un mobile est la distance parcourue par ce dernier par rapport au temps de son parcours, et ne dépend que du point initial et du point final.

Soit le point M_1 à l'instant t_1 et le point M_2 à l'instant t_2

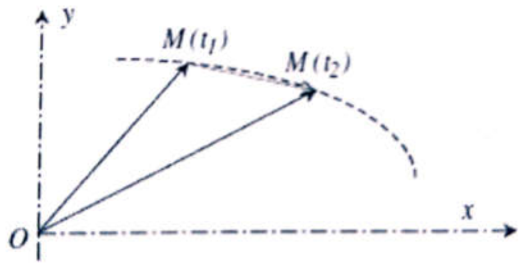

Figure 2.4 : Positions du mobile M à $t_1$et t_2

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} \qquad (2.6)$$

Avec $\Delta t = t_2 - t_1$

b- Vitesse instantanée

La vitesse instantanée est la limite de la vitesse moyenne lorsque la différence de temps est infiniment petite. La vitesse instantanée est une fonction de temps.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{V_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad (2.7)$$

Soit une fonction *y=f(x)*, et sa dérivée la quantité égale à :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2.8)$$

D'où le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. Par conséquent, *le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire*.

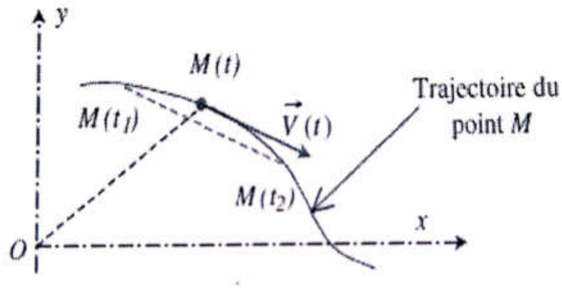

Figure 2.5 : Représentation du vecteur vitesse par rapport à la trajectoire du Moblie

Le vecteur vitesse du point *M* s'obtient en dérivant son vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (2.9)$$

Et sa norme est

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \qquad (2.10)$$

2.8 Vecteur accélération

Le vecteur accélération est la variation par rapport à un temps infinitésimal du vecteur vitesse.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \qquad (2.11)$$

La norme du vecteur accélération est notée $\gamma(m.s^{-2})$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (2.12)$$

2.9 Exemples de mouvements

On distingue deux types de mouvements ; les mouvements rectilignes et les mouvements curvilignes.

2.9.1 Mouvements rectilignes

Il existe deux types de mouvements rectilignes ; le mouvement rectiligne uniforme et le mouvement rectiligne uniformément varié.

a. Mouvement rectiligne uniforme

Dans ce type de mouvement la trajectoire est une portion de droite, donc nous pourrons présenter sur notre référentiel le point *M* sur une trajectoire confondue avec l'axe *Ox* des coordonnées cartésiennes. Il en résulte alors que l'équation horaire du mouvement est *x(t)* et le vecteur vitesse aura qu'une seule composante.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} \qquad (2.13)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} \qquad (2.14)$$

Et le module de vitesse est :

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (2.15)$$

Puisque la vitesse est constante donc il est possible de trouver l'équation horaire du mouvement comme suit :

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = v\int_{t_0}^{t} dt \qquad (2.16)$$

$$x - x_0 = v(t - t_0) \qquad (2.17)$$

D'où

$$x = v(t - t_0) + x_0 \qquad (2.18)$$

est l'équation horaire du mouvement uniforme.

b. Mouvement rectiligne uniformément varié

Dans ce type de mouvement, la vitesse varie en fonction du temps et l'accélération γ est constante donc elle peut être représentée comme suit :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} \qquad (2.19)$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} \gamma\,dt = \gamma\int_{t_0}^{t} dt \qquad (2.30)$$

D'où

$$v = \gamma(t - t_0) + v_0 \qquad (2.31)$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} (\gamma(t - t_0) + v_0)\,dt \qquad (2.31)$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\gamma(t^2 - t_0^2) - \gamma t_0(t - t_0) + v_0(t - t_0) \qquad (2.32)$$

$$x = \frac{1}{2}\gamma(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0 \qquad (2.33)$$

Donc *x(t)* représente l'équation horaire du mouvement uniformément varié.

2.9.2 Mouvement curviligne

a. Base de Frénet

Dans ce type de mouvement, la trajectoire du mobile est curviligne. Pour définir cette courbure il faut connaitre son rayon de courbure ainsi que son centre de courbure (fig. 2.6).

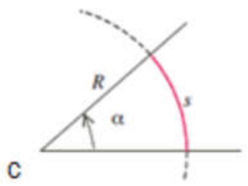

Figure 2.6 Trajectoire dans un mouvement circulaire

Pour étudier ce mouvement, la trajectoire circulaire de rayon R est généralement utilisée. R dépend du temps, la courbure a un centre C et l'angle de rotation α est exprimé en radian. La longueur de l'arc de cercle S interceptée par cet angle est donné par la relation :

$$s = R\alpha \qquad (2.34)$$

S est la coordonnée curviligne.

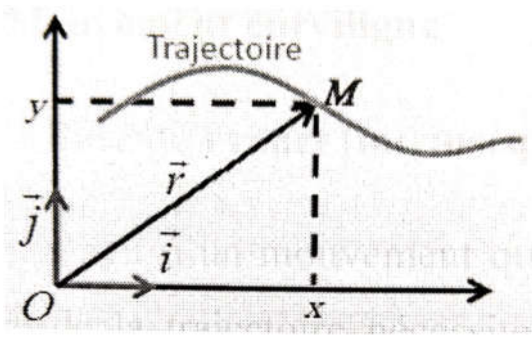

Figure 2.7 Représentation du vecteur position dans un mouvement curviligne

ρ est le rayon de courbure qui remplacera R dans les formalismes qui suivent :

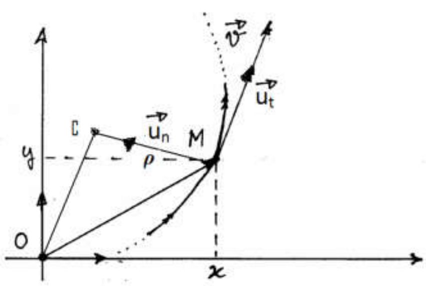

Figure 2.8 : Portion de trajectoire d'un mouvement curviligne dans un repère *(Oxy)*

Soit un mobile M qui suit une trajectoire curviligne (Fig. 2.8), il parcourt un arc $\hat{s} = \widehat{M}_t M_{t+\Delta t}$.

La vitesse instantanée est défini par :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad (2.35)$$

En utilisant un vecteur unitaire on aura :

$$\vec{v} = v\vec{U}_t \qquad (2.36)$$

Tel que

$$\vec{U}_t = cos\,\alpha\vec{\imath} + sin\,\alpha\vec{\jmath} \qquad (2.37)$$

Le vecteur $\vec{U}_t$ est tangent à la trajectoire au point *M*.

L'expression de l'accélération est obtenue en dérivant celle de la vitesse comme suit :

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{U}_t + v\frac{d\vec{U}_t}{dt} \qquad (2.38)$$

Comme e vecteur unitaire $\vec{U}_t$ est fonction du temps, on aura :

$$\frac{d\vec{U}_t}{dt} = \frac{d\vec{U}_t}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} \qquad (2.39)$$

Avec

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{1}{\rho} = v\frac{1}{\rho} \qquad (2.40)$$

Donc

$$\frac{d\vec{U}_t}{dt} = (-\,sin\,\alpha\vec{\imath} + cos\,\alpha\vec{\jmath})\frac{1}{\rho}v = \frac{v}{\rho}\vec{U}_n \qquad (2.41)$$

Avec

$$\vec{U}_n = -\,sin\,\alpha\vec{\imath} + cos\,\alpha\vec{\jmath} \qquad (2.42)$$

et

$$(\vec{U}_n \perp \vec{U}_t) \qquad (2.43)$$

Donc

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{U}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{U}_n \qquad (2.44)$$

On distingue alors deux composantes de l'accélération, une tangentiel à la trajectoire du mouvement et l'autre normale en direction du centre de la courbure.

La vitesse et l'accélération peuvent s'écrire dans la nouvelle base $(\vec{U}_n, \vec{U}_t)$ qui s'appelle : base de Frénet ou base intrinsèque.

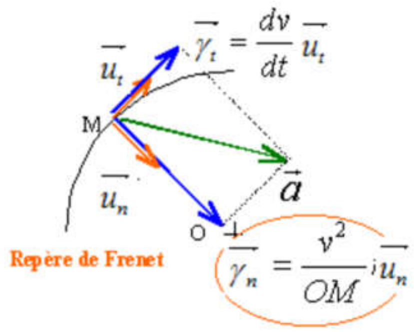

Figure 2.9 : Repère de Frénet

a. Mouvement circulaire uniforme

Dans le mouvement curviligne uniforme :

$$|\vec{v}| = cte \Longrightarrow |\vec{\gamma}_t| = 0 \qquad (2.45)$$

L'accélération se réduit à un seul terme, contrairement au mouvement rectiligne uniforme où on a aucune accélération.

$$\vec{\gamma}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{U}_n \qquad (2.46)$$

Remarque : Dans le cas d'un mouvement rectiligne le rayon de courbure tend vers l'infini, l'accélération se réduit donc à une composante tangentielle.

i. Détermination du rayon de courbure

Le rayon de courbure se détermine à partir du produit vectoriel entre l'accélération et la vitesse :

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{v} = \left(\frac{dv}{dt}\vec{U}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{U}_n\right) \wedge v\vec{U}_t \qquad (2.47)$$

$$\vec{\gamma} \wedge \vec{v} = \frac{v^3}{\rho}\left(\vec{U}_n \wedge \vec{U}_t\right) \qquad (2.48)$$

Comme le produit vectoriel est un vecteur, il faut prendre le son module pour déduire le rayon de courbure.

$$|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}| = \frac{v^3}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^3}{|\vec{\gamma} \wedge \vec{v}|} \qquad (2.49)$$

Le rayon de courbure est une grandeur algébrique, donc on peut le calculer dans n'importe quelle base.

ii. Centre de courbure

$$C\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \qquad (2.50)$$

$$\overrightarrow{OC} = x_c\vec{\imath} + y_c\vec{\jmath} \qquad (2.51)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OM} + \rho\overrightarrow{U_n} \qquad (2.52)$$

$$\frac{d\vec{U}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{U}_n \Rightarrow \vec{U}_n = \frac{\rho}{v}\frac{d\vec{U}_t}{dt} \qquad (2.53)$$

Avec

$$\frac{d\vec{U}_t}{dt} = \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)}{dt} \qquad (2.54)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)}{dt} \qquad (2.55)$$

Comme le centre de courbure est un point qu'on peut chercher dans une base, donc il faut trouver l'expression du vecteur position.

Chapitre 3 : Mouvement du centre d'inertie d'un solide

3.1 Solid indéformable

Un corps est un solide indéformable si tous ses points sont immobiles les uns par rapport aux autres.

3.2 Vecteur quantité de mouvement d'un solide

Le vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$ d'un solide de masse m et de centre d'inertie G a pour expression $\vec{P} = m \cdot \vec{v}_G$ où $\vec{v}_G$ est le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie G.

3.3 Force extérieur

Une force s'exerçant sur un système est dite extérieure lorsque son origine est extérieure au système.

3.3 Principe de l'inertie

Le centre d'inertie d'un système pour lequel la somme la somme des forces extérieures est nulle possède un mouvement rectiligne uniforme ou immobile. Ce principe n'est vérifié que dans le référentiel galiléen.

Le référentiel de Copernic est galiléen.

Les référentiels terrestre et géographique terrestre seront considérés comme étant galiléens en première approximation.

3.4 Relation $\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F}_{\text{ext}}$

Un système soumis à des forces extérieures dont la somme est non nulle voit son vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$ varier au cours du temps. La variation de $\vec{P}$ vérifie la relation

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F}_{\text{ext}} .$$

Pour un solide

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}_G$$

d'où

$$\Sigma\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}_G).$$

Puisque la masse m d'un solide est constante, on obtient

$$\Sigma\vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

Soit

$$\boldsymbol{\Sigma\vec{F}_{\mathrm{ext}} = m \cdot \vec{a}_G}$$

où $\boldsymbol{\vec{a}_G}$ est le vecteur accélération du centre d'inertie du solide.

3.5 Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un système est égale au travail des forces intérieures et extérieures s'exerçant sur le système.

Dans le cas d'un solide, la somme des travaux des forces intérieures est nulle. On obtient ainsi pour un solide

$$\boldsymbol{\Delta E_c = \Sigma W_{\vec{F}_{ext}}}\ .$$

Chapitre 4 : Particule soumise à une force constante

1.1 Loi du mouvement

On considère une particule de masse $\boldsymbol{m}$ soumise à une force unique constante $\vec{\boldsymbol{F}}$. L'étude s'effectue dans un référentiel galiléen.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m} \,.\, \vec{\boldsymbol{a}} \,.$$

L'accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$ de la particule est donc constante et s'écrit

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}}$$

ou

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}} \,.$$

Le vecteur vitesse de la particule s'obtient par intégration

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{t} + \vec{\boldsymbol{v}}_0$$

où $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ est le vecteur vitesse initiale de la particule.

Le vecteur position de la particule s'obtient aussi par intégration

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{dt} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{t} + \vec{\boldsymbol{v}}_0$$

soit

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{t}^2 + \vec{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \boldsymbol{t} + \overrightarrow{\boldsymbol{OM}_0} \,.$$

$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}_0}$ est le vecteur position initiale de la particule. On obtient, suivant les caractéristiques de $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ des trajectoires rectilignes ou paraboliques.

Exemples :

- *Particule soumise uniquement à son poids* $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m} \cdot \vec{\boldsymbol{g}}$ *dans le champ de la pesanteur considéré localement comme étant uniforme.*
- *Particule soumise à la force électrostatique* $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{q} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}$, *où* $\boldsymbol{q}$ *est la charge électrostatique de la particule et* $\vec{\boldsymbol{E}}$ *un champ électrostatique uniforme.*

Chapitre 5 : L'Oscillateur harmonique

5.1 L'oscillateur non amorti

Un système est un oscillateur lorsqu'il peut se déplacer librement de part et d'autre de sa position d'équilibre. L'oscillateur est harmonique lorsque la force de rappel qui tend à le ramener vers sa position d'équilibre a une intensité proportionnelle au déplacement par rapport à celle-ci.

Si l'action des forces de frottement peut être négligée, l'oscillateur est non amorti, et l'amplitude des oscillations reste constante.

L'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique non amorti s'écrit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

où x est le déplacement algébrique du système par rapport à sa position d'équilibre. La solution de cette équation est sinusoïdale

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où A est l'amplitude des oscillations, ω_0 la pulsation et φ la phase à l'origine. Les constantes A et φ sont définies par les conditions initiales. La pulsation ω_0 s'exprime en $rad.s^{-1}$ en φ rad.

5.2 Période et fréquence

La période des oscillations s'écrit

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\ (s)\,.$$

La fréquence a pour expression

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}\ (Hz)\cdot$$

5.3Aspect énergétique

L'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti reste constante

$$E_m = E_c + E_p = E_0\,.$$