République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Cours d'Algèbre 4

Deuxième année Mathématiques Appliquées

Mme. ANZI Aicha

Année Universitaire 2019 – 2020

Avant-propos

Ce cours est destiné aux étudiants de $2^{ème}$ année Licence de Mathématiques Appliquées (Licence à programme nationale). Pour suivre ce cours, l'étudiant a besoin de connaître les notions de base d'algèbre vues aux semestres précédents de la formation (Algèbre 1, 2 et 3), en particulier, les notions d'espaces vectoriels, d'applications linéaires, de polynômes et de matrices.

L'objectif du cours étant une introduction à l'algèbre bilinéaire, son programme s'articule sur trois parties principales :

— **Formes linéaires et dualité** : cette partie est consacrée à l'étude des applications linéaires définies sur un espace vectoriel à valeurs dans un corps, c'est à dire des applications linéaires dont l'espace d'arrivée est de dimension 1.

— **Formes bilinéaires** : dans cette partie l'algèbre bilinéaire est abordée par l'introduction des formes bilinéaires. Des notions de base telles que la représentation matricielle, le rang, les noyaux d'une forme bilinéaire y sont présentées.

— **Formes quadratiques** : cette partie débute par l'étude des formes bilinéaires symétriques, ce qui permettra d'aborder les formes quadratiques comme formes équivalentes ainsi que toutes les notions de base (matrice, rang, noyau). Le but principal de cette partie étant la réduction des formes quadratiques, la méthode de Gauss pour la décomposition d'une forme quadratique en carrées de formes linéaires indépendantes est exposée.

— **Introduction à l'espace Hermitien** : ce chapitre est une brève introduction à des notions comparables aux formes bilinéaires et quadratiques sur l'espace des nombres complexes.

Chaque partie inclut des exemples illustratifs et se termine par une série d'exercices résolus pour permettre à l'étudiant de mieux comprendre les notions présentées, suivie d'une série d'exercices non résolus lui permettant de s'entraîner et de tester ses connaissances.

Table des matières

CHAPITRE 1

Formes linéaires et dualité

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre, on étudie les formes linéaires, cas particulier d'applications linéaires dont l'espace d'arrivée est de dimension 1. Dans toute la suite, on désigne par $\mathbb{K}$, un corps de scalaires ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Tous les espaces vectoriels sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I. Formes linéaires

Définition 1

On appelle forme linéaire définie sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, toute application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Une forme linéaire est donc une fonction $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$, qui satisfait

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y).$$

Exemples 1

1. Si $E = M_n(\mathbb{K})$ (espace des matrices d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$), alors la trace Tr, qui à une matrice $A = (a_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$, associe $Tr(A) = \sum a_{ii}$ est une forme linéaire sur E.
2. L'application nulle qui, à tout vecteur de E, associe le scalaire 0 dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E.
3. Soit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ est une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^2$.

II. Espace dual

Définition 2

On appelle espace dual de E, noté $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E.

Par conséquent, si φ_1 et φ_2 sont deux formes linéaires sur E; $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda\varphi_1 + \varphi_2$ est aussi une forme linéaire sur E.

Proposition 1

L'espace dual, E^*, de E, est de dimension finie et nous avons

$$\dim E^* = \dim E$$

Démonstration

Puisque une forme linéaire est une application linéaire, nous avons $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, l'ensemble des formes linéaires de E dans E^*, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ est lui-même un espace vectoriel. donc

$$\dim E^* = \dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E \times 1 = \dim E.$$

Exemple 2

Déterminer si les formes suivantes sont linéaires.

1. $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3$
2. $\beta(x) = \beta(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 1$
3. $\phi(x) = \phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + |x_3|$

En utilisant la définition (1), nous avons φ est une forme linéaire tandis que β et ϕ ne le sont pas.

III. Base duale

Rappelons qu'une base d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs telle que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille. Une application linéaire est donc déterminée de façon unique en fixant l'image de chaque vecteur de base de l'espace de départ. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, alors on peut lui associer une base $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^*, appelée base duale.

Proposition 2

Soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base d'un espace vectoriel E. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe une unique forme linéaire e_j^* telle que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : e_j^*(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases} \tag{1.1}$$

La forme e_j^* est la j^{eme} forme coordonnée par rapport à la base B, c-à-d $e_j^*(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_j$

Démonstration

Une forme linéaire de E dans K est entièrement déterminée par l'image de chaque vecteur de la base considérée de E. Ainsi, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ fixé, les n équations (1.1) (avec $i = \overline{1, n}$) définissent de façon unique la forme linéaire e_j^* et on a $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} & e_j^*\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_j e_j + \cdots + x_n e_n\right) \\ & = x_1 e_j^*(e_1) + x_2 e_j^*(e_2) + \cdots + x_j e_j^*\left(e_j\right) + \cdots + x_n e_j^*(e_n) \\ & = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_j \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 0 = x_j \end{aligned}$$

Théorème 3

Pour toute base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, il existe une unique base $B^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^* appelée **base duale** de B, telle que $\forall i, j \in (1, \ldots, n)$, $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$.

Démonstration

L'existence et l'unicité est assurée par la proposition précédente. Montrons que c'est une famille génératrice et libre. Donc pour montrer que $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est une base de l'espace dual E^*, il faut montrer que c'est une famille génératrice et libre.

La famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ *est génératrice :* soit $\varphi \in E^*$, $x \in E$. Nous avons donc $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Par linéarité :

$$\varphi(x) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n e_i^* \varphi(e_i)$$

D'où la forme linéaire φ est combinaison linéaires des formes (e_i^*), $i = \overline{1, n}$.

La famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ *est libre :* soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_1 e_1^* + \ldots + \alpha_i e_i^* + \ldots + \alpha_n e_n^* = 0$. Ceci implique que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $0 = (\alpha_1 e_1^* + \ldots + \alpha_n e_n^*) e_i = \alpha_i$. Ainsi la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est libre.

Exemple 3

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$, où

$$e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,0,-1)\ , e_3 = (0,1,1).$$

Déterminer la base de $\mathbb{R}^{3*}$ duale de $\{e_1, e_2, e_3\}$.
On a $e_1^*(e_1) = 1$, $e_1^*(e_2) = 0$, $e_1^*(e_3) = 0$.
Posons $e_1^*(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3 = e_1^*(e_1)x_1 + e_1^*(e_2)x_2 + e_1^*(e_3)x_3$ pour $x = (x_1, x_2, x_3)$. Nous avons donc

$$\begin{matrix} e_1^*(e_1) = 1 & & a+b+c=1 \\ e_1^*(e_2) = 0 & \Longleftrightarrow & a \quad\ -c = 0 \\ e_1^*(e_3) = 0 & & b+c = 0. \end{matrix}$$

En résolvant le dernier système, on obtient $a = 1,\ b = -1,\ c = 1$. Donc

$$e_1^*(x) = x_1 - x_2 + x_3.$$

En suivant le même raisonnement pour e_2^* et e_3^*, on obtient

$$e_2^*(x) = x_2 - x_3.$$

$$e_3^*(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3.$$

La base duale de $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc donnée par les formes linéaires e_1^*, e_2^*, e_3^* définies par le système

$$\begin{aligned} e_1^*(x) &= x_1 - x_2 + x_3 \\ e_2^*(x) &= x_2 - x_3 \\ e_3^*(x) &= -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

IV. Détermination pratique de la base duale

Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de E et sa base duale, $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de E^*. On se donne une base $\bar{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ de E et on cherche à déterminer sa base duale $\bar{B}^* = \{\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*\}$. Soit $M_{B\to\bar{B}}$ la matrice de passage de la base B à la base $\bar{B}$. La proposition suivante nous donne la relation entre $M_{B\to\bar{B}}$ et $M_{B^*\to\bar{B}^*}$, la matrice de passage de la base B^* à la base $\bar{B}^*$.

Proposition 4

Soient B et $\bar{B}$ deux bases de E, B^* et $\bar{B}^*$ leurs bases duales respectives. Alors

$$M_{B^*\to\bar{B}^*} = \left[(M_{B\to\bar{B}})^{-1}\right]^T. \tag{1.2}$$

La proposition précédente signifie que la matrice de passage de la base duale B^* à la base duale $\bar{B}^*$ est donnée par la transposée de l'inverse de la matrice de passage de B à $\bar{B}$.

Exemple 4

Reprenons l'exemple précédent. La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de M est donnée par

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition précédente, la base duale $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ est donc donnée par

$$e_1^* = (1, -1, 1),\ e_2^* = (0, 1, -1),\ e_3^* = (-1, 2, -1),$$

ce qui permet de retrouver le système linéaire

$$\begin{aligned} e_1^*(x) &= x_1 - x_2 + x_3 \\ e_2^*(x) &= x_2 - x_3 \\ e_3^*(x) &= -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

V. Noyau d'une forme linéaire

Définition 3

Soit φ une forme linéaire sur E. Le noyau de φ, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est la partie de E définie par

$$\ker\varphi = \{x \in E \ / \ \varphi(x) = 0\} \tag{1.3}$$

Le noyau de φ est dit hyperplan de E déterminé par φ.

Remarques.

- Si $\varphi(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ est une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors $\ker\varphi$ est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ vérifiant l'équation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.
- L'espace des solutions d'un système d'équations linéaires peut être vu comme une intersection d'hyperplans.

VI. Représentation matricielle

Convention : on représente les coordonnées d'un vecteur dans une base de E sous forme de vecteur colonne et on représente les coordonnées d'une forme linéaire dans une base de l'espace dual E^* sous forme de vecteur ligne.

Soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire, alors la matrice représentant φ dans cette base est une matrice ligne à n composantes : $\varphi(e_i) = a_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, n}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E,\ x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \Rightarrow \varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \ldots + x_n \varphi(e_n)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n,$$

qu'on peut écrire

$$\varphi(x) = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

VII. Indépendance des formes linéaires

Comme pour les vecteurs, une famille de formes linéaires $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est linéairement indépendante ou libre s'il n'existe pas une relation entre ces formes, c-à-d si

$$\alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_n \varphi_n = 0 \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Méthode : En pratique, pour déterminer si une famille de formes linéaires est libre, il suffit de la décomposer sur une base de l'espace dual E^* et former ensuite la matrice dont les lignes sont données par les vecteurs lignes associés à chacune des formes linéaires. La famille est linéairement indépendante si et seulement si le rang de cette matrice est égal à n.

Exemple 5

Soient les trois formes linéaires définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + x_2 \\ \varphi_2(x) &= x_2 + x_3 \\ \varphi_3(x) &= x_1 - x_3. \end{aligned}$$

La famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est elle libre?

Les coordonnées de ces formes linéaires dans la base canonique sont respectivement

$$(1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,-1).$$

(Ce sont les coefficients des x_i dans les φ_i).

la matrice représentant ces formes linéaires est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En mettant cette matrice sous la forme échelonnée (en utilisant la méthode du pivot, par exemple), on pourra déterminer son rang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice résultante possède deux ligne non nulles, le rang de M est donc égal à $2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Par conséquent, la famille n'est pas libre.

VIII. Exercices corrigés

Exercice 1.
Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1,1,1)=0,\ f(2,0,1)=1 \quad \text{et } f(1,2,3)=4$$

Donner une base du noyau de f.

Corrigé de l'exercice 1.

On sait que chaque forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de la forme $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$. Donc f est donnée par $f(x,y,z)=ax+by+cz$. On a

$$\begin{cases} f(1,1,1)=0 \\ f(2,0,1)=1 \\ f(1,2,3)=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0\ \ldots(1) \\ 2x+z=1\ \ldots(2) \\ x+2y+3z=4\ \ldots(3) \end{cases}$$

$(2)\Rightarrow z=-2x+1,\quad (1)\Rightarrow y=x-1$ et $(3)\Rightarrow x=-1$
Ainsi, $z=3$ et $y=2$. La forme linéaire est donc

$$f(x,y,z)=-x-2y+3z$$

Pour une base du noyau de f, on a $\operatorname{Ker} f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=0\right\}$

$$f(x,y,z)=0 \Longleftrightarrow -x-2y+3z=0 \Longleftrightarrow x=3z-2y.$$

Donc

$$\operatorname{Ker} f=\left\{(3z-2y,y,z)\right\}=\left\{y(-2,1,0)+z(3,0,1)\mid y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

D'où $\{v_1=(-2,1,0),v_2=(3,0,1)\}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker} f$. En remarquant que v_1 et v_2 sont libres, alors $\{v_1,v_2\}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 2.
Soient $f_1,f_2\in\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ définies par

$$f_1(x,y)=x+y \text{ et } f_2(x,y)=x-y$$

1. Montrer que $\left\{f_1,f_2\right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^{2*}$.

2. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base $\left\{f_1,f_2\right\}$:

$$g(x,y)=x,\ h(x,y)=x-3y.$$

Corrigé de l'exercice 2.

1. $\left\{f_1,f_2\right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^{2*}$. En effet, comme la famille est composée de 2 éléments (même dimension que $\mathbb{R}^{2*}$), il suffit de montrer que f_1 et f_2 sont indépendantes. Pour cela, soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\alpha f_1+\beta f_2=0\Rightarrow \alpha(x+y)+\beta(x-y)=0\Rightarrow x(\alpha+\beta)+y(\alpha-\beta)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0.$$

D'où la famille $\{f_1, f_2\}$ est libre et donc une base de $\mathbb{R}^{2*}$.
Une autre manière de répondre à cette question est d'écrire la matrice dont les lignes sont données par les vecteurs lignes associés aux formes linéaires f_1 et f_2. La famille est donc libre si la matrice associée est de rang égal à $2 = \dim \mathbb{R}^{2*}$.

2. • Pour $g(x, y) = x$ on a $f_1 + f_2 = 2x = 2g \Rightarrow g = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$.
• Pour $h(x, y) = x - 3y$, trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $h = \alpha f_1 + \beta f_2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$h(x, y) = \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) \Leftrightarrow x - 3y = \alpha(x + y) + \beta(x - y)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = -2, \quad \beta = 2.$$

Donc $h = -f_1 + 2f_2$.

Exercice 3.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, f_2^* = -e_1^* + 2e_3^* \text{ et } f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$$

Montrer que $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ est une base de E^* et déterminer la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de E dont elle est la base duale.

Corrigé de l'exercice 3.

Pour montrer que la famille $\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ est une base de E^*, il suffit de montrer qu'elle est libre. On peut procéder comme dans l'exercice 2. Sinon il faudra écrire la matrice représentant ces formes dans la base $\{e_i^*\}$ et prouver que son rang est égal à 3.
Soit M la matrice dont les vecteurs lignes sont les coordonnées des formes linéaires f_1^*, f_2^* et f_3^* dans la base $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad \det M = -13 \neq 0, \text{ d'où } rg(M) = 3.$$

Par conséquent, (e_1^*, e_2^*, e_3^*) est une famille libre, donc une base de E^*.

Soit $\{f_1, f_2, f_3\}$ la base de E dont la base $\{f_i^*\}$ est duale. Posons $f_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Nous obtenons le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1^*(f_1) = 1 \\ f_2^*(f_1) = 0 \\ f_3^*(f_1) = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a + b + c = 1 \ \ldots(1) \\ -a + 0b + 2c = 0 \ \ldots(2) \\ a + 3b + 0c = 0 \ \ldots(3) \end{array} \right.$$

$(2) \Rightarrow c = \frac{1}{2}a$, $(3) \Rightarrow b = -\frac{1}{3}a$.
$(1) \Rightarrow \frac{13}{6}a = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{13} \Rightarrow b = -\frac{2}{13}$, $c = \frac{3}{13}$.

En suivant la même démarche pour f_2 et f_3, on obtient finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \frac{6}{13}e_1 - \frac{2}{13}e_2 + \frac{3}{13}e_3 \\ f_2 = -\frac{3}{13}e_1 + \frac{1}{13}e_2 + \frac{5}{13}e_3 \\ f_3 = -\frac{2}{13}e_1 + \frac{5}{13}e_2 - \frac{1}{13}e_3. \end{array} \right.$$

On peut remarquer que les coordonnées des f_i exprimées dans la base $\{e_i\}$ sont les vecteurs colonnes de la matrice inverse de M

$$M^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

IX. Exercices non corrigés

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
I. Soient B et $\bar{B}$ deux bases de E, et M la matrice de passage de la base B à la base $\bar{B}$. On note B^* et $\bar{B}^*$ les bases duales des bases B et $\bar{B}$. Quelle est la matrice de passage de la base B^* à la base $\bar{B}^*$?

II. Supposons que $E = \mathbb{R}^3$ et soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E.

1. On considère les vecteurs

$$u_1 = (1,1,1); u_2 = (1,0,1); u_3 = (1,1,0).$$

- Montrer que $\bar{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^{3*}$.
- Donner les coordonnées des vecteurs de $\bar{B}^*$ dans B^*.

2. On considère les formes φ_1, φ_2 et $\varphi 3$ définies par

$$\varphi_1(x) = x_1 - x_2 + x_3$$
$$\varphi_2(x) = x_1 + x_2 - 2x_3$$
$$\varphi_3(x) = -4x_1 + x_2 + x_3$$

Montrer que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^{3*}$ et déterminer les coordonnées de sa base duale dans B.

Exercice 2.
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et considérons les formes linéaires $\varphi_j (0 \le j \le 3)$ sur E définies par

$$\forall P \in E, \quad \varphi_j(P) = P(j)$$

Montrer que la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* et déterminer la base dont elle est la duale.

Exercice 3.
Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$ définies par

$$\varphi_1(P) = P(1), \varphi_2(P) = P'(1), \varphi_3(P) = \int_0^1 P(t)\,dt$$

Montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]^*$ et déterminer la base dont elle est la duale.

CHAPITRE 2

Formes bilinéaires sur un espace vectoriel

Plan de ce chapitre

I. Formes bilinéaires

Définition 1

On appelle forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, toute application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant

1. $\forall x_1, x_2, y \in E;\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ b(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda b(x_1, y) + b(x_2, y)$ (linéaire à gauche)

2. $\forall x, y_1, y_2 \in E;\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ b(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda b(x, y_1) + b(x, y_2)$ (linéaire à droite)

Définition 2

La forme bilinéaire b est symétrique, si

$$\forall x, y \in E \quad b(x, y) = b(y, x)$$

Exemple 1

1. Sur $\mathbb{R}$, les formes bilinéaires sont de la forme $b(x,y) = axy$, avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$, noté $x^T y$ ou $\langle x, y\rangle$ et donné par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \quad \text{pour tout } \ x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

   est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.
3. Le produit matriciel de $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{K})$ qui, à (A, B), associe AB est une forme bilinéaire.

En revanche, les formes suivantes ne sont pas bilinéaires

1. $g(x,y) = -x_1^2 + y_1 y_2 + x_1 y_2$, sur $\mathbb{R}^2$.
2. $h(x,y) = x_1 + y_2 - y_3$, sur $\mathbb{R}^3$.

Remarques.

- Si b est bilinéaire sur E, alors $b(x, 0_E) = b(0_E, y) = 0$ avec 0_E est l'élément neutre de $(E, +)$. Ainsi, la forme $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$b(x,y) = 1$$

  n'est pas bilinéaire.
- L'ensemble des formes bilinéaires sur E, noté $\mathscr{B}(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. En effet, si b_1 et b_2 sont deux formes bilinéaires sur E et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$(b_1 + b_2)(x,y) = b_1(x,y) + b_2(x,y)$$

$$(\lambda b_1)(x,y) = \lambda b_1(x,y)$$

Exemple 2

Déterminer si les formes suivantes sont bilinéaires/bilinéaires symétriques

1. $b : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, b(x,y) = x + y$
2. $b : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \forall x = (x_1, x_2), y = \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{K}^2\ b(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_2$
3. $b : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \forall x = (x_1, x_2), y = \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{K}^2\ b(x,y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$
4. $b : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \forall x = (x_1, x_2), y = \left(y_1, y_2\right) \in \mathbb{K}^2\ b(x,y) = x_1 + y_2 + x_2 y_2$.

En appliquant les définitions 1 et 2, il en résulte que la première et la quatrième forme ne sont pas bilinéaires, la deuxième est bilinéaire alors que la troisième est bilinéaire symétrique.

Dans les exemples précédents, nous avons reconnu les formes bilinéaires en utilisant la définition. Toutefois, il existe un moyen plus direct pour le faire. Il s'agit de l'expression algébrique d'une forme bilinéaire. Nous allons voir dans la suite qu'une forme bilinéaire s'exprime sous la forme d'une somme dont les termes ne contiennent que des produits mixtes $x_i y_i$ avec des coefficients dans $\mathbb{K}$.

II. Représentation matricielle

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et b une forme bilinéaire sur E. La matrice carrée d'ordre n, $M = (m_{ij}) = b(e_i, e_j)$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ est appelée la matrice de b dans la base B. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux éléments de E, alors

$$b(x,y) = b\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j b(e_i, e_j).$$

Avec la notation de la matrice M ci-dessus, on obtient

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i m_{ij} y_j = x^T M y$$

Réciproquement, à une matrice carrée d'ordre n, $M \in M_n(\mathbb{K})$, on peut associer une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^n$. Nous avons

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x^T M y \\ &= (x_1, \dots, x_n)^T \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= m_{11} x_1 y_1 + m_{12} x_1 y_2 + \dots + m_{nn} x_n y_n. \end{aligned}$$

Il est clair qu'une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice associée est symétrique.

Exemple 3

1. La matrice associée à la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$

   $$f(x,y) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2$$

   est $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   Dans ce cas, f est symétrique si $c = b$.
2. La matrice associée au produit scalaire est la matrice identité.

III. Changement de base

Soit $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ deux bases de E et P la matrice de passage $e_i \to e'_i$. Soit X le vecteur des coordonnées de x dans $\{e_i\}$ et X' le vecteur des coordonnées de x dans $\{e'_i\}$. De même, soit

Y le vecteur des coordonnées de y dans $\{e_i\}$ et Y' le vecteur des coordonnées de y dans $\{e'_i\}$, nous avons alors

$$X = PX', \text{ et } Y = PY'. \tag{2.1}$$

Soit $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ de matrice M dans la base $\{e_i\}$. Sa matrice dans la base $\{e'_i\}$ est donc donnée par la formule

$$M' = P^T MP \tag{2.2}$$

En effet, en utilisant (2.1) nous avons

$$b(x, y) = X^T MY = (PX')^T MPY' = (X')^T (P^T MP)Y' = (X')^T M'Y'$$

Les deux matrices M et M' liées par la formule (2.2) sont dites **congruentes**.

Exemple 4

Donner la matrice associée à la forme bilinéaire b définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$b(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_3$$

Soit $\{v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (0, 1, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
Calculer la matrice associée à b dans cette base de deux manières différentes.

La matrice de b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice $M^{'}$ de b dans la nouvelle base peut se calculer de deux manières :
1. Méthode directe : calculer tous les éléments $m^{'}_{ij}$ de M' un par un

$$\begin{aligned}
m^{'}_{11} &= b(v_1, v_1) = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 1 \\
m^{'}_{12} &= b(v_1, v_2) = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times 0 = -1 \\
m^{'}_{13} &= b(v_1, v_2) = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 1
\end{aligned}$$

De la même manière nous obtenons le reste de la matrice.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Méthode indirecte : on utilise la formule de passage (2.2). La matrice P de passage à la nouvelle base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}
P^T MP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M'
\end{aligned}$$

IV. Noyau et rang d'une forme bilinéaire

Définition 3

On appelle noyau de la forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E, l'ensemble défini par

$$\ker b = \left\{ y \in E \ / \ b(x, y) = 0, \forall x \in E \right\} \tag{2.3}$$

Définition 4

Une forme bilinéaire b est dite **non dégénérée** ou **régulière** si son noyau est réduit au vecteur nul, c-à-d $\ker b = \{0_E\}$.

Remarque. On peut définir le noyau de la forme bilinéaire b comme suit

$$\ker b = \left\{ x \in E \ / \ b(x, y) = 0, \forall y \in E \right\}. \tag{2.4}$$

Le noyau défini par (2.3) est alors dit noyau **à droite** de b et celui défini par (2.4) est dit noyau **à gauche** de b.

Exemple 5

1. La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $b(x, y) = x_1 y_1$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme noyau l'ensemble des vecteurs dont la première composante est nulle, c-à-d

$$\ker b = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x = 0 \right\} = \left\{ a(0, 1), a \in \mathbb{R} \right\}.$$

   b est donc dégénérée
2. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une forme bilinéaire non dégénérée. Sa matrice étant l'identité, son noyau est réduit à $\{0\}$.

Définition 5

On appelle rang d'une forme bilinéaire b définie sur un espace vectoriel E de dimension finie n, noté $rg(b)$ le rang de sa matrice associée M. La forme est non dégénérée si son rang est maximal, c-à-d. si $rg(b) = n = \dim E$.

Exemple 6

1. Soit la forme bilinéaire $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie dans la base canonique par :

$$b(x,y) = x_1y_1 - 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_2 - 3x_2y_3.$$

Sa matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.
Nous avons $det(M) = 0$ donc $rg(M) < 3$ et b est dégénérée.

2. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est non dégénéré ; sa matrice $M = I_n$ est de rang $n = dim\mathbb{R}^n$.

V. Produit scalaire

Dans ce qui suit, nous posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 6

On appelle produit scalaire sur E espace vectoriel réel, noté $\langle .,. \rangle$, toute forme bilinéaire symétrique et définie positive, c-à-d.

(i) $\langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0 \; \forall x \in E$

(ii) $\langle x, x \rangle > 0 \; \forall x \in E$.

Définition 7

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace euclidien**.

Exemple 7

1. Le produit scalaire défini sur $E = \mathbb{R}^n$ par

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

est appelé produit scalaire canonique.

2. $\langle A, B \rangle = Tr(A^TB)$, sur $M_2(\mathbb{R})$ est un produit scalaire. En effet, si $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, alors

$$\langle A, B \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

qui est bilinéaire, symétrique et définie positive.
Plus généralement, sur $M_n(\mathbb{R})$, si $A = (x_{ij})$ et $B = (y_{ij})$, le produit scalaire canonique est défini par

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{ij}$$

Proposition 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a
$$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2. \tag{2.5}$$
L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont liés.

Démonstration

Si $x = 0$, la relation (2.5) est vérifiée.

Supposons que $x \neq 0$ et $P(\lambda) = \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle$. Comme le produit scalaire est positif, on a $P(\lambda) > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$P(\lambda) = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Donc $P(\lambda)$ est un polynôme de second degré en λ. Comme il est toujours positif, son discriminant est négatif
$$\Delta = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$
ce qui implique
$$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$
L'égalité dans la relation (2.5) signifie $\Delta = 0$

$$P(\lambda) = \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle = 0.$$

Ce qui implique, puisque le produit scalaire est défini,

$$\lambda x + y = 0$$

Par conséquent, x, y sont liés.

VI. Exercices corrigés

Exercice 1.
Déterminer la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 1.

$$\begin{aligned} b(x,y) &= (x_1, x_2, x_3)^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2 + 4x_3y_2 + 3x_1y_3 + 4x_2y_3 + 5x_3y_3 \end{aligned}$$

D'où

$$b(x,y) = x_1y_1 + 4x_1y_2 + 6x_1y_3 + 3x_2y_2 + 8x_2y_3 + 5x_3y_3$$

Exercice 2.
Soit les deux formes bilinéaires suivantes

- $f(x,y) = x_1y_2 + x_2\left(-y_1 + y_3\right) - x_3y_2$, sur $E = \mathbb{R}^3$;
- $\varphi(x,y) = x_1y_2 - y_1x_2 + x_3y_4 - y_3x_4$, sur $E = \mathbb{R}^4$.

1. Expliciter les matrices de ces formes bilinéaires.

2. Calculer le rang de chacune d'elles.

Corrigé de l'exercice 2.

Pour calculer les éléments de la matrice de f, $M_f = a_{ij}$, on peut appliquer la relation $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, ou faire directement comme suit :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x_1y_2 + x_2\left(-y_1 + y_3\right) - x_3y_2 = x_1\left(0y_1 + y_2 + 0y_3\right) + x_2\left(-y_1 + 0y_2 + y_3\right) + x_3\left(0y_1 - y_2 + 0y_3\right) \\ &= (x_1, x_2, x_3)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la matrice de f est $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le rang de f est égal au rang de sa matrice. Nous avons $\det(M_f) = 0$, d'où $rg(M_f) < 3$. La sous matrice d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

extraite de M_f est de rang égal à 2 (son déterminant est -1). D'où f est de rang égal à 2.

En suivant la même démarche, la matrice de φ, M_φ, est donnée par

$$\varphi(x,y) = x_1y_2 - y_1x_2 + x_3y_4 - y_3x_4 = x_1\left(0y_1 + y_2 + 0y_3 + 0y_4\right) + x_2\left(-y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4\right)$$

$$+x_3\left(0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + y_4\right) + x_4\left(0y_1 + 0y_2 - y_3 + 0y_4\right)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

D'où la matrice de φ est $M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous avons $\det(M_\varphi) = 1 \neq 0$. Donc $rg(M_\varphi) = 4$.

Remarque : En appliquant la méthode de pivot de Gauss (permuter (L_1, L_2) et (L_3, L_4)), on obtient la matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui ne contient aucune ligne nulle, d'où son rang est égal à 4.

Exercice 3.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note f la forme bilinéaire sur E (dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de E) :

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1$$

1. Vérifier que f est symétrique. Donner la matrice de f dans la base B.
2. On pose $e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + e_2, e'_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$. Montrez que $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de E.
3. Quelle est la matrice de f dans la base B'? En déduire que f est définie-positive; que peut on conclure?

Corrigé de l'exercice 3.

1. La matrice de f est donnée par $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. M_f est une matrice symétrique, donc f est symétrique.

2. B' étant constituée de 3 éléments, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soit M la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des e'_i dans la base canonique

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det(M) = 1 \neq 0$. Donc la famille B' est une base de E.

3. La matrice de passage de B à B' est donnée par M, donc la matrice de la forme f dans la base B' est donnée par

$$M'_f = P^T M_f P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Nous avons donc une forme bilinéaire dont la matrice associée est l'identité $f(x, y) = X' I_3 Y' = \langle X', Y' \rangle$, pour tout $x = x_1 e_1^{'} + x_2 e_2^{'} + x_3 e_3^{'}$ et $y = y_1 e_1^{'} + y_2 e_2^{'} + y_3 e_3^{'}$, avec

$$X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } Y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{ sont les coordonnées de } x \text{ et } y \text{ dans } B'$$

f définit alors un produit scalaire sur E, donc une forme définie positive.

VII. Exercices non corrigés

Exercice 1.
Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer les formes bilinéaires associées aux matrices ci-dessus dans les bases canoniques.

Exercice 2.
Soit la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}^4$, par

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3.$$

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. Ecrire la matrice de b dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3.
Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Exercice 4.
Soit $x_1,\dots,x_n \geq 0$ tels que $x_1+\dots+x_n = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$$

Exercice 5.
Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P, Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$$

1. Montrer que φ est un forme bilinéaire symétrique, et donner sa matrice A dans la base canonique β de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Considérons la famille $\beta' = \left\{1 - x^2, x, x^2\right\}$

a) Montrer que β est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer la matrice de φ dans cette base

c) Déduire l'expression de φ et sa forme quadratique q dans cette base

d) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 0\}$

a) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer une base de F

b) Déterminer l'orthogonal de F relativement à φ

CHAPITRE 3

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Plan de ce chapitre

I. Introduction

Les formes bilinéaires et les formes quadratiques qui lui sont associées jouent un rôle important dans presque tous les domaines de mathématiques tels que les probabilités, les statistiques, l'optimisation, ...etc. Dans ce chapitre, nous étudions leurs aspects algébriques élémentaires. Pour cela, nous commençons par donner quelques propriétés de base des formes bilinéaires symétriques.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $b \in \mathscr{B}(E,\mathbb{K})$ (espace des formes bilinéaires sur E).

Définition 1

i) b est **symétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ b(x, y) = b(y, x)$.

ii) b est **antisymétrique** si $\forall (x, y) \in E^2,\ b(x, y) = -b(y, x)$.

Une forme $b \in \mathscr{B}(E,\mathbb{K})$ est antisymétrique, si et seulement si $b(x, x) = 0,\ \forall x \in E$.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une forme bilinéaire symétrique. Comme exemple de forme bilinéaire antisymétrique, nous avons le déterminant des vecteurs colonnes X et Y défini sur $E = \mathbb{K}^2$ par $x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Définition 2 (Orthogonalité ou conjugaison)

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E. Deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** ou **conjugués** par rapport à b si $b(x, y) = 0$. Une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite b-conjuguée, si pour tout i, j $i \neq j$, on a $b(e_i, e_j) = 0$.

Définition 3

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $b \in \mathscr{B}(E, \mathbb{K})$. On appelle **orthogonal** de F pour b le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^{\perp} = \{x \in E \ / \ \forall y \in F,\ b(x, y) = 0\}.$$

Définition 4 (Vecteurs isotropes, Cône isotrope)

Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel et b une forme bilinéaire symétrique sur E. Un vecteur $x \in E$ est dit **isotrope** pour b si $b(x, x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes pour b est appelé **cône isotrope**. La forme b est dite **définie** si son cône isotrope est réduit au vecteur nul.

Remarque. Tout vecteur de $\ker b$ est donc isotrope et si b est définie, alors elle est non dégénérée. La réciproque n'est pas vrai.

II. Formes quadratiques

Une forme quadratique sur un espace vectoriel E est une application qui, à un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, associe une fonction polynômiale homogène de degré 2 en x_i. C'est ainsi qu'une forme quadratique a été d'abord définie. Elle peut être définie, également, comme associée à une forme bilinéaire symétrique. C'est l'objet de cette partie.

Définition 5

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E. On appelle forme quadratique associée à b, l'application

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longrightarrow q(x) = b(x, x) \end{aligned}$$

Soit A une matrice symétrique d'ordre n. Un exemple typique de forme quadratique est l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui, à x, associe $x^T Ax$.

Propriétés 1.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique si et seulement si

1. Pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons

$$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$$

En particulier, $q(-x) = q(x)$

2. Pour tous $x, y \in E$, nous avons

$$b(x, y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$$

Les deux formes b et q sont équivalentes. En effet, si b est une forme bilinéaire symétrique sur E, il est facile de vérifier que $b(x, x) = q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les x_i, pour tout $x \in E$. Réciproquement, à toute forme quadratique q est associée une unique forme bilinéaire symétrique b telle que $q(x) = h(x, x)$. Il suffit, pour cela, d'appliquer la règle dite de dédoublement (appelée aussi identité de polarisation)

— A tout terme $a_{ii}x_i^2$ on associe $a_{ii}x_i y_i$.

— A tout terme $a_{ij}x_i x_j$, $i \neq j$, on associe $\frac{1}{2}(a_{ij}x_i y_j + a_{ji}x_j y_i)$.

Ainsi, il est montré que b est parfaitement déterminée par la connaissance de q.

Théorème 1

Soit q une forme quadratique sur E. Il existe alors une et une seule forme bilinéaire symétrique b sur E telle que $b(x, x) = q(x)$, dite forme **polaire** de q et donnée par

$$b(x, y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right].$$

Exemple 1

1. Sur $E = \mathbb{K}$, la plus simple forme quadratique est $x \longrightarrow x^2$.
2. Le carré d'une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$- espace vectoriel E est une forme quadratique. Soit $\phi \in E^*$. L'application $x \longrightarrow (\phi(x))^2$ est une forme quadratique de forme polaire $(x, y) \longrightarrow \phi(x)\phi(y)$.
3. Le produit de formes linéaires est une forme quadratique. Soient ϕ_1, $\phi_2 \in E^*$. L'application $x \longrightarrow \phi_1(x)\phi_2(x)$ est une forme quadratique de forme polaire $(x, y) \longrightarrow \phi(x)\phi(y)$.
4. La forme $A \longrightarrow Tr(A^2)$ définie de $E = M_n(\mathbb{K})$ dans $E = \mathbb{K}$ est une forme quadratique.

III. Expression d'une forme quadratique dans une base

Soit $\{e_i\}$ une base de E, b une forme bilinéaire symétrique sur E et q sa forme quadratique associée. Si pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, on a $b(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, alors

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

IV. Rang, noyau et vecteurs isotropes d'une forme quadratique

Les définitions sur les formes bilinéaires symétriques restent valables pour les formes quadratiques grâce à l'équivalence entre les deux.

Définition 6

On appelle rang, noyau et matrice associée d'une forme quadratique q le rang, le noyau et la matrice associée à sa forme polaire (la forme bilinéaire associée à q).

Définition 7

Si q est une forme quadratique à valeurs réelles, elle est définie si sa forme polaire est définie, i.e.

$$q(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Dans ce cas q est nécessairement non dégénérée.

Définition 8

On appelle vecteur isotrope pour la forme quadratique q, tout vecteur $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. L'ensemble de tous les vecteurs isotropes

$$C(q) = \{x \in E \ / \ q(x) = 0\}$$

est appelé cône isotrope.

Remarque.

1. Ne pas confondre le cône isotrope $C(q)$ avec le noyau de q qui lui est défini par

$$\ker q = \{x \in E \ / \ b(x,y) = 0, \ \forall y \in E\}$$

2. Une forme quadratique est non dégénérée si son noyau est réduit au vecteur nul. Elle est définie si son cône isotrope est réduit au vecteur nul.

Exemple 2

La forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x) = q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Elle est non dégénérée car son noyau est réduit à 0. Mais non définie car son cône isotrope est donné par

$$C(q) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 = x_2^2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 = \mp x_2\right\} \neq \{0\}$$

Donc la réunion des deux droites d'équations $x_1 = x_2$ et $x_1 = -x_2$

V. Décomposition en carrés

Nous étudions dans ce qui suit le problème de réduction des formes quadratiques, c'est à dire comment en simplifier l'écriture en utilisant une base convenable dite orthogonale. Ce problème revient à trouver une base dans laquelle la matrice d'une forme quadratique q est diagonale, ce qui signifie exprimer q sous forme d'une somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Définition 9

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E et b sa forme polaire. Une base $\{e_i\}$ est dite **orthogonale** pour q si $b(e_i, e_j) = 0,\ \forall i \neq j$. Elle est dite **orthonormée** si, de plus d'être orthogonale, nous avons $b(e_i, e_j) = 1,\ \forall i = j$.

Remarque. Une base est orthogonale pour une forme quadratique q si sa matrice dans cette base est diagonale de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \text{ où } a_i = b(e_i, e_i).$$

Donc, $q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Le rang de q étant égal au rang de sa matrice, donc au nombre de a_i non nuls.

Une base est orthonormée si la matrice associée à q est égale à l'identité. D'où

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Notons que s'il existe une base orthonormée, alors q est de rang n donc non dégénérée. En particulier, si q est à valeurs réelles alors il existe une base orthonormée si et seulement si q est définie positive.

Les deux résultats suivants montrent qu'une forme quadratique peut toujours s'exprimer sous forme diagonale comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Théorème 2 (Existence des bases orthogonales)

Toute forme quadratique q sur un espace vectoriel E admet au moins une base orthogonale.

Théorème 3

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors il existe des formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in E^*$ et des constantes non nulles $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$ telles que

$$q(x) = a_1\varphi_1^2 + \ldots + a_r\varphi_r^2.$$

Dans toute décomposition de ce type, le nombre r de formes linéaires (linéairement indépendantes) est égal au rang de la forme quadratique q.

Nous allons décrire dans ce qui suit un algorithme qui permet d'effectuer cette décomposition pour une forme quadratique.

V. 1. Méthode de Gauss

Soient $q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j,\ x = (x_1, \ldots, x_n)$ une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$. Introduisons d'abord la notation suivante :

- Les termes en x_i^2 sont dits **termes carrés**.
- Les termes en $x_ix_j,\ i \neq j$ sont dits **termes rectangles**.

L'algorithme de Gauss permet alors de décomposer q en combinaison de carrés de formes linéaires indépendantes en procédant par récurrence et en distinguant deux cas.

Premier cas : q contient au moins un terme carré. Supposons qu'il s'agit de x_1^2 ($a_{11} = a \neq 0$). Alors

$$q(x_1, \ldots, x_n) = ax_1^2 + x_1\varphi(x_2, \ldots, x_n) + Q(x_2, \ldots, x_n),$$

où φ est une forme linéaire et Q une forme quadratique en les $x_2, \ldots, x_n$. Donc

$$q = a\big(x_1 + \frac{1}{2a}\varphi\big)^2 + Q - \frac{1}{4a}\varphi^2.$$

$x_1 + \frac{1}{2a}\varphi$ est une forme linéaire et

$$q^{'}(x_2, \ldots, x_n) = Q(x_2, \ldots, x_n) - \frac{1}{a}\varphi^2(x_2, \ldots, x_n)$$

est une forme quadratique ne dépendant plus de x_1 et à laquelle on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Deuxième cas : q ne contient aucun terme carré sans qu'elle ne soit nulle. Elle contient donc au moins un terme rectangle. Supposons qu'il s'agit de x_1x_2 $(a_{12} = a \neq 0)$. Alors

$$q(x_1, \ldots, x_n) = ax_1x_2 + x_1\varphi(x_3, \ldots, x_n) + x_2\phi(x_3, \ldots, x_n) + Q(x_3, \ldots, x_n),$$

où φ et ϕ sont des formes linéaires et Q une forme quadratique en $x_3, \ldots, x_n$. Donc

$$\begin{aligned} q &= a\underbrace{(x_1 + \frac{1}{a}\phi)}_{l_1}\underbrace{(x_2 + \frac{1}{a}\varphi)}_{l_2} + \underbrace{Q - \frac{1}{a}\varphi\phi}_{q'}. \\ &= \frac{a}{4}\big((l_1 + l_2)^2 - (l_1 - l_2)^2\big) + q'. \end{aligned}$$

l_1 et l_2 sont des formes linéaires et q' est une forme quadratique ne dépendant plus de x_1 et x_2 et à laquelle on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.
Dans les deux cas, l'algorithme de Gauss permet de décomposer q en carrés dont le résultat est

$$q(x) = a_1\varphi_1^2(x) + \ldots + a_r\varphi_r^2(x),$$

avec $a_1, \ldots, a_r$ des constantes non nuls de $\mathbb{K}$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ des formes linéaires linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}^n$. On peut alors compléter cette famille libre en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n)$ de $(\mathbb{K}^n)^*$. Sa base duale $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est une base composée de vecteurs q-conjugués (c'est une base orthogonale) dans laquelle la matrice de q est diagonale

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons voir maintenant des exemples pour mieux comprendre l'algorithme de Gauss.

Exemple 3

Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique qui s'écrit dans la base canonique :

$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

q ne contient aucun terme carré, on choisit donc un terme rectangle non nul. Par exemple x_1x_2.

$$q(x) = x_1x_2 + x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4$$

$$q(x) = (x_1 + x_3 + x_4) + (x_2 + x_3 + x_4) - (x_3 + x_4)^2 + x_3x_4$$

En utilisant la règle $\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{4}\left[(\varphi_1 + \varphi_2)^2 - (\varphi_1 - \varphi_2)^2\right]$, on obtient

$$q(x) = \frac{1}{4}\left[(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)^2 + (x_1 - x_2)^2\right] - x_3^2 - x_4^2 - x_3x_4$$

$$q(x) = \frac{1}{4}\left[(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)^2 + (x_1 - x_2)^2\right] - (x_3 - \frac{1}{2}x_4)^2 - \frac{3}{4}x_4^2.$$

Exemple 4

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\{e_i\}$ la base canonique, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ et :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$$

Considérons un terme carré, par exemple x_1^2.

– On ordonne suivant la variable x_1

$$q(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2}_{\text{termes avec } x_1} + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

– On écrit les termes contenant x_1 comme début d'un carré

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 \quad \underbrace{-x_2^2}_{\text{terme correctif}} \quad + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

– On obtient le carré d'une forme linéaire plus des termes ne contenant pas x_1

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3}_{\text{termes sans } x_1}$$

– On recommence l'opération avec les termes ne contenant pas x_1

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 + x_2)^2 + \underbrace{x_2^2 - 4x_2x_3}_{\text{termes avec } x_2} + 5x_3^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 \quad \underbrace{-4x_3^2}_{\text{terme correctif}} \quad + 5x_3^2 \end{aligned}$$

– Jusqu'à obtention d'une somme de carrés de formes linéaires

$$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$$

V. 2. Classification des formes quadratiques

Définition 10

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E. On dit que q est **semi définie positive** (resp. **semi définie négative**) si, $\forall x \in E$ $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$). On dit que q est **définie positive** (resp. **définie négative**) si, $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $q(x) > 0$ (resp. $q(x) < 0$).

Proposition 4

Si q est une forme quadratique définie, alors q est soit définie positive ou définie négative.

Théorème 5 (Théorème d'inertie de Sylvester)

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et soit q une forme quadratique sur E. Il existe alors une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que, pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2,$$

où $r = rg(q)$ et $p \geq 0$ ne dépend que de la forme quadratique et non pas de la base. Le couple $(p, r-p)$ est alors appelé **signature** de q et noté $\text{sign}(q)$.

La signature d'une forme quadratique réelle peut être interpréter de la façon suivante : p est la plus grande des dimensions d'un sous espace vectoriel de E où q est définie positive et $r-p$ est la plus grande des dimensions d'un sous espace vectoriel de E où q est définie négative.

Corollaire 1

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E de dimension finie n. Alors

$$q \text{ est definie positive} \Longleftrightarrow \text{sign}(q) = (n, 0)$$

$$q \text{ est definie négative} \Longleftrightarrow \text{sign}(q) = (0, n)$$

$$q \text{ est non dégénérée} \Longleftrightarrow \text{sign}(q) = (p, n-p)$$

Exemple 5

1. Déterminer la signature de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique, par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3,$$

et déduire sa nature.

En appliquant la méthode de Gauss on trouve :

$$\begin{aligned} q(x) &= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2 - x_3)^2 + 8x_3^2 \\ &= x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2 \end{aligned}$$

(avec $x_1' = x_1 - 2x_2 + 3x_3, x_2' = \sqrt{2}(x_2 - x_3), x_3' = \sqrt{8}x_3$). Donc : $\text{sign}(q) = (2, 1)$. D'après le corollaire 1, q est non dégénérée.

2. Dans l'exemple 3, $\text{sign}(q) = (3, 0)$. Donc q est définie positive.

VI. Exercices corrigés

Exercice 1.
Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

1. Pourquoi q est une forme quadratique ?

2. Quelle est sa forme polaire ? sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

3. Décomposer q en carrés de formes linéaires et donner sa signature et son rang.

Corrigé de l'exercice 1.

1. q est un polynôme homogène de degré 2 en x_1, x_2, x_3, x_4. C'est donc bien une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$.

2. La forme polaire b de q est définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^4, \quad b(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}.$$

On trouve pour tout $x, y \in \mathbb{R}^4$

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\left[x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_2y_4 + x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3\right].$$

Sa matrice est $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & \frac12 & 0 \end{pmatrix}$.

3. q ne contient que des termes rectangles. On choisit, par exemple x_1x_2

$$q(x) = x_1x_2 + x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4$$
$$q(x) = (x_1 + x_3 + x_4)(x_2 + x_3 + x_4) - (x_3 + x_4)^2 + x_3x_4$$

D'où, en utilisant l'égalité $ab = \frac14\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$:

$$q(x) = \tfrac14(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)^2 - \tfrac14(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 - x_3x_4 - x_4^2$$
$$q(x) = \tfrac14(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)^2 - \tfrac14(x_1 - x_2)^2 - \left(x_3 + \tfrac12 x_4\right)^2 - \tfrac34 x_4^2$$

La forme q est donc de rang 4, par conséquent elle n'est pas dégénérée. Sa signature est $(1,3)$.

Exercice 2.
Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x) = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 5x_3^2 + 4x_3x_4 + 8x_4^2$$

1. Déterminer le noyau de q.

2. Donner une décomposition en carrés de q ; en déduire son rang et sa signature. La forme q est-elle dégénérée ?

3. Déterminer les vecteurs isotropes de q.

Corrigé de l'exercice 2.

1. Le noyau de q est défini par

$$\ker q = \left\{x \in \mathbb{R}^4 | b(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^4\right\}$$

où b est la forme polaire de q. Soit $M = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Le noyau de q sera donc donné par

$$\ker q = \left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | Mx = 0\right\}.$$

On résout le système $Mx = 0$

$$\begin{cases} 9x_1 = 0 \\ 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -x_2 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

D'où

$$\ker q = \left\{x = x_4(0, 2, -1, 1) | x_4 \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Dans l'expression de $q(x)$ la variable x_1 n'intervient que par le terme $9x_1^2$, on peut donc écrire $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9x_1^2 + q_1(x_2, x_3, x_4)$$

où q_1 est une forme quadratique que nous allons décomposer en carrés.

$$q_1(x_2, x_3, x_4) = 5x_2^2 + 4(2x_3 - x_4)x_2 + 5x_3^2 + 4x_3x_4 + 8x_4^2$$

$$q_1(x_2, x_3, x_4) = 5\left[x_2 + \frac{2}{5}(2x_3 - x_4)\right]^2 - \frac{4}{5}(2x_3 - x_4)^2 + 5x_3^2 + 4x_3x_4 + 8x_4^2$$

On obtient : $q_1(x_2, x_3, x_4) = 5\left(x_2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}x_3^2 + \frac{36}{5}x_3x_4 + \frac{36}{5}x_4^2$

D'où

$$q_1(x_2, x_3, x_4) = 5\left(x_2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}(x_3 + 2x_4)^2$$

Finalement, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$, on a :

$$q(x) = 9x_1^2 + 5\left(x_2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4\right)^2 + \frac{9}{5}(x_3 + 2x_4)^2$$

Donc q est combinaison de 3 formes linéaires indépendantes; sa signature sign(q) = (3,0) et son rang $rg(q) = 3$. Comme les 3 coefficients sont positifs, q est définie positive, mais dégénérée car son rang $rg(q) \neq 4$.

3. Les vecteurs isotropes ou le cône isotrope de q est défini par $C(q) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid q(x) = 0\}$. Comme q est définie positive, en utilisant la décomposition de la question précédente,

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

Donc

$$C(q) = \{x = x_4(0,2,-1,1) | x_4 \in \mathbb{R}\}$$

On remarque que ker(q) = $C(q)$ car q est définie positive.

Exercice 3.
Soit q_α la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q_\alpha(x) = x_1^2 + (1+\alpha)x_2^2 + \left(1+\alpha+\alpha^2\right)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\alpha x_2x_3, \ \forall x \in \mathbb{R}^3$$

1. Donner la matrice M de q_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et calculer son déterminant.
2. Pour quelles valeurs de α la forme est elle non dégénérée?
3. Donner, en fonction de α, la signature et le rang de q_α.

Corrigé de l'exercice 3.

1. La matrice de q_α est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1+\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

2. $\det(q_\alpha) = \alpha(1+\alpha^2)$. q_α est non dégénérée si et seulement si $rg(M) = 3$, c-à-d. $\det(q_\alpha) \neq 0$. D'où q_α est non dégénérée si et seulement si $\alpha \neq 0$.

3. Décomposons q_α en carrées de formes linéaires

$$\begin{aligned} q_\alpha(x) &= x_1^2 + (1+\alpha)x_2^2 + \left(1+\alpha+\alpha^2\right)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\alpha x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2)^2 - x_2^2 + (1+\alpha)x_2^2 - 2\alpha x_2x_3 + \left(1+\alpha+\alpha^2\right)x_3^2 \\ &= (x_1+x_2)^2 + \alpha\,(x_2-x_3)^2 - \alpha x_3^2 + \left(1+\alpha+\alpha^2\right)x_3^2 \\ &= (x_1+x_2)^2 + \alpha\,(x_2-x_3)^2 + \left(1+\alpha^2\right)x_3^2 \end{aligned}$$

On obtient alors

1. Si $\alpha < 0$, alors $\text{sign}(q_\alpha) = (2,1)$ et $rg(q_\alpha) = 3$
2. Si $\alpha = 0$, alors $\text{sign}(q_\alpha) = (2,0)$ et $rg(q_\alpha) = 2$ (dégénérée)
3. Si $\alpha > 0$, alors $\text{sign}(q_\alpha) = (3,0)$ et $rg(q_\alpha) = 3$

VII. Exercices non corrigés

Exercice 1.
On considère l'espace vectoriel défini par

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ ; \ a = d \right\}$$

et la forme $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $M, N \in M_2(\mathbb{R})$, par

$$b(M,N) = Tr(MJN),$$

avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que b est une forme bilinéaire. Est elle symétrique ?

2. Montrer que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de E.

3. Déterminer la matrice de la forme quadratique q ($q(M) = b(M,M)$, $\forall M \in M_2(\mathbb{R})$) associée à b dans la base B.

4. Déterminer la signature de q, son rang et sa nature et son noyau.

Exercice 2.
Décomposer les formes quadratiques suivantes en carrés de formes linéaires indépendantes en utilisant l'algorithme de Gauss

- $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_4t^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$
- $q_2(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3.$
- $q_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - ax_3^2 + 3x_1x_2 - bx_1x_3 + x_2x_3.$
- $q_4(x) = x_1^2 + (1+2a-b)x_2^2 + (1+a)x_3^2 + (1+2a+b)x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2(1-a)x_2x_3 - 2(1+a)x_2x_4 + 2(a-1)x_3x_4.$

Avec $a,\ b \in \mathbb{R}$.

1. Pour les formes q_1 et q_2, déterminer le noyau, le rang et la signature.

2. Pour les formes q_3 et q_4, discuter selon les valeurs des réels a et b, le noyau, le rang et la signature.

Exercice 3.
Soit M la matrice associée la forme bilinéaire b_M définie sur $\mathbb{R}^3$.

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la forme bilinéaire b_M associée à M.

2. Déterminer la forme quadratique q_M associée à b_M.

3. Réduire q_M en utilisant l'algorithme de Gauss.

4. En déduire la signature de q_M.

5. Dans quel cas la forme q_M n'est pas définie ?

6. Déterminer les formes linéaires $l_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans la forme diagonale de q_M. Forment elles une base ?

CHAPITRE

4 Introduction à l'espace Hermitien

Plan de ce chapitre

Dans ce chapitre on travaille sur $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes. Nous allons établir une théorie sur les formes bilinéaires et quadratiques généralisant la version réelle. Dans cette théorie le conjugué $\bar{a}$ d'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ va jouer un rôle important et la positivité (généralement non satisfaite pour les nombres complexes) de x^2 pour les nombres réels sera remplacée par $|a|^2 = a\bar{a}$ qui est réel et positif sur $\mathbb{C}$. Ceci nous permettra de définir la notion de produit scalaire sur un espace vectoriel complexe et toutes les notions associées.

I. Formes hermitiennes

Définition 1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application h sur E est dite **semi-linéaire** si,

(i) $\forall x, y \in E, \quad h(x+y) = h(x) + h(y)$

(ii) $\forall x \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \quad h(ax) = \bar{a}h(x)$.

Dans la suite, nous définissons une forme équivalente à une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}$.

Définition 2

On appelle forme **sesquilinéaire** définie sur un espace vectoriel complexe E dans $\mathbb{C}$, toute application $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

(i) $\forall x, y, z \in E, \quad h(x, y+z) = h(x, y) + h(x, z)$

(ii) $\forall x, y, z \in E, \quad h(x+z, y) = h(x, y) + h(z, y)$

(iii) $\forall x, y \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \quad h(ax, y) = \bar{a}h(x, y)$ (semi-linéarité à gauche)

(iv) $\forall x, y \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \quad h(x, ay) = ah(x, y)$ (linéarité à droite)

Remarque.

1. Le terme sesquilinéaire vient du grec et signifie **une fois et demi linéaire**.
2. La forme h n'est pas bilinéaire à cause de sa non linéarité par rapport au premier argument.
3. Une forme sesquilinéaire peut être définie en adoptant une convention différente de celle donnée dans ce document, c'est à dire : linéaire à gauche et semi-linéaire à droite.

Définition 3

On appelle forme sesquilinéaire **à symétrie hermitienne** toute forme sesquilinéaire h vérifiant

$$h(x,y) = \overline{h(y,x)}, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{C}.$$

Autrement dit, une forme $h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est sesquilinéaire à symétrie hermitienne si et seulement si

(i) $\forall x,y,z \in E, \quad h(x,y+z) = h(x,y) + h(x,z)$

(ii) $\forall x,y,z \in E, \quad h(x+z,y) = h(x,y) + h(z,y)$

(iii) $\forall x,y \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \quad h(ax,y) = \bar{a}h(x,y)$

(iv) $\forall x,y \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \quad h(x,ay) = ah(x,y)$

(v) $\forall x,y \in E, \quad h(x,y) = \overline{h(y,x)}$

Remarque.

1. Les formes bilinéaires symétriques sont des cas particuliers de formes sesquilinéaires à symétrie hermitienne.
2. Un exemple de forme sesquilinéaire définie sur $\mathbb{C}^n$ est

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i = \bar{x}_1 y_1 + \ldots + \bar{x}_n y_n, \quad \forall x,y \in \mathbb{C}^n$$

   h est appelée forme sesquilinéaire canonique et elle est à symétrie hermitienne.

Sur un espace vectoriel complexe, la notion de formes quadratiques définies positives n'a plus de sens car si $q(x) > 0$, alors : $q(ix) = -q(x) < 0$. Cependant, dans cette partie, nous présentons une théorie semblable à celle des formes quadratiques réelles sur un espace vectoriel complexe en utilisant, à la place des formes quadratiques les formes hermitiennes. Les formes hermitiennes ont été introduites par Charles Hermite (1822-1901) d'où leurs noms.

Définition 4

Soit h une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur un espace vectoriel complexe E. On appelle forme **hermitienne** associée à h, l'application

$$\begin{aligned} q : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow q(x) = h(x,x) \end{aligned}$$

h est appelée **forme polaire** de q.

Propriétés 1.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme hermitienne si et seulement si

1. Pour tous $x \in E,\ \lambda \in \mathbb{C}$, nous avons

$$q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$$

2. Pour tous $x, y \in E$, nous avons

$$h(x, y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right] - \frac{i}{2}\left[q(x+iy) - q(x) - q(y)\right]$$

Tout comme dans le cas réel, la forme hermitienne q et sa forme polaire h sont équivalentes et l'étude de l'une peut se ramener à l'étude de l'autre. Ainsi, tous les résultats qui suivent sont valables pour les deux formes.

II. Représentation matricielle

Définition 5

Soit $H \in M_n(\mathbb{C})$ (espace des matrices complexes d'ordre n). H est appelée **matrice hermitienne** si,

$$\bar{H}^T = H \tag{4.1}$$

En particulier, les matrices réelles symétriques sont des matrices hermitiennes réelles.

Remarque. Les éléments de la diagonale d'une matrice hermitienne sont réels.

Exemple 1

La matrice complexe, H définie ci-dessous est une matrice hermitienne

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3+2i \\ i & 5 & 1+i \\ 3-2i & 1-i & 4 \end{pmatrix}$$

Tout comme les formes bilinéaires symétriques, qui sont représentées par des matrices symétriques réelles, les formes hermitiennes peuvent être représentées par des matrices hermitiennes. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Si $\{e_i\}$ est une base de E et $x, y \in E$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors on a

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i y_j h(e_i, e_j).$$

Définition 6

Soit h une forme hermitienne définie sur un espace vectoriel de dimension finie E et $\{e_i\}$ une base de E. On appelle matrice de h dans la base $\{e_i\}$, la matrice hermitienne

$$M_h = \begin{pmatrix} h(e_1,e_1) & \dots & h(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \\ h(e_n,e_1) & & h(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

L'élément $h(e_i,e_j)$ est le coefficient de $\bar{x}_i y_j$ dans l'expression de la forme hermitienne h.

Exemple 2

1. Le carré du module d'une forme linéaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une forme hermitienne. Soit $\varphi \in E^*$. l'application $q : x \longrightarrow |\varphi(x)|^2 = \overline{\varphi(x)}\varphi(x)$ est une forme hermitienne de forme polaire $h : (x,y) \longrightarrow h(x,y) = \overline{\varphi(x)}\varphi(y)$.
2. L'application $q : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$h(x,y) = \bar{x}_1 y_1 + 5\bar{x}_2 y_2 + (3+i)\bar{x}_1 y_2 + (3-i)\bar{x}_2 y_1,$$

est une forme hermitienne. Sa forme polaire est donnée par

$$q(x) = |x_1|^2 + 5|x_2|^2 + (3+i)\bar{x}_1 x_2 + (3-i)\bar{x}_2 x_1.$$

Remarque. Soient E un espace vectoriel complexe et h une forme hermitienne sur E. On peut définir, de la même manière que pour les formes quadratiques réelles, les notions de vecteurs conjugués, d'orthogonalité, de noyau et de vecteurs isotropes pour les formes hermitiennes.

III. Espace hermitien

Définition 7

On appelle **produit scalaire hermitien** défini sur un espace vectoriel complexe E et noté $\langle .,. \rangle$, toute forme hermitienne définie positive. C'est à dire vérifiant les relations suivantes :

(i) $\forall x,y,z \in E, \quad \langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

(ii) $\forall x,y,z \in E, \quad \langle x+z, y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle z,y\rangle$

(iii) $\forall x,y \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \quad \langle ax, y\rangle = \bar{a}\langle x,y\rangle$

(iv) $\forall x,y \in E, \forall a \in \mathbb{C}, \quad \langle x, ay\rangle = a\langle x,y\rangle$

(v) $\forall x,y \in E, \quad \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

(vi) $\forall x \in E, \quad \langle x,y\rangle > 0$ et $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Définition 8

On appelle **espace hermitien** tout espace vectoriel E de **dimension finie** sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien.

Remarque. Un espace hermitien est également appelé espace hilbertien. Dans le cas où l'espace vectoriel complexe E muni d'un produit scalaire hermitien, est de **dimension infini**, on dit qu'il est **préhilbertien**.

Définition 9

Soit E un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien. On appelle **norme hermitienne**, l'application $|| \; || : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ et vérifiant :

(i) $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $\forall x \in E, \quad \forall a \in \mathbb{C}, ||ax|| = |a| \; ||x||$

(iii) $\forall x, y \in E, \quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Proposition 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
Soit E un espace hermitien. Pour tous $x, y \in E$, nous avons :

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \; ||y||.$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont liés.

IV. Exercices non corrigés

Exercice 1.
Vérifier que les applications suivantes sont semi-linéaires :

$$h_1 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \;\; h_1(x) = \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 - \bar{x}_3$$

$$h_2 : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad h_2(A) = \mathrm{Tr}(\bar{A})$$

Exercice 2.
Les applications suivantes sont elles des formes hermitiennes ?

$$\begin{aligned} h_1(x,y) = &\bar{x}_1 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2 + 2i\bar{x}_3 y_3 + (2+3i)\bar{x}_1 y_2 + (2-3i)\bar{x}_2 y_1 \\ &+ (1-5i)\bar{x}_2 y_3 + (1+5i)\bar{x}_3 y_2 \end{aligned}$$

$$h_2(A) = \mathrm{Tr}(\bar{A}), \;\; A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

Exercice 3.
Soient les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dites laquelle est :

1. la matrice d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de $\mathbb{C}^2$,

2. la matrice d'une forme sesquilinéaire hermitienne de $\mathbb{C}^2$,

3. la matrice d'un produit scalaire hermitien de $\mathbb{C}^2$.

Exercice 4.
Pour tout $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, on définit

$$q(z) = |z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 6|z_3|^2 + i\bar{z}_1 z_2 - iz_1\overline{z_2} + 2i\overline{z_2}z_3 - 2iz_2\overline{z_3}$$

1. Montrer qu'il existe une forme hermitienne $f : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}^3$, $f(z,z) = q(z)$

2. Donner la matrice de f dans la base canonique.

3. Montrer que f est un produit scalaire hilbertien.

Références

[1] J. Grifone, *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 2011.

[2] J.F. Havet, *Algèbre Bilinéaire et Géométrie Euclidienne.* Plycopié de cours, Université d'Orléans, 2013.

[3] J.P. Ramis et al., *Mathématiques Tout-en-un Pour La Licence Niveau L2.* Dunod, 2007.

[4] A.M. Robert, *Linear Algebra : Examples and Applications.* World Scientific, 2005.

[5] A. Tchoudjem. *Formes (Bi)Linéaires.* Polycopié de cours, Université de Lyon I, 2011.