

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Cours destiné aux étudiants de première année Master
(MMMTD, MMEPR, MF)

*Méthodes multicritères d'aide à la
décision*

Réalisé par :

M^{me} YOUSFI-HALIMI Naouel

Année Universitaire 2020 – 2021

Avant-propos

Ce document est un support de cours destiné aux étudiants de la première année master Modélisation Mathématique et Techniques de Décision (MMTD), Modélisation Mathématique et Evaluation des Performances dans les Réseaux (MMEPR) ainsi que Mathématiques Financières (MF).

La structure et le contenu des chapitres de ce document sont synchronisés en majorité avec le contenu du programme établi dans le canevas des offres de formation.

L'objectif de la matière est de présenter les fondements mathématiques de la décision, de l'analyse multicritère et dans une seconde étape de présenter les principales approches pour la recherche de solutions dans un problème multicritère.

Le contenu de la matière s'articule sur quatre parties principales :

1. Structures et modèles de préférence.
2. Méthodes de surclassement.
3. Méthodes Scalaires.
4. Quelques Exercices.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iv
Listes des tableaux	v
Introduction générale	1
1 Structures et modèles de préférence	4
1.1 Le concept d'action	5
1.2 Relations binaires et structures de préférence	6
1.2.1 Relation binaire	6
1.2.2 Propriétés d'une relation binaire	6
1.2.3 Représentation graphique d'une relation binaire	6
1.2.4 Représentation matricielle d'une relation binaire	7
1.2.5 Structures de préférences	7
1.2.6 La structure d'ordre total	9
1.2.7 La structure de préordre total	9
1.2.8 La prise en compte d'un seuil d'indifférence	10
1.2.9 La prise en compte d'un seuil d'indifférence et de préférence	11
1.2.10 Les structures incluant l'incomparabilité	12
1.3 Le concept de critère	13
1.3.1 Les types de critère	14
2 Méthodes de surclassement	15
2.1 Problèmes multicritères d'aide à la décision	16
2.1.1 Concepts de solutions	16
2.1.2 Approches de résolution des problèmes multicritères d'aide à la décision . . .	17
2.2 Les méthodes ELECTRE	19
2.2.1 Les problématiques de référence	19
2.2.2 Notations	20

2.2.3	La méthode ELECTRE I	21
2.2.4	La méthode ELECTRE II	23
2.2.5	La méthode ELECTRE Tri	29
2.2.6	Les autres méthodes ELECTRE	32
2.3	Les méthodes PROMETHEE	32
2.3.1	Enrichissement de la structure de préférence	32
2.3.2	PROMETHEE I : Rangement partiel	36
2.3.3	PROMETHEE II : Rangement complet	36
2.4	Exemple récapitulatif sur les méthodes ELECTRE I et II	37
2.4.1	Présentation des données	37
2.4.2	La méthode ELECTRE I	38
2.4.3	La méthode ELECTRE II	40
2.5	Exemple récapitulatif sur les méthodes PROMETHEE I et II	41
2.5.1	Présentation des données	42
2.5.2	Indices de préférence multicritères et flux de surclassement	43
2.5.3	Rangement par PROMETHEE I	43
2.5.4	Rangement par PROMETHEE II	44
3	Méthodes Scalaires	45
3.1	Position du problème	46
3.2	Concepts d'optimalité	46
3.2.1	Décision optimale de Pareto	47
3.2.2	Décision optimale de Slater	47
3.2.3	Point Idéal et point Nadir	48
3.2.4	Interprétation géométrique	48
3.2.5	Optimalité Lexicographique	50
3.3	Quelques méthodes scalaires pour la résolution d'un problème multicritère	51
3.3.1	Méthode de pondération des critères	51
3.3.2	Méthode du compromis (ϵ -méthode)	52
3.3.3	Méthode du but à atteindre	53
3.3.4	Méthode du but Programmé	53
3.3.5	Méthode Lexicographique	54
4	Quelques Exercices	56
4.1	Exercices corrigés	57
4.2	Exercices non corrigés	68
	Bibliographie	72

Table des figures

1.1	Représentation graphique de S	7
2.1	Les problématiques de référence	20
2.2	Construction des relations de surclassement S_f et S_F	26
2.3	Algorithme de classement direct	27
2.4	Relation de Surclassement ELECTRE Tri	31
2.5	Fonction de préférence	33
2.6	Les critères Généralisés	35
2.7	Graphe de surclassement selon ELECTRE I	39
2.8	Graphe de surclassement Fort et Faible selon ELECTRE II	40
2.9	Classement des actions selon ELECTRE II	41
2.10	Classement des actions selon le flux positif	43
2.11	Classement des actions selon le flux négatif	43
2.12	Classement partiel (PROMETHEE I)	44
2.13	Classement total (PROMETHEE II)	44
3.1	Interprétation géométrique	49
3.2	La surface de compromis (Front de Pareto)	50
3.3	Solutions supportées et non supportées	50
4.1	Les représentations graphiques de X et $f(X)$	64
4.2	Résolution graphique des problèmes (4.1) et (4.2)	66
4.3	Résolution graphique des problèmes (4.3) et (4.4)	67

Liste des tableaux

2.1	Les problématiques de référence	20
2.2	(a) :Notes de cinq élèves dans cinq matières. (b) :Valeurs des critères pour chaque élève. (c) :Valeurs recalibrées des critères pour chaque élève	38
2.3	Les indices $J^+(a_i, a_k)$ et $J^-(a_i, a_k)$	38
2.4	Les poids $W^+(a_i, a_k)$ et $W^-(a_i, a_k)$	38
2.5	Les indices de concordance	39
2.6	(a) Les critères discordants . (b) Les indices de discordance	39
2.7	Matrice des surclassements Fort et faible	40
2.8	Les itérations du classement direct.	41
2.9	Les itérations du classement inverse.	41
2.10	Données relatives à la construction d'une centrale électrique.	42
2.11	Représentation matricielle de l'intersection des deux classements	43

Introduction générale

L'optimisation multicritère (appelée aussi Optimisation multiobjectif ou Programmation multi-objective) est une branche de l'optimisation mathématique traitant spécifiquement des problèmes d'optimisation ayant plusieurs fonctions objectifs.

Un problème d'optimisation multicritère ne possède pas de solutions optimales!! En effet, généralement aucune solution particulière n'optimise simultanément tous les critères en raison de leur caractère conflictuel. Il est alors nécessaire d'envisager des solutions de compromis. Toutefois, il faut bien comprendre qu'il n'y a pas de solutions de compromis universelle. Chaque solution dépend du décideur. Celui-ci doit donc fournir à l'analyste l'information supplémentaire qui lui est propre. C'est ce que l'on appelle la modélisation des préférences du décideur et c'est ce qui fera l'objet du premier chapitre.

Dans tout ce qui suit, on appellera *décideur* l'intervenant dans le processus de décision que les modèles mis en oeuvre cherchent à éclairer. Par contre, l'*homme d'étude* ou encore l'*analyste* est celui qui prend en charge l'aide à la décision. En effet, en mettant en oeuvre des modèles dans le cadre d'un processus de décision, il contribue à l'orienter et à le transformer.

Il existe une grande diversité d'approches et de modèles en théorie de la décision multicritère. Cet état de fait est justifié par la grande variété des situations pratiques dans lesquelles le décideur peut se trouver. En particulier, il est nécessaire de déterminer les paramètres suivants [23] :

- la nature de l'ensemble des alternatives (continue ou discrète), et la taille de cet ensemble.
- la nature des informations servant à l'évaluation des alternatives (ordinaire, cardinale).
- la méthode d'agrégation des critères à utiliser (critère unique de synthèse ou relation de synthèse).
- la nature des préférences (stable dans le temps ou évolutive), pour évaluer la nécessité d'une approche interactive.

A partir de ces différents paramètres, il est possible de choisir la méthode la plus adaptée au cas étudié [23] :

1. Si l'ensemble des alternatives est discret et fini, il existe plusieurs méthodes dépendant de la taille de l'ensemble : défini en compréhension, avec un nombre combinatoire d'éléments, ou en extension avec un petit nombre d'éléments.
 - (a) Dans le cas où le nombre d'alternatives est peu élevé, les problèmes de décision permettent de porter une attention accrue aux interactions entre les critères. Il existe deux

principales méthodes pour comparer les alternatives entre elles : passer par un critère unique de synthèse, à travers une fonction d'utilité additive [19] ou comparer critère par critère les alternatives afin d'obtenir une relation de surclassement de synthèse [24, 25, 26]. Quelques unes de ces méthodes feront l'objet du chapitre 2.

- (b) Dans le cas combinatoire, que l'ensemble des alternatives soit discret ou continu, la difficulté du problème est due au fait de ne pas connaître explicitement l'ensemble des alternatives potentielles. Il est donc nécessaire de détecter simultanément les solutions réalisables et déterminer quelles sont les meilleures en considérant plusieurs critères. Dans de nombreux cas, le problème combinatoire sera simplifié :
- soit par la synthèse des critères en un unique critère de synthèse, afin de se ramener à un problème classique d'optimisation. Cependant, le critère de synthèse n'est généralement pas linéaire, ni même calculable en un temps linéaire, ce qui rend l'optimisation particulièrement difficile quand le nombre d'instances croît.
 - soit en considérant un sous-ensemble des alternatives potentielles, ce qui évacue l'aspect combinatoire du problème. La difficulté est alors de valider la représentativité de l'échantillon des alternatives retenues. Cependant dans ce cas la solution trouvée n'est qu'approximative, et il n'y a pas d'autres possibilités que l'exploration systématique (énumération implicite) des alternatives potentielles pour résoudre exactement le problème.
2. Si l'ensemble des alternatives possibles est continu, défini en compréhension par un ensemble de contraintes, les difficultés sont principalement la recherche de solutions réalisables, et la sélection de la meilleure d'entre elles. Plusieurs méthodes de recherche de la meilleure alternative existent basées sur la construction d'un critère unique et l'optimisation de ce critère (Une introduction à ces méthodes fera l'objet du chapitre 3) :
- (a) Des méthodes qui consistent à fixer un niveau d'aspiration pour chaque critère (la cible à atteindre), puis à chercher la solution dans l'espace des alternatives qui minimise une somme pondérée des déviations à cette cible. On peut citer : Goal programming, Goal attainment, Méthode de Compromis.....
 - (b) Des méthodes qui consistent à fixer un point de référence dans l'espace des alternatives et à trouver une alternative la plus proche possible de ce point. La différence porte sur la norme utilisée pour calculer la distance entre le point de référence sur l'espace des critères et l'alternative, dont les valeurs sur l'espace des critères.
 - (c) Des méthodes interactives permettant au décideur d'interagir pour préciser ses préférences. Le processus de décision consiste alors en une alternance de phases de calculs produisant un optimum local satisfaisant, et de phases de dialogue où le décideur peut préciser ses choix pour permettre une recherche affinée de la solution préférée. Les principales difficultés de cette approche sont d'une part le temps de calcul, qui doit

être suffisamment court pour permettre une interaction en temps réel, et d'autre part le compromis entre la liberté laissée au décideur de changer les paramètres et la nécessité de conserver un processus convergent.

Chapitre 1

Structures et modèles de préférence

Sommaire

1.1	Le concept d'action	5
1.2	Relations binaires et structures de préférence	6
1.2.1	Relation binaire	6
1.2.2	Propriétés d'une relation binaire	6
1.2.3	Représentation graphique d'une relation binaire	6
1.2.4	Représentation matricielle d'une relation binaire	7
1.2.5	Structures de préférences	7
1.2.6	La structure d'ordre total	9
1.2.7	La structure de préordre total	9
1.2.8	La prise en compte d'un seuil d'indifférence	10
1.2.9	La prise en compte d'un seuil d'indifférence et de préférence	11
1.2.10	Les structures incluant l'incomparabilité	12
1.3	Le concept de critère	13
1.3.1	Les types de critère	14

Ce chapitre est consacré à la représentation de concepts, résultats visant à aider un ou plusieurs décideurs dans le processus de prise de décision. Dès lors que l'on se préoccupe de la décision, il est naturel de chercher à modéliser comment comparer en termes de préférence les objets de la décision.

La littérature se rattachant à la modélisation des préférences est très vaste, ceci s'explique par le fait que la nécessité de modéliser des préférences se fait sentir dans de nombreuses disciplines : économie, psychologie, recherche opérationnelle, etc. [7].

1.1 Le concept d'action

Une action "a" est la représentation d'une éventuelle contribution à la décision globale susceptible, eu égard à l'état d'avancement du processus de décision, d'être envisagée de façon autonome et de servir de point d'application à l'aide à la décision. On définit l'ensemble A d'actions, comme un ensemble d'objets, décisions, candidats,... que l'on va explorer dans un processus de décision.

Cet ensemble peut être :

- Défini en extension : (par énumération de ses éléments) lorsqu'il est fini et suffisamment petit pour que l'énumération soit possible ;
- Défini en compréhension (par une propriété caractéristique ou par des contraintes mathématiques) lorsqu'il est infini ou fini mais trop grand pour que l'énumération soit possible.

Étant donné la complexité des problèmes de décision, il arrive souvent que la définition de A se fasse progressivement au cours du processus d'aide à la décision. L'ensemble A peut donc être :

- Stable : défini à priori mais n'est pas susceptible d'être changé en cours de procédure.
- Évolutif : peut être modifié en cours de procédure, soit à cause des résultats intermédiaires que cette procédure fait apparaître, soit parce que les problèmes de décision se posent dans un environnement naturellement changeant.
- Globalisé : chaque élément de l'ensemble des actions est exclusif de tout autre. Prenons par exemple le cas d'un appel d'offre, chaque offre (action) est exclusive de l'autre, donc à la fin du processus de décision, une seule offre (action) sera retenue et toutes les autres seront rejetées.
- Fragmenté : les résultats du processus de décision font intervenir des combinaisons de plusieurs éléments de A . On peut concevoir un exemple simple d'action fragmentaire dans un problème d'octroi de crédit par un banquier. S'il est raisonnable de considérer chaque dossier de demande comme un point d'application possible d'une aide à la décision- et donc comme une action- accepter un dossier de crédit n'implique pas de rejeter tous les autres.

On note généralement : $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ où a_i est une action potentielle.

Définition 1.1.1. Une action potentielle est une action jugée possible par un des intervenants au moins ou présumée telle par l'homme d'étude en vue de l'aide à la décision.

1.2 Relations binaires et structures de préférence

1.2.1 Relation binaire

Définition 1.2.1. Une relation binaire S dans un ensemble A est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$. C'est un ensemble de couples (a, b) d'éléments de A .

Si le couple (a, b) appartient à l'ensemble S , on notera : aSb , sinon on notera $a\bar{S}b$.

Dans tout ce qui suit, on supposera que A est fini.

1.2.2 Propriétés d'une relation binaire

Une relation binaire S dans A est : [7] :

- **Reflexive** ssi $aSa, \forall a \in A$.
- **Irreflexive** ssi $a\bar{S}a, \forall a \in A$.
- **Symétrique** ssi $aSb \implies bSa, \forall a, b \in A$.
- **Antisymétrique** ssi aSb et $bSa \implies a = b, \forall a, b \in A$.
- **Asymétrique** ssi $aSb \implies b\bar{S}a, \forall a, b \in A$.
- **Connexe** ssi $a \neq b \implies aSb$ et/ou $bSa, \forall a, b \in A$.
- **Complète** ssi aSb et/ou bSa tel que $a \neq b, \forall a, b \in A$.
- **Transitive** ssi aSb et $bSc \implies aSc, \forall a, b, c \in A$.
- **Semi-transitive** ssi $[aSb$ et $bSc] \implies [aSd$ ou $dSc], \forall a, b, c, d \in A$.
- **De Ferrers** ssi $[aSb$ et $cSd] \implies [aSd$ ou $cSb], \forall a, b, c, d \in A$.

1.2.3 Représentation graphique d'une relation binaire

Une relation binaire S dans A peut être représentée par un graphe orienté (A, S) où A est l'ensemble des sommets du graphe et S est l'ensemble des arcs du graphe (couples de sommets). La réflexivité de S se traduit par la présence d'une boucle en chaque sommet. La symétrie de S signifie que la présence d'un arc orienté de a vers b implique l'existence d'un arc orienté de b vers a . La transitivité de S se traduit en terme de graphe par le fait que s'il existe un chemin de longueur 2 de a vers b , il existe un arc de a vers b [7].

Exemple 1.2.1. Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$. Considérons la relation binaire $T = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$.

La représentation graphique de S est la suivante :

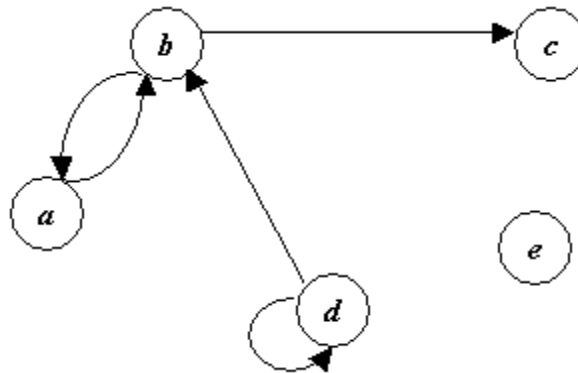


FIGURE 1.1 – Représentation graphique de S

1.2.4 Représentation matricielle d’une relation binaire

Une autre manière de représenter une relation binaire S est d’associer, à chaque élément de A une ligne et une colonne d’une matrice carrée M^T de dimension $|A|$. L’élément M_{ab}^T de cette matrice à l’intersection de la ligne associée à a et de la colonne associée à b vaut 1 si aTb sinon 0. Avec une telle représentation, la réflexivité de S se traduit par la présence de 1 sur la diagonale principale de la matrice. La symétrie de S est équivalente au fait que M^T soit égale à sa transposée [7].

Exemple 1.2.2. En reprenant l’exemple (1.2.1), la représentation matricielle est la suivante :

$$M^T = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1.2.5 Structures de préférences

Définition 1.2.2. On appelle Structure de préférence sur A la donnée d’une relation binaire réflexive S dans A .

On dira que les relations binaires R_1, R_2, \dots, R_k constituent une structure de préférence si elles sont exhaustives et mutuellement exclusives.

- Elles sont dites “**exhaustives**”, si pour une paire d’actions quelconques une au moins de ces relations est vérifiée, c’est à dire :

$$\forall a, b \in A, \exists i \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ tel que } a R_i b \text{ ou } b R_i a.$$

- Elles sont dites “**mutuellement exclusives**”, si pour une paire d’actions quelconques, deux relations distinctes ne sont jamais vérifiées en même temps, c’est à dire :
 $\forall a, b \in A, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, a R_i b \implies [Non (a R_j b) \text{ et } Non (b R_j a), \forall j \neq i].$

Définition 1.2.3. [7, 26] Étant donné que les relations binaires sont des ensembles, on peut leur appliquer les opérations habituelles de la théorie des ensembles.

Soient T, V deux relations binaires définies sur A . On définit :

- l’intersection de ces deux relations ($T \cap V$) par : $b (T \cap V) a \iff [b T a \text{ et } b V a].$
- l’union de ces deux relations ($T \cup V$) par : $b (T \cup V) a \iff [b T a \text{ ou } b V a].$
- le produit de ces deux relations ($T \cdot V$) par : $b (T \cdot V) a \iff [\exists c \in A \text{ tq } b T c \text{ et } c V a], \forall a, b \in A.$

On suppose que l’on compare 2 actions a et $b \in A$, le décideur peut avoir l’une de ces trois attitudes :

1. Préférence pour l’une des deux actions.
2. Indifférence entre les deux actions.
3. Incomparabilité des deux actions.

Nous noterons :

1. $a \succ b$ Si a est préférée à b .
2. $b \succ a$ Si b est préférée à a .
3. $a \approx b$ Si a et b sont indifférentes.
4. $a ? b$ Si a et b sont incomparables.

Les relations de Préférence (\succ), d’Indifférence (\approx) et d’Incomparabilité (?) sont utilisées dans la plupart des travaux publiés sur la modélisation des préférences.

Remarque 1.2.1. [27] Il est facile de vérifier que si les trois relations ($\succ, \approx, ?$) vérifient les propriétés suivantes :

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} a \succ b \implies b \bar{\succ} a & : \succ \text{ est asymétrique,} \\ a \approx a & : \approx \text{ est réflexive,} \\ a \approx b \implies b \approx a & : \approx \text{ est symétrique,} \\ a \bar{?} a & : ? \text{ est irreflexive,} \\ a ? b \implies b ? a & : ? \text{ est symétrique,} \end{cases} \quad (1.1)$$

alors, elles constituent une structure de préférence dans A .

1.2.6 La structure d'ordre total

Définition 1.2.4. Une structure de préférence S est une structure *d'ordre total* ssi :

- S est complète,
- S est transitive,
- S est antisymétrique.

Si S est une structure d'ordre total sur A , alors on peut ranger les éléments de A du meilleur au moins bon sans qu'il y ait d'ex-aequo possibles.

Remarque 1.2.2. [26] Il est facile de vérifier qu'un couple de relations binaires (T, V) sur l'ensemble A , vérifiant les conditions suivantes :

- T et V sont exhaustives et mutuellement exclusives,
- T est limitée aux couples identiques $T = \{(a, a) : a \in A\}$,
- V est connexe et transitive.

est une structure *d'ordre total*.

Théorème 1.2.1. [7, 26] Une structure de préférence S sur un ensemble fini A est une structure *d'ordre total* ssi, il existe une fonction $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$aSb \iff \begin{cases} g(a) \geq g(b), \\ g(a) = g(b) \implies a \equiv b. (a \text{ et } b \text{ sont Equivalent}) \end{cases}$$

Exemple 1.2.3. Conformément à la Définition (1.2.4), on peut bâtir un couple de relations (\approx : indifférence, \succ : préférence) ayant une structure d'ordre total. Les relations (\succ) et (\approx) seront exhaustives et mutuellement exclusives, la relation (\succ) sera connexe et transitive et la relation (\approx) sera réduite aux couples identiques : $\approx = \{(a, a) : a \in A\}$.

1.2.7 La structure de préordre total

Définition 1.2.5. [26, 7] Une structure de préférence S est une structure de *préordre total* ssi :

- S est complète,
- S est transitive.

La structure de préordre total généralise celle d'ordre total en n'imposant plus à S d'être antisymétrique, autorisant ainsi d'éventuels éléments ex-aequo (au sens de la relation T).

Remarque 1.2.3. [26] Il est facile de vérifier, qu'un couple de relations binaires (T, V) sur un ensemble A , vérifiant les conditions suivantes :

- T et V sont exhaustives et mutuellement exclusives,
- V est asymétrique et transitive,

- T est symétrique et transitive.

est un *préordre total*.

Théorème 1.2.2. [26]

Un *préordre total* (T, V) sur un ensemble A peut toujours, dans les problèmes pratiques, être représenté par une fonction g à valeurs réelles définie sur A de telle sorte que :

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} a T b & \iff g(a) = g(b), \\ a V b & \iff g(a) > g(b). \end{cases}$$

Exemple 1.2.4. Conformément à la Définition (1.2.5), on peut bâtir un couple de relations (\approx : indifférence, \succ : préférence) ayant une structure de *préordre total*. Les relations (\succ) et (\approx) seront exhaustives et mutuellement exclusives, la relation (\succ) sera asymétrique et transitive et la relation (\approx) sera symétrique et transitive. Dans la structure de *préordre total*, la relation (\approx) n'est plus réduite aux couples identiques.

1.2.8 La prise en compte d'un seuil d'indifférence

La transitivité de la relation T (\approx l'indifférence) impliquée par la structure de *préordre total*, est incompatible avec l'existence d'un seuil de sensibilité en dessous duquel le décideur, soit ne perçoit pas de différence entre deux éléments, soit refuse de se prononcer.

Définition 1.2.6. [7, 26] Une structure de préférence S est une structure d'*ordre intervalle*, ssi

- S est complète,
- S est de Ferrers.

De même S est une structure de *quasi-ordre* ssi

- S est complète,
- S est de Ferrers,
- S est de semi-transitive.

Remarque 1.2.4. [26] Il est facile de vérifier qu'un couple de relations binaires (T, V) sur un ensemble A vérifiant les conditions suivantes :

- T et V sont exhaustives et mutuellement exclusives,
- T est symétrique,
- V est asymétrique,
- $\forall a, b, c, d \in A, [a V b, b T c \text{ et } c V d] \implies a V d$,

est un *ordre d'intervalle*.

Si, de plus, on a :

- $\forall a, b, c, d \in A, [a V b \text{ et } b V c] \implies \text{Non}[a T d \text{ et } d T c]$,

alors (T, V) est un *quasi-ordre*.

Ces deux structures consistent à admettre que la relation symétrique (T) n'est pas parfaitement transitive en raison des seuils. Ceci est illustré par les deux résultats suivants :

Théorème 1.2.3. [26] *Un quasi-ordre (T, V) sur un ensemble A peut toujours, dans les problèmes réels, être représenté par une fonction g à valeurs réelles définie sur A telle que :*

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} a V b \iff g(a) > g(b) + q, \\ a T b \iff |g(a) - g(b)| \leq q. \end{cases} \quad (1.2)$$

q désigne une constante non négative appelée seuil d'indifférence.

Théorème 1.2.4. [26] *Un ordre d'intervalle (T, V) sur un ensemble A peut toujours, dans les problèmes réels, être représenté par deux fonctions g et q , g étant une fonction à valeurs réelles, définie sur A et q une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de telle sorte que :*

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} a T b \iff \begin{cases} g(a) - g(b) \leq q(g(b)), \\ g(b) - g(a) \leq q(g(a)), \end{cases} \\ a V b \iff g(a) - g(b) \leq q(g(b)), \end{cases} \quad (1.3)$$

où la fonction seuil q est telle que $q(g(a)) \geq 0, \forall a \in A$.

1.2.9 La prise en compte d'un seuil d'indifférence et de préférence

La pratique montre qu'il existe souvent une zone intermédiaire dans laquelle le décideur hésite entre les deux réponses ou donne des réponses contradictoires suivant la manière dont il est interrogé. Cette constatation conduit à l'introduction d'un modèle de préférence faisant intervenir deux seuils distincts :

- Le seuil d'indifférence, en dessous duquel le décideur marque une indifférence nette.
- Le seuil de préférence, au dessus duquel le décideur montre une préférence stricte.

Définition 1.2.7. [26] *Un triplet de relations (T, V, W) sur un ensemble A est un *pseudo-ordre* si :*

- T, V, W sont exhaustives et mutuellement exclusives.
- T est symétrique et reflexive,
- V est asymétrique,
- W est asymétrique,
- $(T, V \cup W)$ a une structure de quasi-ordre,
- (\bar{V}, V) a une structure de quasi-ordre (avec $a \bar{V} b \iff [Non(a V b) \text{ et } Non(b V a)]$),
- $V \cdot T \cdot W \in V$,
- $W \cdot T \cdot V \in V$,
- $T \cdot W \cdot V \in V$,
- $V \cdot W \cdot T \in V$.

Cette construction plus complexe correspond intuitivement à un quasi-ordre (T, V) où l'on a "inséré", de manière adéquate, la relation W . Cette insertion correspond, pour la modélisation des préférences, à celle de la préférence faible ($W = Q$) entre l'indifférence ($T = \approx$) et la préférence stricte ($V = \succ$).

Théorème 1.2.5. [26] *Un pseudo-ordre (T, V, W) sur un ensemble A peut toujours, dans les problèmes réels, être représenté par trois fonctions g , q et p où g étant une fonction à valeurs réelles, définie sur A , q et p des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de telle sorte que :*

$$\forall a, b \in A : \begin{cases} a V b \iff g(a) > g(b) + p(g(b)), \\ a W b \iff g(b) + q(g(b)) < g(a) \leq g(b) + p(g(b)), \\ a T b \iff \begin{cases} g(a) - g(b) \leq q(g(b)), \\ g(b) - g(a) \leq q(g(a)), \end{cases} \end{cases} \quad (1.4)$$

où les fonctions p et q sont telles que : $\forall a, b \in A$

$$p(g(b)) \geq q(g(b)) \geq 0, \\ g(a) > g(b) \implies \begin{cases} g(a) + q(g(a)) \geq g(b) + q(g(b)), \\ g(a) + p(g(a)) \geq g(b) + q(g(b)). \end{cases}$$

En matière de modélisation des préférences, on peut toujours bâtir des structures de préférence du type (\approx, \succ, Q) .

La relation Q , appelée "Préférence faible", ne traduit pas une préférence moindre comme son nom pourrait le faire croire, mais plutôt une hésitation du décideur entre l'indifférence et la préférence.

1.2.10 Les structures incluant l'incomparabilité

Les structures vues précédemment impliquent une absence d'incomparabilité. Néanmoins celle-ci apparaît lorsqu'on ne désire pas ou l'on n'est pas en mesure de comparer deux actions.

1.2.10.1 La structure d'ordre partiel

On obtient une structure d'ordre partiel lorsqu'on peut ranger du "meilleur" au "moins bon", sans ex-aequo, les éléments de certains sous-ensembles de A .

Définition 1.2.8. [7] Une structure de préférence S est une structure *d'ordre partiel* ssi :

- S est antisymétrique,
- S est transitive.

Autrement dit, la structure d'ordre partiel correspond à une situation, où étant donné deux objets distincts, soit l'un des deux est préféré à l'autre, soit ils sont incomparables[7].

Remarque 1.2.5. Dushnik et Miller (1954) [13], Fishburn (1985)[16], ont montré que tout ordre partiel sur un ensemble fini peut s'obtenir comme l'intersection d'un nombre fini d'ordres totaux.

1.2.10.2 La structure de préordre partiel

La structure de préordre partiel généralise la structure de préordre total, en admettant l'idée d'incomparabilité dans le classement, tout en gardant celle de la transitivité.

On obtient une structure de préordre partiel lorsqu'on peut ranger du "meilleur" au "moins bon", avec d'éventuels ex-aequo, les éléments de certains sous-ensembles de A .

Définition 1.2.9. [7] Une structure de préférence S est une structure de *préordre partiel* ssi : S est transitive.

Remarque 1.2.6. [26] Il est facile de vérifier qu'un triplet de relations (T, V, W) sur un ensemble A vérifiant les conditions suivantes :

- T, V, W sont exhaustives et mutuellement exclusives.
- T est symétrique et réflexive,
- V est asymétrique,
- W est symétrique et irreflexive,
- $T \cup V$ est transitive,

est un *préordre partiel*.

Remarque 1.2.7. De même que pour la structure d'ordre partiel, il est facile de montrer que toute structure de préordre partiel sur un ensemble fini peut s'obtenir comme l'intersection d'un nombre fini d'ordres totaux. [Bossert, Sprumont et suzumura (2002)[6], Donaldson et Weymark (1998)[12]].

1.3 Le concept de critère

Dans la formulation d'un problème de décision, il est nécessaire de prendre en compte les "conséquences" des actions potentielles. En général, les circonstances réelles de décision sont multiples et variées. A partir des évaluations des conséquences, nous pouvons comparer les actions en terme de préférence. Devant un nombre généralement vague et lourd de conséquences, les préférences fournies par le décideur ne sont pas toujours bien définies et stables.

Définition 1.3.1. [21] Un critère est une expression qualitative ou quantitative de points de vue objectifs, aptitudes ou contraintes relatives au contexte réel permettant de juger des personnes, des objets ou des événements. Pour qu'une expression puisse devenir un critère, elle doit être utile pour le problème considéré et fiable. Un critère est doté d'une structure de préférence.

Définition 1.3.2. On appelle **Famille cohérente de critères** toute famille $F = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ conforme aux trois conditions suivantes [21] :

1. **Exhaustivité** : si deux actions a_i et a_k sont telles que $g_j(a_i) = g_j(a_k)$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$, alors il est impossible de différencier a_i et a_k dans un modèle de préférences globales fondées sur F .

$$g_j(a_i) = g_j(a_k) \forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \implies a_i \equiv a_k.$$

2. **Cohérence** : $\forall j \neq l$ $g_j(a_i) = g_j(a_k)$ et $g_l(a_i) > g_l(a_k) \implies a_i$ est préférée à a_k .
3. **Non redondance** : Pas de critères dupliqués, il faut que le nombre soit tel que la suppression d'un critère remettrait en cause les deux conditions précédentes.

1.3.1 Les types de critère

Nous dirons qu'un critère est un :

Vrai critère : si la structure de préférence sous-jacente est un préordre total ;

Quasi-critère : si la structure de préférence sous-jacente est un quasi ordre ;

Critère d'intervalle : si la structure de préférence sous-jacente est un ordre intervalle ;

Pseudo-critère : si la structure de préférence sous-jacente est un pseudo-ordre.

Conclusion

Ce chapitre constitue un bref rappel sur les principales structures de préférence utilisées dans la majorité des travaux effectués sur la modélisation des préférences du décideur. L'accent a été mis sur les structures utilisées ou citées dans les approches qui seront présentées dans les chapitres suivants.

Chapitre 2

Méthodes de surclassement

Sommaire

2.1	Problèmes multicritères d'aide à la décision	16
2.1.1	Concepts de solutions	16
2.1.2	Approches de résolution des problèmes multicritères d'aide à la décision	17
2.2	Les méthodes ELECTRE	19
2.2.1	Les problématiques de référence	19
2.2.2	Notations	20
2.2.3	La méthode ELECTRE I	21
2.2.4	La méthode ELECTRE II	23
2.2.5	La méthode ELECTRE Tri	29
2.2.6	Les autres méthodes ELECTRE	32
2.3	Les méthodes PROMETHEE	32
2.3.1	Enrichissement de la structure de préférence	32
2.3.2	PROMETHEE I : Rangement partiel	36
2.3.3	PROMETHEE II : Rangement complet	36
2.4	Exemple récapitulatif sur les méthodes ELECTRE I et II	37
2.4.1	Présentation des données	37
2.4.2	La méthode ELECTRE I	38
2.4.3	La méthode ELECTRE II	40
2.5	Exemple récapitulatif sur les méthodes PROMETHEE I et II	41
2.5.1	Présentation des données	42
2.5.2	Indices de préférence multicritères et flux de surclassement	43
2.5.3	Rangement par PROMETHEE I	43
2.5.4	Rangement par PROMETHEE II	44

En décision multicritère, les différentes alternatives se présentant au décideur sont décrites par un certain nombre de critères. Les valeurs des alternatives sur ces critères représentent la prise en compte de points de vue diversifiés, en général, non réductibles à un seul critère. De plus, la notion d'optimisation "dans l'absolu" est vide de sens en décision multicritère, car il n'existe généralement pas d'alternative optimisant tous les critères simultanément. Il est donc nécessaire de prendre en compte de l'information supplémentaire, en particulier l'importance relative de chaque critère et les relations existantes entre les différents critères. Il existe une grande diversité d'approches et de modèles en théorie de la décision multicritère. Dans ce chapitre on mettra l'accent sur les méthodes traitant le cas où le nombre d'alternatives est peu élevé, plus particulièrement : les méthodes de surclassement.

2.1 Problèmes multicritères d'aide à la décision

Un problème multicritère d'aide à la décision peut être formulé comme suit :

$$\max \{F(a) = \{f_1(a), \dots, f_N(a)\} \mid a \in A\}, \quad (2.1)$$

où :

- $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $m \geq 2$: est l'ensemble des m actions potentielles, a_i , $i = 1, \dots, m$,
- $F = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}$: une famille cohérente de N critères avec

$$\begin{aligned} f_j(\cdot) : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a_i &\mapsto f_j(a_i), \end{aligned}$$

où $f_j(a_i)$ est l'évaluation de l'action a_i sur le critère f_j . On notera également $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des indices des critères.

Les données relatives à un tel problème peuvent être présentées sous forme d'un tableau comprenant $m \times N$ évaluations appelé *tableau de performances*. Ces évaluations peuvent être des rangs, donc dépourvus de toute signification cardinale, d'où l'appellation de performance. On remarquera encore que cette représentation permet de considérer chaque action de A comme un vecteur de dimension N dans l'espace des critères. De plus, ce tableau peut être enrichi par des informations supplémentaires comme les éventuels "poids". On notera $W = (w_j)_{j \in \mathcal{J}}$ avec $w_j \geq 0$, $j \in \mathcal{J}$ les poids représentant l'importance relative de chaque critère.

2.1.1 Concepts de solutions

L'optimisation simultanée de plusieurs critères engendre une question primordiale : Quel sens donner à une solution optimale ? On retrouve dans la littérature plusieurs concepts d'optimalité définis pour ce type de problème, mais le concept le plus répandu reste celui de solution efficace. Cette solution décrit une situation où l'amélioration d'un critère entraîne forcément la détérioration d'au moins un autre.

Définition 2.1.1. Une action $a_i \in A$ domine une action $a_k \in A$, noté $a_i Da_k$ si :

$$a_i Da_k \Leftrightarrow \begin{cases} f_j(a_i) \geq f_j(a_k) \quad \forall j \in \mathcal{J}, \\ \exists j_0 \in \mathcal{J} \quad f_{j_0}(a_i) > f_{j_0}(a_k). \end{cases}$$

Définition 2.1.2. Une action $a_i \in A$ domine fortement une action $a_k \in A$, noté $a_i D^F a_k$ si :

$$a_i D^F a_k \Leftrightarrow f_j(a_i) > f_j(a_k) \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Remarque 2.1.1. D et D^F sont des relations binaires transitives et asymétriques.

Définition 2.1.3. (Solution faiblement efficace) Une action $a^* \in A$ est dite *faiblement efficace* dans le problème (2.1) si :

$$\nexists a \in A, a D^F a^*.$$

Une solution faiblement efficace est une action telle qu'il n'existe pas une autre action dans A qui permet d'améliorer tous les critères simultanément.

Définition 2.1.4. (Solution efficace) Une action $a^* \in A$ est dite *efficace* dans le problème (2.1) si :

$$\nexists a \in A, a D a^*.$$

Une solution efficace est une action telle qu'il n'existe pas une autre action dans A qui permet d'améliorer la valeur d'un critère sans en détériorer au moins la valeur d'un autre.

Définition 2.1.5. On appelle *solution idéale* du problème (2.1) toute action $a^* \in A$ telle que

$$f_j(a^*) = \max_{a \in A} f_j(a), \quad \forall j \in \mathcal{J}.$$

Une telle action permet de maximiser tous les critères simultanément. Cependant dans les problèmes réels, une telle décision n'existe que très rarement vue la nature souvent conflictuelle des critères.

2.1.2 Approches de résolution des problèmes multicritères d'aide à la décision

Les méthodes multicritères d'aide à la décision comprennent l'ensemble des techniques qui, en se basant sur plusieurs critères, permettent d'éclairer, de façon objective le décideur. Plusieurs classifications de ces méthodes existent, l'une d'entre elles permet de les classer en trois grandes approches :

Approche du critère unique de synthèse Il s'agit d'évacuer toute situation d'incomparabilité et d'explicitier une règle (fonction d'agrégation) apportant une réponse synthétique, exhaustive et définitive au problème d'agrégation des performances [21].

Les méthodes par agrégation complète autorisent la compensation entre critères. Elles utilisent une fonction mathématique qui produit une valeur unique à partir des évaluations dans les différents critères. La moyenne, sous toutes ces formes, est un exemple de méthode d'agrégation complète, mais on peut aussi citer les méthodes MAUT (Multiple Attribute Utility Theory) et UTA (Utilités additives) [19, 18]. Ces méthodes conviennent bien aux problématiques, où les actions sont nombreuses.

Le principal inconvénient de ces méthodes concerne évidemment la complète transitivité. Ces méthodes établissent une fonction-critère unique, qui est certes, le fruit de jugements posés critère par critère, mais qui n'en revient pas moins à une agrégation finale mono-critère. Un autre inconvénient important est posé par la difficulté à déterminer la fonction d'agrégation, car toutes les nuances dans les préférences des décideurs doivent y être intégrées.

Approche de surclassement de synthèse Les méthodes d'analyse multicritère par agrégation partielle sont, en général, basées sur la comparaison des actions deux à deux. Cette comparaison s'effectue en considérant, critère par critère, les avantages et inconvénients d'une action vis-à-vis de l'autre. On peut ainsi déterminer quelle relation lie les deux actions considérées. Il peut s'agir d'une relation d'indifférence, d'incomparabilité ou de préférence forte ou faible. Cette étape aboutit à un graphe, qu'il faut analyser pour obtenir, soit la meilleure action, soit un tri des actions, ou encore un rangement.

Parmi les méthodes d'agrégation partielle, les plus connues sont les méthodes des familles ELECTRE [14, 17, 24, 25, 26, 4] et PROMETHEE [9, 15]. L'avantage fondamental de ces méthodes se situe dans la richesse des relations possibles entre deux actions. Les inconvénients de cette approche se situent essentiellement dans la forme du résultat. Il peut arriver que le décideur soit déçu de ne pas recevoir une réponse simple et définitive. En effet, le résultat final se base le plus souvent sur une analyse (une interprétation) du graphe des relations et cette analyse est presque toujours difficile et sensible (ces graphes sont généralement complexes). Un autre inconvénient est lié à la comparaison deux à deux des actions. Cette manière de procéder limite, pour des raisons pratiques, le nombre d'actions.

Approche du jugement interactif Le principe de ces méthodes est l'exploration interactive et itérative de l'ensemble des actions. Plus concrètement, lors d'une itération, une action, à priori intéressante est tout d'abord sélectionnée. Ensuite, on sélectionne un groupe d'actions relativement proches de l'action initiale. On compare alors les actions appartenant à ce groupe pour trouver une action qui soit préférée à l'action initiale. Cette dernière devient l'action initiale d'une nouvelle itération. Ces méthodes sont évidemment adaptées aux situations, où il existe un nombre quasi infini d'actions.

L'application d'une méthode d'agrégation locale demande, d'une part, que le décideur soit très disponible et, d'autre part, qu'il accorde totalement sa confiance à "l'homme d'étude". En effet, le contenu théorique de ces méthodes est souvent inaccessible à un non-spécialiste.

De plus, le décideur doit accepter une méthode qui fournit une solution, sans avoir forcément exploré l'ensemble des actions. Il y a donc un risque que le décideur n'ose pas arrêter les itérations. Les méthodes interactives les plus utilisées sont [26] : la méthode Stem, la méthode de Geoffrion, Dyer, Feinberg, la méthode du point de mire évolutif, la méthode du point de référence, la méthode PRIAM, etc.

2.2 Les méthodes ELECTRE

Les méthodes ELECTRE, dont l'acronyme désigne **E**limination **E**t **C**hoix **T**raduisant la **R**Ealité, regroupent une famille de méthodes d'aide à la décision dont la particularité est l'agrégation partielle via la construction de relations de comparaisons des performances de chaque couple d'actions. Contrairement aux méthodes d'optimisation classiques, ici on compare les solutions deux à deux, critère par critère mettant ainsi en avant une préférence/indifférence d'une action par rapport à une autre et aboutissant à une matrice de surclassement. Ces méthodes ont l'avantage d'accepter des situations d'incomparabilité et de prendre en charge également des critères qualitatifs et incommensurables.

2.2.1 Les problématiques de référence

Avant de présenter les méthodes de surclassement, il est nécessaire de définir clairement les notions de *problématique* et de *technique*. Cette distinction importante entre les deux notions est due à B.Roy et permet d'établir une typologie cohérente de la modélisation.

La **Problématique** est l'objectif poursuivi dans la modélisation. Autrement dit, la problématique est la façon dont le problème de décision est posé.

La **Technique** est l'outil utilisé pour atteindre cet objectif. Ainsi, un modèle relève d'une certaine technique, éventuellement de plusieurs techniques, et a été formalisé dans le cadre d'une certaine problématique.

Une situation où l'objectif visé est la découverte de la solution optimale correspond à une problématique d'optimisation. Par contre, la solution optimale peut être découverte grâce à une technique d'optimisation, ou approchée grâce à une technique heuristique ou de simulation.

Dans les méthodes multicritères d'aide à la décision (les méthodes de surclassement de synthèse), on distingue les problématiques de référence décrites dans le tableau suivant :

Prob	Objectif	Résultats
α	Choix d'un sous-ensemble aussi restreint que possible en vue d'un choix final : une seule action.	Un choix
β	Tri résultant d'une affectation de chaque action à une catégorie pré-définie.	Un tri/ une affectation
γ	Rangement obtenu en regroupant tout ou partie des actions en classes d'équivalence, ces classes étant ordonnées de façon complète ou partielle.	Un rangement/un classement

Tableau 2.1 – Les problématiques de référence

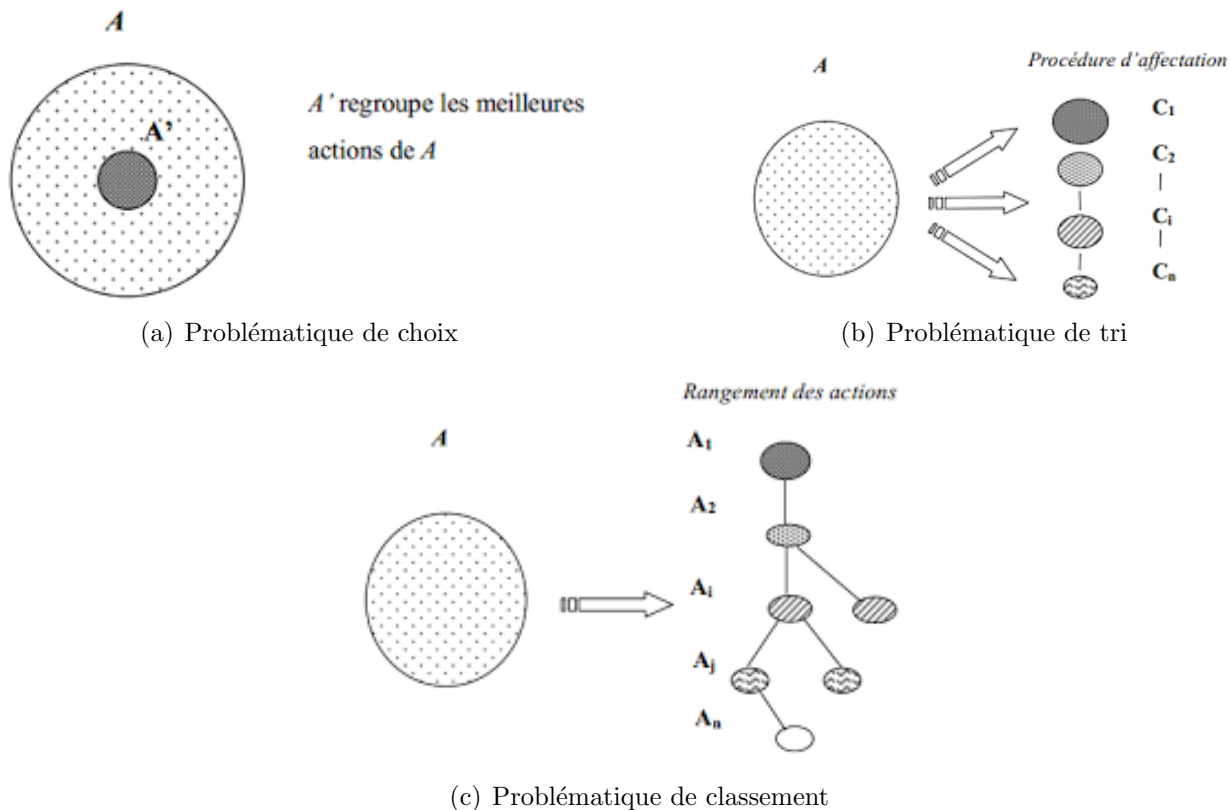


FIGURE 2.1 – Les problématiques de référence

2.2.2 Notations

Soient :

- $\mathcal{J} = \{1, \dots, N\}$ l'ensemble des indices des critères,
- $w_j \geq 0, \forall j = \overline{1, N}$ le poids associé à chaque critère,
- $J^+(a_i, a_k) = \{j \in \mathcal{J} | f_j(a_i) > f_j(a_k)\}$: l'ensemble des critères pour lesquels l'action a_i est préférée à l'action a_k ,

- $J^-(a_i, a_k) = \{j \in \mathcal{J} | f_j(a_i) < f_j(a_k)\}$: l'ensemble des critères pour lesquels l'action a_k est préférée à l'action a_i ,
- $J^=(a_i, a_k) = \{j \in \mathcal{J} | f_j(a_i) = f_j(a_k)\}$: l'ensemble des critères pour lesquels l'action a_i est équivalente à l'action a_k ,
- $W^+(a_i, a_k) = \sum_{j \in J^+(a_i, a_k)} w_j$: la somme des poids des critères appartenant à l'ensemble $J^+(a_i, a_k)$,
- $W^-(a_i, a_k) = \sum_{j \in J^-(a_i, a_k)} w_j$: la somme des poids des critères appartenant à l'ensemble $J^-(a_i, a_k)$.

2.2.3 La méthode ELECTRE I

La méthode ELECTRE I relève de la problématique de Choix [26, 21, 5]. Le problème est posé en terme de choix de la “meilleure” action.

Dans ce but et au moyen de la relation de surclassement S préalablement définie, il est nécessaire d'effectuer une partition de l'ensemble A des actions potentielles en deux sous-ensembles Noy et $A \setminus Noy$ complémentaires tels que :

- toute action appartenant à $A \setminus Noy$ est surclassée par au moins une action appartenant à Noy ,
- les actions appartenant à Noy sont incomparables entre elles.

Finalement, les actions appartenant à Noy seront les actions sélectionnées.

2.2.3.1 La relation de surclassement

La notion de surclassement a été créée afin de modéliser de façon réaliste les préférences du décideur. Elle est construite à la base des préférences du décideur sur chacun des critères.

Une relation de surclassement est une relation binaire S définie dans A telle que si aSb , étant donnée ce que l'on sait des préférences du décideur et étant donnée la qualité des évaluations des actions et la nature du problème, il y a suffisamment d'arguments pour admettre que a est au moins aussi bonne que b , sans qu'il ait de raison importante de refuser cette affirmation.

La relation de surclassement S dans la méthode ELECTRE I est construite en prenant appui sur une notion de concordance et une notion de discordance. Pour tout couple d'actions (a_i, a_k) , l'hypothèse de surclassement “ a_i surclasse a_k ” est vraie, si un test de concordance et un test de non discordance sont satisfaits.

2.2.3.2 Condition de concordance

Indice de concordance : Pour chaque couple d'actions (a_i, a_k) , l'indice de concordance C_{ik} est calculé comme suit :

$$C_{ik} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}: f_j(a_i) \geq f_j(a_k)} w_j}{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}.$$

Cet indice exprime combien l'hypothèse de départ " a_i surclasse a_k " concorde avec la réalité représentée par les évaluations des actions. Il est clair que cet indice varie entre 0 et 1.

Test de concordance : La question qui se pose est de savoir à partir de quelle valeur des indices C_{ik} , la concordance avec l'hypothèse de surclassement paraît suffisamment forte, pour admettre raisonnablement cette hypothèse comme vraie. Le paramètre introduit pour répondre à cette question est le **seuil de concordance** noté c . Ce seuil exprime le minimum de concordance requise pour que la proposition " a_i surclasse a_k " ne soit pas rejetée.

Le test de concordance sera donc satisfait si :

$$C_{ik} \geq c.$$

La satisfaction de ce test signifie que l'importance des critères pour lesquels l'action a_i est préférée à l'action a_k est suffisamment forte. La relation $C_{ik} < c$ implique le rejet immédiat de l'hypothèse de surclassement.

2.2.3.3 Condition de non-discordance

Indice de discordance : Le test de non-discordance est subordonné au test de concordance. Pour chaque couple d'actions (a_i, a_k) , l'ensemble $J^-(a_i, a_k)$ des critères discordants est recherché. Ensuite, la différence entre l'évaluation de l'action a_k et celle de l'action a_i est trouvée pour chaque critère discordant. Le maximum de ces différences sera divisé par un facteur de normalisation $\delta = \max_{j \in \mathcal{J}, a_i, a_k \in A} [f_j(a_i) - f_j(a_k)]$. Ce quotient est appelé **indice de discordance** noté D_{ik} :

$$D_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } J^-(a_i, a_k) = \emptyset, \\ \frac{1}{\delta} \max\{g_j(a_k) - f_j(a_i)\} & \text{si } j \in J^-(a_i, a_k). \end{cases}$$

Cet indice donne la mesure de l'opposition manifestée par le(s) critère(s) discordant(s) à l'acceptation de l'hypothèse de surclassement ; il varie évidemment entre 0 et 1.

Test de non discordance : Jusqu'à quel point l'opposition des critères discordants reste elle tolérable vis-à-vis de l'acceptation de l'hypothèse de surclassement ? Le paramètre introduit pour répondre à cette question est le **seuil de discordance** noté d .

Ce seuil exprime le maximum de discordance tolérée pour que l'hypothèse " a_i surclasse a_k " ne soit pas rejetée.

Le test de non-discordance sera donc satisfait si

$$D_{ik} \leq d.$$

La satisfaction de ce test signifie que l'opposition des critères discordants par rapport à l'hypothèse " a_i surclasse a_k " n'est pas suffisamment forte pour entraîner le rejet de cette hypothèse, si toutefois le test de concordance a été préalablement satisfait.

2.2.3.4 Construction de la relation de surclassement

Une action a_i "surclasse" a_k si, d'une part, par définition, les critères pour lesquels l'action a_i est au moins aussi bonne que l'action a_k sont suffisamment importants et si, d'autre part, la prise en considération des critères restants n'entraîne pas une opposition trop vigoureuse à cette proposition.

Pour la méthode ELECTRE I, cette définition est exprimée par les deux conditions suivantes :

$$C_{ik} \geq c \quad \text{et} \quad D_{ik} \leq d.$$

Dans ce cas, on peut affirmer que l'action a_i surclasse l'action a_k :

$$a_i S a_k \iff \begin{cases} C_{ik} \geq c \\ \text{et} \\ D_{ik} \leq d. \end{cases}$$

2.2.3.5 Exploitation de la relation de surclassement

La relation de surclassement peut être représentée par un graphe $G = (A, U)$ avec :

- A : l'ensemble des actions, tel que chaque action de A représente un sommet du graphe.
- $U = \{u = (a_i, a_k) : \text{si } a_i S a_k\}$ l'ensemble des arcs.

On recherche un sous-ensemble *Noy* d'actions tel que toute action qui n'est pas dans *Noy* est surclassée par au moins une action dans *Noy* et les actions de *Noy* sont incomparables entre elles, c'est à dire :

$$\begin{cases} \forall b \in A \setminus \text{Noy}, \exists a \in \text{Noy} : & a S b, \\ \forall a, b \in \text{Noy} : & a \bar{S} b. \end{cases}$$

L'ensemble *Noy* est appelé en théorie des graphes *Noyau du graphe* et des algorithmes existent pour le déterminer lorsqu'il existe.

2.2.4 La méthode ELECTRE II

La méthode ELECTRE II relève de la problématique γ (Classement). Elle vise à munir l'ensemble A des actions potentielles d'une structure de préordre afin de faciliter le choix. En résumé, cette méthode a pour but de classer les actions potentielles, des "meilleures" jusqu'aux "moins bonnes", en tolérant les ex-aequo.

Il faut remarquer qu'en problématique γ , il n'est pas tenu compte de la valeur intrinsèque de chaque action, mais seulement de sa valeur par rapport aux autres actions.

2.2.4.1 La relation de surclassement

La méthode ELECTRE II utilise, tout comme la méthode ELECTRE I, une relation de surclassement. Cependant, la distinction est faite entre deux sortes de surclassement :

- Le surclassement fort, qui repose sur des bases solides et qui est avancé avec une grande certitude ;
- Le surclassement faible, qui repose sur des bases moins solides et qui est avancé avec une faible certitude.

2.2.4.2 Condition de concordance

L'indice de concordance dans ELECTRE II est défini exactement de la même manière que dans ELECTRE I.

$$C_{ik} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}: f_j(a_i) \geq f_j(a_k)} w_j}{\sum_{j \in \mathcal{J}} w_j}.$$

Trois seuils (au lieu d'un seul dans ELECTRE I) sont définis ; ils sont notés c^+ , c^0 , c^- et suivent toujours l'ordre $c^+ \geq c^0 \geq c^-$.

La relation $c_{ik} \geq c^+$ respectivement ($c_{ik} \geq c^0$ et $c_{ik} \geq c^-$) correspond à la satisfaction du test de concordance avec une certitude forte (respectivement moyenne et faible). Néanmoins, cette relation est nécessaire mais non suffisante à la satisfaction de ce test. Il existe une condition supplémentaire :

$$\frac{W^+(a_i, a_k)}{W^-(a_i, a_k)} \geq 1.$$

Cette inégalité additionnelle a été introduite afin de n'aboutir à la configuration $a_i S a_k$ et $a_k S a_i$ (cas d'indifférence) que si $W^+(a_i, a_k) = W^-(a_i, a_k)$ [21].

Pour résumer, le test de concordance est vérifié ssi :

$$\left. \begin{array}{l} c_{ik} \geq c^+ \\ \text{ou} \\ c_{ik} \geq c^0 \\ \text{ou} \\ c_{ik} \geq c^- \end{array} \right\} \text{ et } \frac{W^+(a_i, a_k)}{W^-(a_i, a_k)} \geq 1.$$

2.2.4.3 Condition de non-discordance

Il s'agit de définir dans quelles limites l'opposition des critères discordants à l'hypothèse de surclassement doit se contenir pour que cette dernière puisse rester acceptable.

Les limites que la discordance ne devra pas dépasser sont fixées pour chaque critère, au nombre de deux par critère : elles sont désignées par le terme de "seuils de discordance" notés D_1 et D_2 , tels que : $D_2 \leq D_1$.

Le test de non-discordance peut être résumé, pour $j \in J^-(a_i, a_k)$, comme suit :

- Si $f_j(a_k) - f_j(a_i) \leq D_{2(j)}$, alors il y a une certitude forte que le critère f_j ne présente pas une opposition majeure à l'hypothèse de surclassement.
- Si $D_{2(j)} \leq f_j(a_k) - f_j(a_i) \leq D_{1(j)}$, alors il y a une certitude faible que le critère f_j ne présente pas une opposition majeure à l'hypothèse de surclassement.

2.2.4.4 Construction de la relation de surclassement

Tout comme dans ELECTRE I, la construction de la relation de surclassement repose sur la réalisation des tests de concordance et de non-discordance. Mais comme ELECTRE II admet plusieurs niveaux d'acceptation tant au niveau de la concordance que de la discordance, les deux tests sont imbriqués l'un dans l'autre.

Par ailleurs, la méthode repose non pas sur une, mais sur deux relations de surclassement, correspondant à des niveaux de risque différents :

- Un surclassement fort S_F traduisant l'assertion " l'action a_i surclasse l'action a_k " avec une certitude forte sur l'acceptation de l'hypothèse.
- Un surclassement faible S_f traduisant l'assertion " l'action a_i surclasse l'action a_k " avec une certitude faible sur l'acceptation de l'hypothèse.

Les conditions de surclassement fort S_F et faible S_f sont définies comme suit :

Surclassement fort $a_i S_F a_k$:

$$a_i S_F a_k \iff \left\{ \begin{array}{l} C_{ik} \geq c^+, \\ f_j(a_k) - f_j(a_i) \leq D_{1(j)} \quad \forall j \in J, \\ \frac{W^+(a_i, a_k)}{W^-(a_i, a_k)} \geq 1. \end{array} \right. \quad \text{et/ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{ik} \geq c^0, \\ f_j(a_k) - f_j(a_i) \leq D_{2(j)} \quad \forall j \in J, \\ \frac{W^+(a_i, a_k)}{W^-(a_i, a_k)} \geq 1. \end{array} \right.$$

Surclassement faible $a_i S_f a_k$:

$$a_i S_f a_k \iff \left\{ \begin{array}{l} C_{ik} \geq c^-, \\ f_j(a_k) - f_j(a_i) \leq D_{1(j)} \quad \forall j \in J, \\ \frac{W^+(a_i, a_k)}{W^-(a_i, a_k)} \geq 1. \end{array} \right.$$

L'organigramme donné dans la Fig.(2.2) reproduit le cheminement complet de la construction de la relation de surclassement, et ceci pour tout couple (a_i, a_k) avec $a_i, a_k \in A$.

2.2.4.5 Exploitation de la relation de surclassement

Le but recherché par ELECTRE II est de classer les actions potentielles depuis la meilleure jusqu'à la moins bonne.

Pour y arriver, trois préordres sont établis : deux préordres totaux V_1 et V_2 et un préordre partiel \bar{V} .

L'élimination des circuits éventuels des graphes de surclassement est une condition préliminaire à l'application de l'algorithme de classement. Puisque les actions formant un circuit constituent une classe d'équivalence, tout circuit sera remplacé par un sommet de substitution.

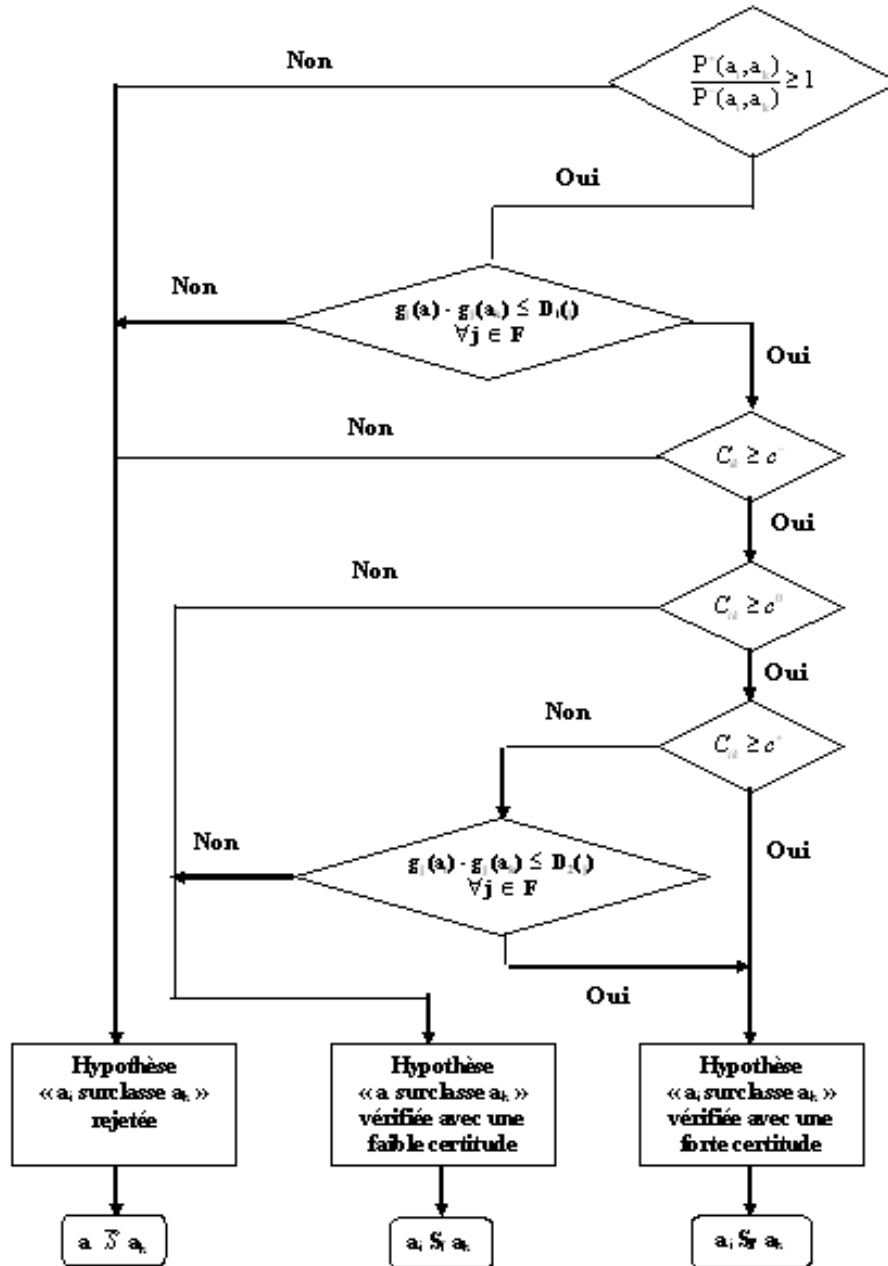


FIGURE 2.2 – Construction des relations de surclassement S_f et S_F

Construction du premier préordre total : Algorithme de classement direct.

L'organigramme est donné dans la Figure (2.3).

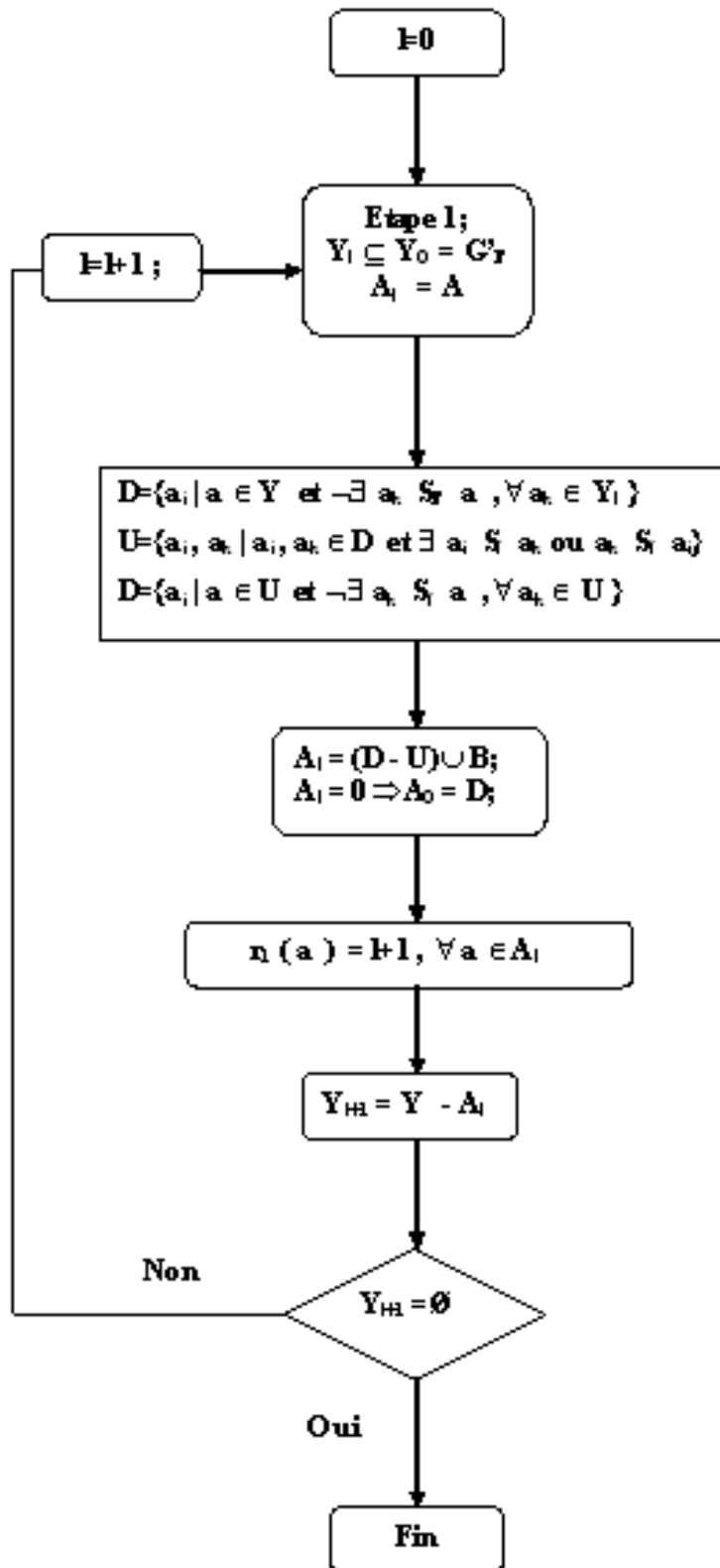


FIGURE 2.3 – Algorithme de classement direct

- A chaque nouvelle étape l , les actions déjà classées sont enlevées du graphe de surclassement fort ; les actions restantes constituent l'ensemble A_l , qui est un sous-ensemble de A , et leurs relations sont fournies par le graphe Y_l , qui est un sous graphe du G'_F .
- Dans le graphe Y_l , tous les sommets qui ne sont pas surclassés sont recensés : ils forment l'ensemble D .
- Les éléments de D qui sont reliés entre eux dans le graphe de surclassement faible G_f constituent l'ensemble U .
- L'ensemble B contient tous les sommets de U qui ne sont pas surclassés par un autre sommet de U .

La classe d'équivalence des actions classées à la l^{eme} étape, désignée par A_l , est définie par l'union des ensembles $D - U$ et B . L'ensemble $D - U$ représente tous les sommets qui :

1. n'ont pas encore été classés.
 2. ne sont surclassés par aucun sommet du graphe Y_l , qui n'est autre que le graphe fort réduit, G'_F duquel ont été enlevés les sommets (et arcs correspondants) déjà classés ;
 3. n'ont pas de relation de type "surclassement faible" entre eux.
- L'ensemble B représente tous les sommets qui satisfont aussi aux conditions 1) et 2) ci-dessus, mais ont comme troisième condition :
 - 3) surclassent, par des relations de type "Surclassement faible", d'autres sommets qui remplissent les conditions 1) et 2).
 - A toutes les actions classées à la l^{eme} étape (et qui forment par conséquent la classe d'équivalence A_l) est attribué le rang $l + 1$; de cette manière, à chaque action potentielle correspond un rang obtenu par le classement direct et si $rang\ r_1(a_i) < rang\ r_1(a_k)$, ceci signifie que l'action a_i est meilleure que l'action a_k .
- Les sommets classés à la l^{eme} étape sont retirés du graphe de surclassement fort, ce qui donne le nouveau sous graphe Y_{l+1} .
- Enfin, si Y_{l+1} ne comporte aucune action sommet, le classement est terminé ; autrement il continue avec l'étape $l + 1$.

Cette procédure revient donc à classer les sommets du graphe en fonction de la longueur des chemins incidents qui y aboutissent dans l'ordre croissant de ces longueurs.

Construction du second préordre total : Algorithme de classement inverse. Pour le classement inverse, le même algorithme est utilisé en effectuant quelques modifications :

- Inverser la direction des arcs dans les graphes G'_F et G_f .
- Une fois le rang obtenu comme précédemment ($r'_2(a_i) = l + 1$), il ne reste plus qu'à l'ajuster $r_2(a_i) = 1 + r'_2(a_i)_{max} - r'_2(a_i)$

Cette procédure revient donc à classer les sommets du graphe en fonction de la longueur des chemins qui en sont issus dans l'ordre décroissant de ces longueurs.

Construction du préordre partiel final : Notons que les deux préordres obtenus ne sont généralement pas les mêmes ;

On peut alors construire un classement final, respectant les incomparabilités. Ce classement (préordre partiel) est l'intersection (au sens mathématique du terme) des deux préordres totaux. Concrètement, pour construire ce préordre final il faudra suivre les règles suivantes :

- une action du classement final ne peut être placée devant une autre que si elle est située devant celle-ci dans un des deux classements et devant elle ou ex-aequo avec elle dans l'autre ;
- deux actions ne peuvent être ex-aequo dans le classement final que si elles appartiennent à la même classe dans les deux classements ;
- deux actions sont incomparables si l'une est devant l'autre dans l'un des deux classements et l'autre devant la première dans l'autre classement.

2.2.5 La méthode ELECTRE Tri

La méthode ELECTRE Tri relève de la problématique β (Tri/Affectation). Le problème est posé en termes d'attribution de chaque action à une catégorie prédéfinie [21, 3]. Des actions de référence sont utilisées pour segmenter l'espace des critères en catégories. Chaque catégorie est bornée inférieurement et supérieurement par deux actions de référence et chaque action de référence sert donc de borne à deux catégories, l'une supérieure et l'autre inférieure.

Cette méthode présente trois intérêts majeurs qui sont :

1. Juger une action pour elle-même indépendamment des autres.
2. Fixer une ou plusieurs valeurs de référence par exemple des normes légales ou bien des résultats minimaux pour l'acceptation des candidats.
3. Considérer un nombre d'actions plus important que les autres méthodes.

2.2.5.1 Définition des actions de référence

Les actions de référence sont choisies de telle manière qu'elles soient parfaitement comparables entre elles : chacune des actions surclasse ou est surclassée par toutes les autres. On parle alors de segmentation simple. Une fois les actions de référence choisies, il faut fermer les catégories de classement. Pour cela, on procède de la manière suivante :

- on prend une action qui borne inférieurement la catégorie la plus basse,
- on rajoute une action qui borne supérieurement la catégorie la plus haute.

2.2.5.2 Indice de concordance

Indice de concordance par critère Cet indice permet de mesurer à quel point a_i est aussi bien que a_k . Dans ELECTRE Tri les actions de références sont définies pour borner inférieurement

la catégorie la plus basse et supérieurement la catégorie la plus haute. Chaque action a_i sera donc comparée à une action de référence b^k .

$$c_j(a_i, b^k) = \begin{cases} 0 & p_j \leq f_j(b^k) - f_j(a_i), \\ \frac{f_j(a_i) - f_j(b^k) + p_j}{p_j - q_j} & q_j < f_j(b^k) - f_j(a_i) < p_j, \\ 1 & f_j(b^k) - f_j(a_i) \leq q_j. \end{cases}$$

avec $p_j > q_j$.

Indice de concordance globale Cet indice affirme dans quelle mesure il y a concordance avec l'hypothèse $a_i \succ b^k$.

$$C_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^N w_j c_j(a_i, b^k)}{\sum_{j=1}^N w_j}$$

2.2.5.3 Indice de Discordance

Pour définir la discordance, un seuil de véto noté v_j est introduit pour chaque critère. Il s'agit de la valeur de $f_j(b^k) - f_j(a_i)$ à partir de laquelle il paraît évident de refuser le surclassement de b^k par a_i :

$$d_j(a_i, b^k) = \begin{cases} 0 & f_j(b^k) - f_j(a_i) < p_j, \\ \frac{f_j(b^k) - f_j(a_i) - p_j}{v_j - p_j} & p_j \leq f_j(b^k) - f_j(a_i) \leq v_j, \\ 1 & f_j(b^k) - f_j(a_i) > v_j. \end{cases}$$

avec $v_j > p_j > q_j$.

2.2.5.4 Degré de crédibilité

Ce degré a été établi dans la méthode ELECTRE III, on parlera toujours d'une relation de surclassement mais cette relation est floue car il existe des couples pour lesquels elle est indiscutable et d'autres pour lesquels elle l'est moins. C'est pour cela que le degré de crédibilité a été établi :

$$\delta_{ik} = C_{ik} \prod_{j \in \bar{J}} \frac{1 - d_j(a_i, b^k)}{1 - c_j(a_i, b^k)}, \quad \bar{J} = \{j \in J / d_j(a_i, b^k) > C_{ik}\}.$$

Ce degré n'est autre que l'indice de concordance affaibli par l'indice de discordance, mais cet indice contribue à l'affaiblissement uniquement si il est supérieur à l'indice de concordance.

2.2.5.5 Etablissement de la relation de surclassement

Cette relation est établie à partir du degré de crédibilité et d'un seuil de discrimination λ .

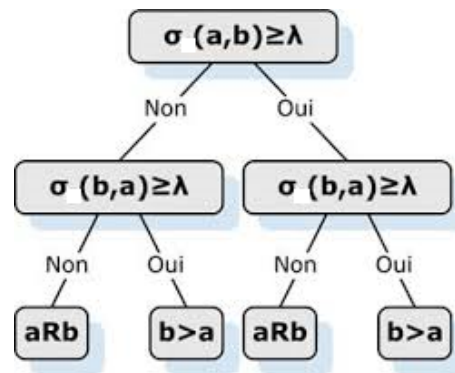


FIGURE 2.4 – Relation de Surclassement ELECTRE Tri

2.2.5.6 Procédures d'affectation

Avant d'aborder les procédures d'affectations quelques exigences doivent être respectées.

1. Aucune action ne peut être indifférente à plus d'une action de référence.
2. Toute action est attribuée à une et une seule catégorie.
3. L'affectation d'une action ne dépend pas de l'affectation des autres actions.
4. Si $a_i D a_k$ alors a_i doit être affectée à une catégorie supérieure ou égale à celle de a_k .
5. L'affectation des actions aux catégories doit être conforme à la définition des actions de référence.
6. Lorsque deux actions se comparent de manière identique avec les actions de référence, elles doivent être affectées à la même catégorie.
7. Le regroupement de deux catégories voisines ne doit pas modifier l'affectation des actions aux catégories non concernées.

Procédure d'affectation Pessimiste :

Objectif : Pousser les actions dans les catégories les plus basses possible.

Principe : Affecter l'action à une catégorie de façon telle que cette action surclasse l'action de référence basse de cette catégorie $a S b^k \Rightarrow a \in C^{k+1}$.

Sens : De haut en bas.

Procédure d'affectation Optimiste :

Objectif : Pousser les actions dans les catégories les plus hautes possible.

Principe : Affecter l'action à une catégorie de façon telle que l'action de référence haute de cette catégorie soit préférée à cette action $b^k > a \Rightarrow a \in C^k$.

Sens : De bas en haut.

2.2.6 Les autres méthodes ELECTRE

2.2.6.1 La méthode ELECTRE III

La méthode ELECTRE III relève de la problématique γ : son but est de classer les actions potentielles depuis les "meilleures" jusqu'aux "moins bonnes".

Cette méthode suit les grands principes déjà énoncés dans la présentation de la méthode ELECTRE II (construction de la relation de surclassement, élaboration de deux classements antagonistes, synthèse d'un classement final).

Avec l'évolution de la modélisation des préférences sont apparues des procédures qui prennent explicitement en compte des seuils d'indifférence et de préférence. La méthode ELECTRE III a la particularité de se baser sur une relation de surclassement évaluée qui a le mérite par rapport à une relation ordinaire d'être moins sensible aux variations des données et des paramètres introduits.

2.2.6.2 La méthode ELECTRE IV

La méthode ELECTRE IV qui relève aussi de la problématique γ (procédure de classement) témoigne d'une sophistication de plus en plus poussée.

ELECTRE II et ELECTRE III ont certes inspiré cette méthode mais, néanmoins, la plus grande originalité est qu'il n'y a plus de poids attribué à chaque critère.

ELECTRE IV utilise, comme ELECTRE III, des pseudo-critères, c'est-à-dire des critères associés à un seuil de préférence stricte et à un seuil d'indifférence.

2.2.6.3 La méthode ELECTRE IS

La méthode ELECTRE IS est une adaptation de la méthode ELECTRE I (problématique α) permettant d'utiliser les pseudo-critères. Pour choisir la meilleure action, une partition de l'ensemble des actions potentielles A en deux sous-ensembles doit être réalisée : le noyau N comprend la meilleure action et l'ensemble $A \setminus N$ qui comprend les actions surclassées par des actions appartenant au noyau.

2.3 Les méthodes PROMETHEE

Les méthodes PROMETHEE (Preference Ranking Organisation METHod for Enrichment Evaluations) ont été proposées pour la première fois en 1982 par J.P Brans [8, 9]. Depuis lors elles n'ont cessé de faire l'objet de développements et d'adaptations complémentaires.

2.3.1 Enrichissement de la structure de préférence

La notion de critère généralisé est définie à partir d'une fonction de préférence. Elle est introduite afin de tenir compte de l'amplitude des écarts entre les évaluations sur chacun des

critères. Cette étape essentielle peut être facilement comprise par le décideur car tous les paramètres nécessaires à la définition des critères généralisés ont une interprétation économique ou physique [10].

2.3.1.1 Fonctions de préférence et critères généralisés

Soit un critère $f_j(\cdot) : A \rightarrow \mathbb{R}$ à maximiser et soit $d_j(a, b) = f_j(a) - f_j(b)$, l'écart entre les évaluations $f_j(a)$ et $f_j(b)$.

Considérons une fonction $P_j(a, b)$ donnant le degré de préférence de a sur b en fonction de $d_j(a, b)$.

$$P_j(a, b) = P_j[d_j(a, b)].$$

Supposons que ce degré de préférence soit normé de telle sorte que $0 \leq P_j(a, b) \leq 1$ et que

$$\begin{cases} P_j(a, b) = 0 & \text{si } d_j(a, b) \leq 0, & \text{Pas de préférence,} \\ P_j(a, b) \approx 0 & \text{si } d_j(a, b) > 0, & \text{préférence faible,} \\ P_j(a, b) \approx 1 & \text{si } d_j(a, b) \gg 0, & \text{préférence forte,} \\ P_j(a, b) = 1 & \text{si } d_j(a, b) \gg \gg 0, & \text{préférence stricte.} \end{cases}$$

Il semble naturel de choisir pour $P_j(a, b)$ une fonction non décroissante s'annulant pour $d_j \leq 0$ et pouvant se représenter graphiquement comme suit :

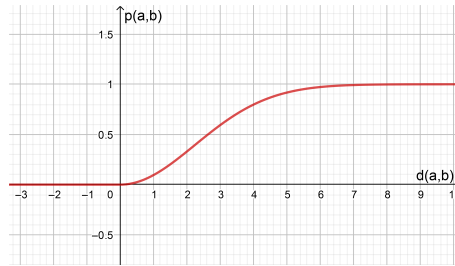


FIGURE 2.5 – Fonction de préférence

Le couple $(f_j(\cdot), P_j(\cdot, \cdot))$ est appelé *critère généralisé*. Il s'agit simplement du critère d'évaluation complété par sa fonction de préférence.

Pour le choix du critère généralisé, un ensemble de six types est proposé au décideur :

Type I Critère Usuel :

$$P_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_j \leq 0, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour ce type de critère, dès qu'il y a un écart, il y a préférence stricte pour l'action ayant l'évaluation la plus élevée.

Type II Critère en U :

$$P_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_j \leq q_j, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour ce type de critère, les actions a et b sont indifférentes aussi longtemps que l'écart $d_j(a, b)$ ne dépasse pas un seuil $q_j \geq 0$ appelé *seuil d'indifférence*. Au delà de ce seuil, la préférence est stricte.

Type III Critère en V :

$$P_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_j \leq 0, \\ \frac{d_j}{p_j}, & \text{si } d_j \leq p_j, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un tel critère permet une préférence progressive de a sur b en fonction de l'écart $d_j(a, b)$. Le degré de préférence croît linéairement jusqu'à ce qu'un seuil $p_j > 0$ (seuil de préférence) soit atteint. Au-delà de ce seuil, la préférence est stricte.

Type IV Critère à palier :

$$P_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_j \leq q_j, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } q_j < d_j \leq p_j, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur ce critère, a et b sont considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart $d_j(a, b)$ ne dépasse pas q_j ; entre q_j et p_j le degré de préférence est faible et au-delà de p_j de la préférence est stricte ($p_j > q_j \geq 0$).

Type V Critère Linéaire :

$$P_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_j \leq q_j, \\ \frac{d_j - q_j}{p_j - q_j}, & \text{si } q_j < d_j \leq p_j, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour ce critère également, a et b sont considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart $d_j(a, b)$ ne dépasse pas q_j ; entre q_j et p_j le degré de préférence croît linéairement et au delà de p_j de la préférence est stricte ($p_j > q_j \geq 0$).

Type VI Critère Gaussien :

$$P_j(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_j \leq 0, \\ 1 - e^{-\frac{d_j^2}{2s_j^2}}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fois, le degré de préférence croît de façon continue en fonction de d_j . Un seul s_j doit être fixé.

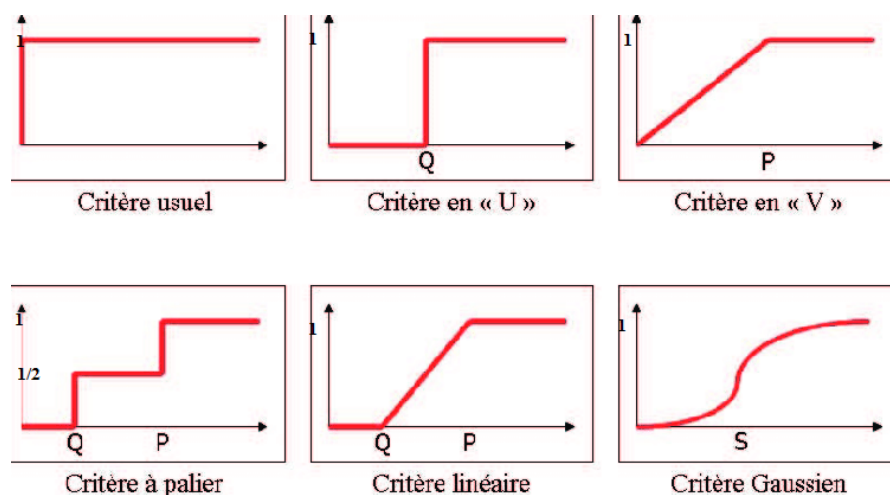


FIGURE 2.6 – Les critères Généralisés

2.3.1.2 Indice de préférence multicritère

Soit $\pi(a, b) = \sum_{j=1}^N P_j(a, b) \times w_j$, ($\sum_{j=1}^N w_j = 1$). L'indice $\pi(a, b)$ est une mesure de préférence de a sur b sur l'ensemble des critères. Plus un critère a de l'importance plus son poids est élevé, ce qui amplifie le rôle de $P_j(a, b)$ dans le calcul de $\pi(a, b)$. Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi(a, a) &= 0 \\ 0 &\leq \pi(a, b) \leq 1 \end{aligned}$$

2.3.1.3 Relation de surclassement

Le graphe valué $(A, \pi(\cdot, \cdot))$, ayant pour sommets les actions de A et tel que $\forall a, b \in A$, les arcs (a, b) et (b, a) existent et ont comme valeurs respectives $\pi(a, b)$ et $\pi(b, a)$, détermine la relation de surclassement valuée de PROMETHEE.

2.3.1.4 Flux de surclassement

Flux de surclassement positif

Soit :

$$\phi^+(a_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{x \in A} \pi(a_i, x).$$

Ce flux exprime le caractère *surclassant* de l'action a_i face aux $(m-1)$ autres actions, ou encore sa *puissance*. $\phi^+(a_i)$ est d'autant plus grand que a_i surclasse fortement les autres actions.

Flux de surclassement négatif

Soit :

$$\phi^-(a_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{x \in A} \pi(x, a_i).$$

Ce flux exprime le caractère *surclassé* de l'action a_i face aux $(m-1)$ autres actions, ou encore sa *faiblesse*. $\phi^-(a_i)$ est d'autant plus petit que a_i est peu surclassé par les autres actions.

Flux de surclassement net

Soit :

$$\phi(a_i) = \phi^+(a_i) - \phi^-(a_i).$$

Le flux net exprime le bilan des flux positif et négatif de l'action a_i . Plus $\phi(a_i)$ est grand meilleure est l'action a_i .

2.3.2 PROMETHEE I : Rangement partiel

Les flux positif et négatif permettent de ranger les actions de A de façon naturelle. Désignons par (S^+, I^+) et (S^-, I^-) les deux préordres complets induits par ces flux :

$$\begin{cases} a_i S^+ a_k & \Leftrightarrow \phi^+(a_i) > \phi^+(a_k); \\ a_i I^+ a_k & \Leftrightarrow \phi^+(a_i) = \phi^+(a_k). \end{cases}$$

Une action est d'autant meilleure que son flux positif est élevé.

$$\begin{cases} a_i S^- a_k & \Leftrightarrow \phi^-(a_i) < \phi^-(a_k); \\ a_i I^- a_k & \Leftrightarrow \phi^-(a_i) = \phi^-(a_k). \end{cases}$$

Une action est d'autant meilleure que son flux négatif est faible.

PROMETHEE I construit un rangement partiel en prenant l'intersection des ces deux préordres :

$$\begin{aligned} a_i P^{(1)} a_k & \Leftrightarrow \begin{cases} a_i S^+ a_k \text{ et } a_i S^- a_k; \\ a_i S^+ a_k \text{ et } a_i I^- a_k; \\ a_i I^+ a_k \text{ et } a_i S^- a_k. \end{cases} \\ a_i I^{(1)} a_k & \Leftrightarrow a_i I^+ a_k \text{ et } a_i I^- a_k \\ a_i R^{(1)} a_k & \text{ sinon} \end{aligned}$$

où $(P^{(1)}, I^{(1)}, R^{(1)})$ désignent respectivement la préférence, l'indifférence et l'incomparabilité dans PROMETHEE I.

2.3.3 PROMETHEE II : Rangement complet

Dans certain cas, le décideur souhaite disposer d'un rangement complet de toutes les actions. PROMETHEE II fournit un tel rangement. Il est obtenu en considérant le flux net :

$$\begin{cases} a_i P^{(2)} a_k & \Leftrightarrow \phi(a_i) > \phi(a_k); \\ a_i I^{(2)} a_k & \Leftrightarrow \phi(a_i) = \phi(a_k). \end{cases}$$

où $(P^{(2)}, I^{(2)})$ désignent respectivement la préférence, l'indifférence dans PROMETHEE II.

2.4 Exemple récapitulatif sur les méthodes ELECTRE I et II

Dans cette section, nous allons illustrer le fonctionnement de quelques méthodes présentées dans ce chapitre. Cet exemple a été tiré de [11].

2.4.1 Présentation des données

On considère les notes de cinq élèves dans cinq matières. Ces données sont réunies dans Tab.2.2 (a).

On cherche à déterminer quel est le meilleur élève suivant trois critères :

1. f_1 : la moyenne des notes sur l'ensemble des matières doit être la plus élevée possible.
2. f_2 : la note minimale doit être strictement supérieure à 8.
3. f_3 : les variations des notes autour de la moyenne doivent être les plus petites possibles.

Voici les définitions mathématiques des différents critères :

$$f_1(a_i) = \frac{\sum_{Mat} (Note(a_i, Mat))}{5}$$

$$f_2(a_i) = \begin{cases} 10, & \text{Si } \min_{Mat} (Note(a_i, Mat)) > 8; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

$$f_3(a_i) = \frac{\sqrt{\sum_{Mat} (Note(a_i, Mat) - f_1(a_i))^2}}{5}$$

où :

- a_i désigne un élève E_i , $i = \overline{1, 5}$.
- $Mat \in \{M1, M2, M3, M4, M5\}$.
- $Note(a_i, Mat)$: désigne la note de l'élève a_i dans la matière Mat .

Il faut maintenant choisir des poids pour les différents critères. Par ce choix, on définit un ordre d'importance dans les critères. Par exemple, on veut que la moyenne soit le critère principal et que les deux autres critères aient le même poids. Donc on peut fixer $w_1 = 0.5$, $w_2 = w_3 = 0.25$. Les valeurs de chaque élève pour chaque critère sont réunies dans le Tab. 2.2(b).

Les échelles des différents critères ne conviennent pas, nous allons donc recalibrer les différentes valeurs :

- Pour le critère f_1 , à 10 on associe 0 et à 14.6 on associe 20.
- Pour le critère f_2 , à 0 on associe 0 et à 10 on associe 20.
- Pour le critère f_3 , à 0.5366 on associe 20 et à 3.08 on associe 0.

Ici, les valeurs des amplitudes des échelles (les variables δ_j) valent toutes 20 (les valeurs de chaque critère sont réparties sur un intervalle $[0,20]$).

Pour les valeurs intermédiaires de chaque critère, on effectue une interpolation linéaire en utilisant les informations que l'on vient de fournir. On obtient alors les valeurs contenues dans le Tab.2.2(c).

	M1	M2	M3	M4	M5
E1	7	13	8	12	11
E2	8	11	11	12	11
E3	20	2	10	3	15
E4	16	14	16	14	13
E5	12	12	8	8	10

(a)

	f_1	f_2	f_3
E1	10.2	0	1.035
E2	10.6	10	0.606
E3	10	0	3.08
E4	14.6	10	0.5366
E5	10	10	0.8

(b)

	f_1	f_2	f_3
E1	0.87	0	16.08
E2	2.61	20	19.45
E3	0	0	0
E4	20	20	20
E5	0	20	17.9

(c)

Tableau 2.2 – (a) :Notes de cinq élèves dans cinq matières. (b) :Valeurs des critères pour chaque élève. (c) :Valeurs recalibrées des critères pour chaque élève

2.4.2 La méthode ELECTRE I

Afin de construire la relation de surclassement, les tests de concordance et de non discordance doivent être vérifiés.

2.4.2.1 Concordance

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	/	\emptyset	{1,3}	\emptyset	{1}
a_2	{1,2,3}	/	{1,2,3}	\emptyset	{1,3}
a_3	\emptyset	\emptyset	/	\emptyset	\emptyset
a_4	{1,2,3}	{1,3}	{1,2,3}	/	{1,3}
a_5	{2,3}	\emptyset	{2,3}	\emptyset	/

 $J^+(a_i, a_k) =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	/	\emptyset	{2}	\emptyset	\emptyset
a_2	\emptyset	/	\emptyset	{2}	{2}
a_3	{2}	\emptyset	/	\emptyset	{1}
a_4	\emptyset	{2}	\emptyset	/	{2}
a_5	\emptyset	{2}	{1}	{2}	/

 $J^-(a_i, a_k) =$

Tableau 2.3 – Les indices $J^+(a_i, a_k)$ et $J^-(a_i, a_k)$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	/	0	0.75	0	0.5
a_2	1	/	1	0	0.75
a_3	0	0	/	0	0
a_4	1	0.75	1	/	0.75
a_5	0.5	0	0.5	0	/

 $W^+(a_i, a_k) =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	/	0	0.25	0	0
a_2	0	/	0	0.25	0.25
a_3	0.25	0	/	0	0.5
a_4	0	0.25	0	/	0.25
a_5	0	0.25	0.5	0.25	/

 $W^-(a_i, a_k) =$

Tableau 2.4 – Les poids $W^+(a_i, a_k)$ et $W^-(a_i, a_k)$

$$C_{ik} = \begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline a_1 & / & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ a_2 & 1 & / & 1 & 0.25 & 1 \\ a_3 & 0.25 & 0 & / & 0 & 0.5 \\ a_4 & 1 & 0.75 & 1 & / & 1 \\ a_5 & 0.5 & 0.25 & 1 & 0.25 & / \end{array}$$

Tableau 2.5 – Les indices de concordance

2.4.2.2 Non discordance

$$J^-(a_i, a_k) = \begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline a_1 & / & \{1,2,3\} & \emptyset & \{1,2,3\} & \{2,3\} \\ a_2 & \emptyset & / & \emptyset & \{1,3\} & \emptyset \\ a_3 & \{1,3\} & \{1,2,3\} & / & \{1,2,3\} & \{2,3\} \\ a_4 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & / & \emptyset \\ a_5 & \{1\} & \{1,3\} & \emptyset & \{1,3\} & / \end{array}$$

(a)

$$D_{ik} = \begin{array}{c|ccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ \hline a_1 & / & 0.087 & 0 & 0.196 & 0.196 \\ a_2 & 0 & / & 0 & 0.13 & 0 \\ a_3 & 0.0435 & 0.1305 & / & 1 & 0.895 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & / & 0 \\ a_5 & 0.0435 & 0.0775 & 0 & 0.105 & / \end{array}$$

(b)

Tableau 2.6 – (a) Les critères discordants . (b) Les indices de discordance

2.4.2.3 Relation de surclassement

Nous avons maintenant toutes les informations nécessaires pour réaliser le test de concordance et le test de non discordance. On fixe le seuil de concordance $c=0.75$. Ce test est satisfait si $C_{ik} \geq 0.75$. On fixe le seuil de non discordance $d=0.25$. Ce test est satisfait si $D_{ik} \leq 0.25$. Les C_{ik} qui satisfont le test de concordance sont $C_{13}, C_{21}, C_{23}, C_{25}, C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{45}$ et C_{53} . Seul D_{34} ne satisfait pas le test de non discordance. Donc, on peut dire que :

$$E_1SE_3, E_2SE_1, E_2SE_3, E_2SE_5, E_4SE_1, E_4SE_2, E_4SE_3, E_4SE_5, E_5SE_3$$

On représente ces résultats dans un graphe.

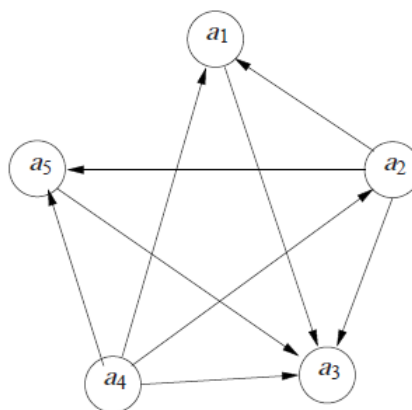


FIGURE 2.7 – Graphe de surclassement selon ELECTRE I

On peut remarquer à travers ce graphe que le noyau est constitué de l'action a_4 . En effet, toutes les autres actions sont surclassées par a_4 . L'élève E4 est "meilleur" que tous les autres élèves.

2.4.3 La méthode ELECTRE II

Afin de construire les relations de surclassement fort et faible, on commence par déterminer les coefficients $\frac{W^+(a_i, a_k)}{W^-(a_k, a_i)}$.

$$\frac{W^+(a_i, a_k)}{W^-(a_k, a_i)} =$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		0	$+\infty$	0	1
a_2	$+\infty$		$+\infty$	0	$+\infty$
a_3	0	0		0	0
a_4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
a_5	1	0	$+\infty$	0	

On calcule la matrice des relations de surclassement, en utilisant les seuils suivants : $c^+ = 0.75$, $c^0 = 0.7$, $c^- = 0.65$, $D_1 = 20$ et $D_2 = 16$. Dans le Tab.2.7, le symbole S_F désigne la relation de surclassement fort, le symbole S_f désigne la relation de surclassement faible et \times désigne l'absence de relation de surclassement entre les deux actions.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1		\times	\times	\times	\times
a_2	S_F		S_F	\times	S_F
a_3	\times	\times		\times	\times
a_4	S_F	S_F	S_F		S_F
a_5	\times	\times	S_F	\times	

Tableau 2.7 – Matrice des surclassements Fort et faible

On représente ces résultats dans un graphe.

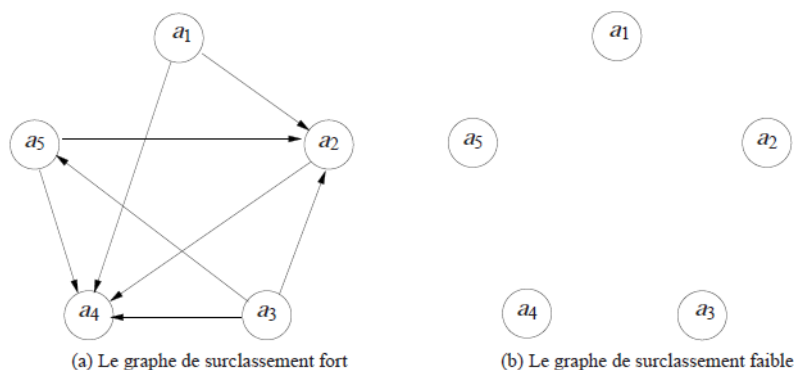


FIGURE 2.8 – Graphe de surclassement Fort et Faible selon ELECTRE II

On effectue maintenant les classements direct et inverse dont les itérations sont résumées dans les Tab.2.8 et Tab.2.9.

Etape	Y_l	D	U	B	A_l	r_{l+1}
0	{1,2,3,4,5}	{4}	\emptyset	{4}	{4}	1
1	{1,2,3,5}	{2}	\emptyset	{2}	{2}	2
2	{1,3,5}	{1,2}	\emptyset	{1,5}	{1,5}	3
3	{3}	{3}	\emptyset	{3}	{3}	4

Tableau 2.8 – Les itérations du classement direct.

Etape	Y_l	D	U	B	A_l	r_{l+1}
0	{1,2,3,4,5}	{1,3}	\emptyset	{1,3}	{1,3}	4
1	{2,4,5}	{5}	\emptyset	{5}	{5}	3
2	{2,4}	{4}	\emptyset	{4}	{4}	2
3	{4}	{2}	\emptyset	{2}	{2}	1

Tableau 2.9 – Les itérations du classement inverse.

Pour finir, on représente les informations obtenues par les classements direct et inverse sur un graphique. En abscisse, on a le rang obtenu lors du classement inverse et, en ordonnée, on a le rang obtenu lors du classement direct.

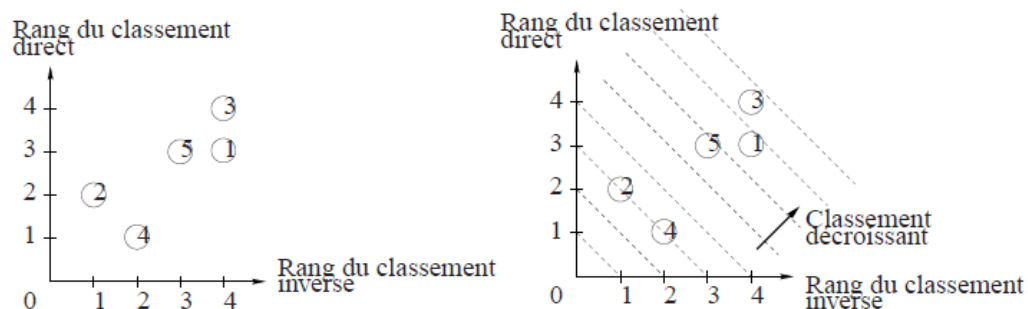


FIGURE 2.9 – Classement des actions selon ELECTRE II

2.5 Exemple récapitulatif sur les méthodes PROMETHEE I et II

La consommation de l'électricité ne cessant de croître en Europe, la construction d'une nouvelle centrale s'impose. Les réseaux nationaux étant interconnectés entre eux, une seule centrale suffit. Six sites ont été proposés, et six critères d'évaluation retenus [10] :

Sites	Critères
a_1 : Italie	f_1 : Nombre d'ingénieurs
a_2 : Belgique	f_2 : Puissance en 10MW
a_3 : Allemagne	f_3 : Coûts de construction (10^6 USD)
a_4 : Suède	f_4 : Coûts annuels de maintenance (10^6 USD)
a_5 : Autriche	f_5 : Nombre de villages à évacuer
a_6 : France	f_6 : Degré de sécurité pour la population

2.5.1 Présentation des données

Les données et les évaluations relatives à cet exemple sont récapitulées dans le tableau suivant :

Critères	Ingénieurs	Puissance	Coûts	Maintenance	Villages	Sécurité
Max/Min	Min	Max	Min	Min	Min	Max
Type	II	III	V	IV	I	VI
Paramètres	q=10	p=30	q=50 et p=500	q=1 et p=6	-	s=5
Poids	1	1	1	1	1	1
a_1 : Italie	80	90	600	5.4	8	5
a_2 : Belgique	65	58	200	9.7	1	1
a_3 : Allemagne	83	60	400	7.2	4	7
a_4 : Suède	40	80	1000	7.5	7	10
a_5 : Autriche	52	72	600	2.0	3	8
a_6 : France	94	96	700	3.6	5	6

Tableau 2.10 – Données relatives à la construction d'une centrale électrique.

Parmi les critères retenus, certains sont à maximiser, d'autres à minimiser. De plus, en absence de priorités clairement établies, tous les poids sont égaux ($w_j = 1$, $j = \overline{1,6}$). Le choix des critères généralisés est délicat et nécessite une réflexion attentive impliquant le décideur et l'analyste. Par exemple :

- Pour le nombre d'ingénieurs nécessaire pour faire fonctionner la centrale, on estime que 10 de plus ou de moins conduit à une indifférence, et qu'au-delà de ce seuil, il y a préférence stricte pour la centrale occupant le moins d'ingénieurs. D'où le choix du type II avec $q = 10$.
- Pour la puissance, on estime que plus une centrale produit, mieux c'est. Cette préférence est croissante jusqu'à ce qu'un seuil de 30 ($\times 10$ MW) soit atteint. Au-delà de ce seuil, la préférence devient stricte. D'où le choix du type III avec $p = 30$.
- Pour les coûts de construction et les coûts de maintenance, le décideur estime qu'une plage d'indifférence doit être considérée. D'où le choix des critères généralisés de V et IV.
- Pour le degré de sécurité, le choix s'est porté sur un critère Gaussien.
- Les villages à évacuer représentent tant de soucis que l'on préfère strictement toute centrale qui permet d'en évacuer le moins, même si la différence n'est que d'une seule unité. D'où le choix du type I.

2.5.2 Indices de préférence multicritères et flux de surclassement

Les tableaux suivants donnent les indices de préférence multicritères et flux de surclassement (flux positif ϕ^+ , négatif ϕ^- et net ϕ).

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	ϕ^-	ϕ^+	ϕ
a_1	-	0.30	0.25	0.27	0.10	0.19	0.37	0.22	-0.15
a_2	0.46	-	0.39	0.33	0.30	0.50	0.38	0.40	+0.02
a_3	0.24	0.18	-	0.33	0.06	0.43	0.34	0.25	-0.09
a_4	0.40	0.51	0.31	-	0.22	0.21	0.35	0.33	-0.02
a_5	0.44	0.52	0.49	0.38	-	0.45	0.16	0.45	+0.29
a_6	0.29	0.40	0.25	0.43	0.13	-	0.35	0.30	-0.05

Indices de préférence multicritères $\pi(a_i, a_k)$ Flux de surclassement

2.5.3 Rangement par PROMETHEE I

En se basant sur les valeurs des flux positif et négatif, on obtient les deux préordres totaux suivants :

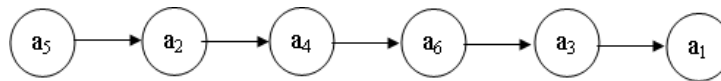


FIGURE 2.10 – Classement des actions selon le flux positif

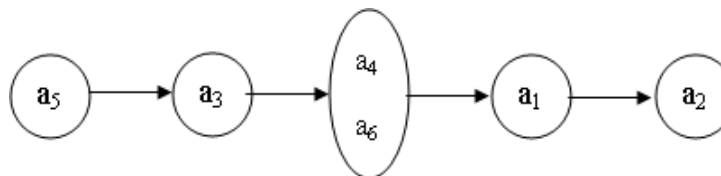


FIGURE 2.11 – Classement des actions selon le flux négatif

Pour obtenir le préordre partiel final, nous allons appliquer les règles d'intersection définies dans la sous-section 2.3.2.

Le résultat peut être résumé dans le tableau suivant :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	-	$R^{(1)}$	$\overline{P^{(1)}}$	$\overline{P^{(1)}}$	$\overline{P^{(1)}}$	$\overline{P^{(1)}}$
a_2	$R^{(1)}$	-	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$\overline{P^{(1)}}$	$R^{(1)}$
a_3	$P^{(1)}$	$R^{(1)}$	-	$R^{(1)}$	$\overline{P^{(1)}}$	$R^{(1)}$
a_4	$P^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	-	$\overline{P^{(1)}}$	$P^{(1)}$
a_5	$P^{(1)}$	$P^{(1)}$	$P^{(1)}$	$P^{(1)}$	-	$P^{(1)}$
a_6	$P^{(1)}$	$R^{(1)}$	$R^{(1)}$	$\overline{P^{(1)}}$	$\overline{P^{(1)}}$	-

Tableau 2.11 – Représentation matricielle de l'intersection des deux classements

On peut également représenter le classement partiel final comme suit :

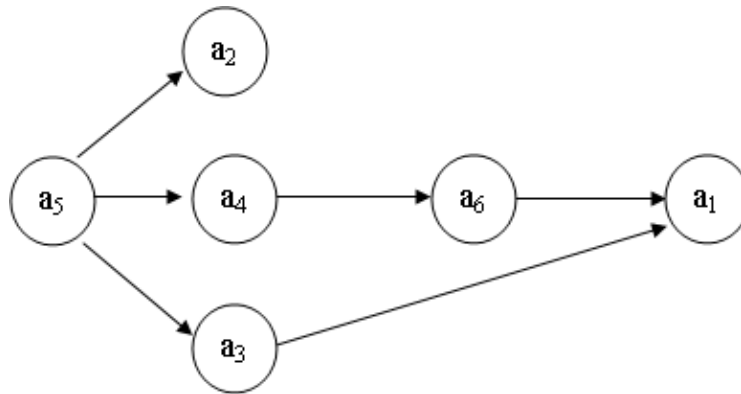


FIGURE 2.12 – Classement partiel (PROMETHEE I)

2.5.4 Rangement par PROMETHEE II

En se basant sur les valeurs du flux net, on obtient le préordre total suivant :

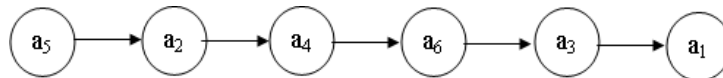


FIGURE 2.13 – Classement total (PROMETHEE II)

Discussion

Les Figures 2.12 et 2.13 donnent respectivement les rangement partiel et total de PROMETHEE I et II. On voit que l'Autriche (a_5) s'impose clairement. En examinant le rangement partiel, on remarque que les actions a_1 et a_2 sont incomparables. En regardant de plus près le tableau de performances, il apparaît que a_2 est une petite centrale, peu puissante et peu coûteuse. Par contre, a_1 est beaucoup plus puissante, très coûteuse et nécessite l'évacuation de huit villages. Il s'agit donc de deux projets difficilement comparables. PROMETHEE I a permis de détecter cette incomparabilité alors que dans PROMETHEE II cette information est perdue.

Conclusion

Il est clair que présenter toutes les méthodes multicritères d'aide à la décision ne peut faire l'objet d'un seul cours et encore moins d'un chapitre. Nous avons présenté et illustré avec des exemples numériques quelques méthodes de surclassement pour chaque problématique de référence. Toutefois, les notions et les méthodes vues peuvent permettre à l'étudiant d'aborder et de comprendre les autres méthodes existantes [15, 14, 17].

Chapitre 3

Méthodes Scalaires

Sommaire

3.1	Position du problème	46
3.2	Concepts d'optimalité	46
3.2.1	Décision optimale de Pareto	47
3.2.2	Décision optimale de Slater	47
3.2.3	Point Idéal et point Nadir	48
3.2.4	Interprétation géométrique	48
3.2.5	Optimalité Lexicographique	50
3.3	Quelques méthodes scalaires pour la résolution d'un problème multicritère	51
3.3.1	Méthode de pondération des critères	51
3.3.2	Méthode du compromis (ϵ -méthode)	52
3.3.3	Méthode du but à atteindre	53
3.3.4	Méthode du but Programmé	53
3.3.5	Méthode Lexicographique	54

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques méthodes de résolution de problèmes multicritères dans le cas où l'ensemble des alternatives possibles du problème est continu, défini en compréhension par un ensemble de contraintes. Les difficultés rencontrées sont principalement liées à la recherche de solutions réalisables (potentiellement une infinité), et la sélection de la meilleure d'entre elles. Seules quelques méthodes basées sur la construction d'un critère unique et l'optimisation de ce dernier seront présentées.

3.1 Position du problème

Un problème multicritère peut être formulé comme suit :

$$\max\{F(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x)) \mid x \in X \subseteq \mathbb{R}^m\}, \quad (3.1)$$

où :

- $F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$: une fonction vectorielle à N critères avec

$$f_j(\cdot) : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_j(x), \quad j = \overline{1, N} \end{array}$$

- $X = \{x \in \mathbb{R}^m, h_l(x) \geq 0, l = \overline{1, p}, g_k(x) = 0, k = \overline{1, s}\}$: l'ensemble des solutions réalisables délimitées par des contraintes d'égalité et d'inégalité.

Sans perte de généralité, on suppose que tous les critères sont à maximiser. Le cas de minimisation découle en maximisant $-f_j$.

3.2 Concepts d'optimalité

On retrouve dans la littérature plusieurs concepts d'optimalité définis pour ce type de problème, mais le concept le plus répandu reste celui d'optimum de Pareto¹.

Notations

Pour $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, on notera les inégalités vectorielles :

- $a \geq b$ si $a_i \geq b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$;
- $a \geq b$ si $a \geq b$ et $a \neq b$;
- $a > b$ si $a_i > b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

1. Vilfredo Pareto (1848-1923) est un économiste et sociologue italien. Il doit sa notoriété dans le domaine des sciences économiques à sa théorie sur l'Optimum (de Pareto) et à son apport aux statistiques avec la loi de Pareto.

3.2.1 Décision optimale de Pareto

Définition 3.2.1. Une décision $x^* \in X$ est dite optimale de Pareto ou encore solution *efficace* du le problème (3.1), s'il n'existe pas une décision $x \in X$, qui vérifie le système d'inégalités :

$$F(x) \geq F(x^*).$$

Une solution efficace est une décision telle qu'il n'existe pas une autre décision dans X qui permet d'améliorer la valeur d'un critère sans en détériorer au moins la valeur d'un autre.

Notons X^p : l'ensemble des décisions optimales de Pareto du problème (3.1), alors la définition est équivalente à :

$$\begin{aligned} x^* \in X^p &\Leftrightarrow \nexists x \in X, F(x) \geq F(x^*) \\ x^* \in X^p &\Leftrightarrow \forall x \in X, F(x) \not\geq F(x^*) \end{aligned}$$

L'ensemble X^p est appelé *front de Pareto* ou bien encore *surface de compromis*.

3.2.2 Décision optimale de Slater

Définition 3.2.2. Une décision $x^* \in X$ est dite optimale de Slater ou encore *faiblement efficace* du le problème (3.1), s'il n'existe pas une décision $x \in X$, qui vérifie le système d'inégalités :

$$F(x) > F(x^*).$$

Une solution faiblement efficace est une décision telle qu'il n'existe pas une autre décision dans X qui permet d'améliorer tous les critères simultanément.

Notons X^s : l'ensemble des décisions optimales de Slater du problème (3.1), alors la définition est équivalente à :

$$\begin{aligned} x^* \in X^s &\Leftrightarrow \nexists x \in X, F(x) > F(x^*) \\ x^* \in X^s &\Leftrightarrow \forall x \in X, F(x) \not> F(x^*) \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1. $X^p \subseteq X^s$

Preuve. Soit $x^* \in X^p$, alors par définition $\nexists x \in X, F(x) \geq F(x^*)$.

Donc, $\nexists x \in X, F(x) > F(x^*)$.

Ce qui implique que $x^* \in X^s$.

Proposition 3.2.2. Si X est non vide et compact, F continue sur X , alors les ensembles X^p et X^s sont non vides.

Preuve. Soient $\Delta_N = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N, \lambda_i \geq 0, \forall i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1\}$, $int(\Delta_N) = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \Delta_N, \lambda_i > 0, \forall i = \overline{1, N}\}$.

Soit $\lambda^* \in int(\Delta_N)$, considérons la fonction $\psi(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^* f_i(x)$ continue sur X . Si on considère le problème mono-critère $(X, \psi(\cdot))$ alors ce problème admet un maximum. *i.e* :

$$\exists x^* \in X; \psi(x^*) = \max_{x \in X} \psi(x). \quad (3.2)$$

Supposons que $x^* \notin X^P$:

$$\begin{aligned} x^* \notin X^P &\Rightarrow \exists x \in X, F(x) \geq F(x^*), \\ &\Rightarrow \exists x \in X, \begin{cases} f_i(x) \geq f_i(x^*), i = \overline{1, N}; & (\times \lambda_i^* > 0) \\ \exists j \in \{1, \dots, N\}, f_j(x) > f_j(x^*). & (\times \lambda_j^* > 0) \end{cases} \\ &\Rightarrow \exists x \in X, \sum_{i=1, i \neq j}^N \lambda_i^* f_i(x) + \lambda_j^* f_j(x) > \sum_{i=1, i \neq j}^N \lambda_i^* f_i(x^*) + \lambda_j^* f_j(x^*), \\ &\Rightarrow \exists x \in X, \psi(x) > \psi(x^*). \end{aligned}$$

D'où la contradiction avec (3.2).

Donc $x^* \in X^P \Rightarrow X^P \neq \emptyset \Rightarrow X^s \neq \emptyset$

3.2.3 Point Idéal et point Nadir

Définition 3.2.3. Le point idéal du problème (3.1) est le vecteur $F^* = (f_1^*, \dots, f_N^*)$ tel que $f_i^* = \max_{x \in X} f_i(x)$, $i = \overline{1, N}$.

Les coordonnées de ce point sont obtenues en optimisant chaque critère séparément.

Le point idéal existe toujours si les conditions d'existence sur les f_i et X sont vérifiées, contrairement à la solution idéale.

Définition 3.2.4. Un point nadir noté $F^{Nad} = (f_1^{Nad}, \dots, f_N^{Nad})$, est un point dont les coordonnées correspondent aux pires valeurs obtenues par chaque critère lorsqu'on le restreint à l'espace des solutions efficaces.

$$f_i^{Nad} = \min_{x \in X^P} f_i(x), \quad i = \overline{1, N}.$$

3.2.4 Interprétation géométrique

Définition 3.2.5. Un cône positif est défini sur \mathbb{R}^N de la manière suivante : $C^+ = \{F(x) \in \mathbb{R}^N | F(x) \geq 0\}$.

Proposition 3.2.3. Une décision $x^* \in X$ est une solution optimale de Pareto du problème (3.1) si :

$$(C^+ \cup \{F(x^*)\}) \cap F(X) = \{F(x^*)\}$$

Exemple 3.2.1. Considérons le problème bi-critères $(X, F(\cdot))$, avec $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $x \in X$. Soit la représentation graphique de $Y = F(X) = \{y = (y_1, y_2) = (f_1(x), f_2(x)), x \in X\}$.

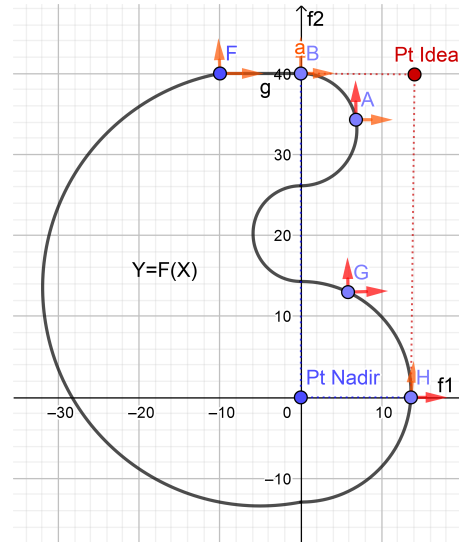
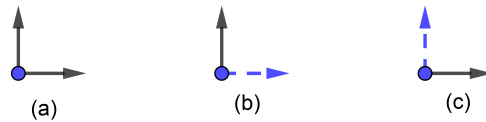


FIGURE 3.1 – Interprétation géométrique

D'après la Proposition 3.2.3, une solution $x^* \in X$ est efficace si l'intersection du cône positif C^+ (dans cet exemple il s'agit d'un angle droit) et l'ensemble $Y = F(X)$ est réduite au point $F(x^*)$ uniquement. Plus généralement trois cas d'intersections doivent être considérés :



- (a) : Le point d'intersection permet de trouver les éléments de X^p .
- (b) ou (c) : Le point d'intersection permet de trouver les éléments de X^s .

Sur cet exemple, on peut voir que :

- $X^p = \{x \in X, F(x) \in \widehat{BA} \cup \widehat{GH} \setminus \{G\}\}$. Le point $x \in X$ tel que $F(x) = G$ n'appartient pas à X^p car l'intersection du cône positif C^+ (dans cet exemple il s'agit d'un angle droit) et l'ensemble $Y = F(X)$ n'est réduite uniquement au point G , il y a également le point A (le A annule l'optimalité de G).
- $X^s = \{x \in X, F(x) \in \widehat{BA} \cup \widehat{GH} \cup [FB]\}$.

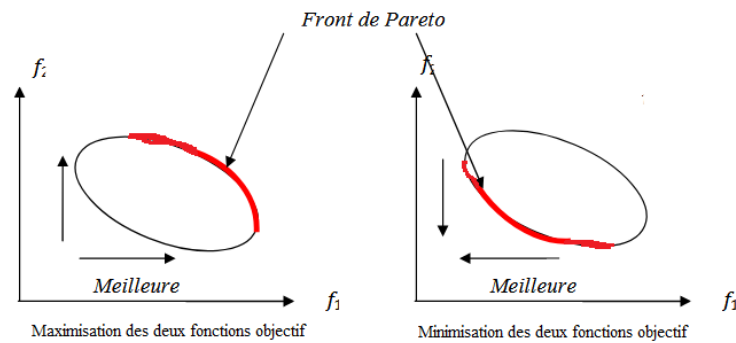


FIGURE 3.2 – La surface de compromis (Front de Pareto)

3.2.4.1 Solution supportée et non supportée

L'ensemble des solutions efficaces peut être partitionné en deux ensembles. Le premier contient les solutions dites supportées dont le point image se situe sur la fermeture convexe de la région admissible. Ces solutions peuvent être trouvées en résolvant des combinaisons linéaires des critères. Le second ensemble contient les solutions non supportées plus complexes à trouver. Elles ne sont pas sur la fermeture convexe, mais ne sont pas dominées pour autant [2].

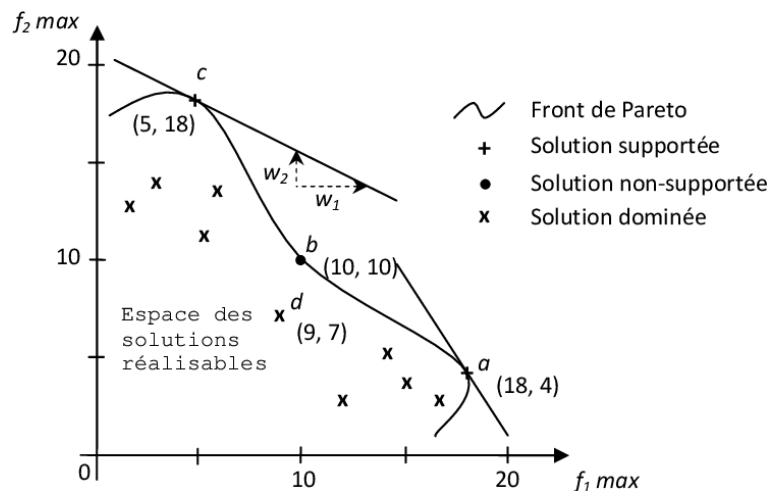


FIGURE 3.3 – Solutions supportées et non supportées

3.2.5 Optimalité Lexicographique

La relation de dominance sur laquelle le concept de solution optimale de Pareto est basée, ne permet pas d'inclure dans sa définition une préférence d'un critère par rapport à un autre. C'est pour cela que des relations dérivées de la relation de dominance ont été développées. Les solutions que permettent de trouver ces relations dérivées de la dominance sont toutes optimales au sens de Pareto. La grande différence que l'on rencontre avec ces relations est que l'ensemble des solutions obtenues est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions obtenues avec la relation de dominance

de Pareto [11].

Définition 3.2.6. On dit qu'une décision $x^* \in X$ domine au sens lexicographique une autre décision $x \in X$, qu'on notera $x^* D_{Lex} x$, si :

$$\exists j^* \in \{1, \dots, N\}, f_j(x^*) = f_j(x), \forall j \in \{1, \dots, (j^* - 1)\} \text{ et } f_{j^*}(x^*) > f_{j^*}(x).$$

Les relations entre $f_{j^*}(x^*)$ et $f_{j^*}(x)$ pour $j > j^*$ ne sont pas prises en considération. La comparaison se fait selon l'ordre de préférence établi par le décideur sur l'ensemble des critères.

Définition 3.2.7. Une solution $x^* \in X$ est optimale au sens lexicographique si

$$\nexists x \in X, x D_{Lex} x^*.$$

3.3 Quelques méthodes scalaires pour la résolution d'un problème multicritère

Le but de ces méthodes est de passer d'un problème multicritère en un problème mono-critère dont de nombreuses méthodes de résolution existent.

3.3.1 Méthode de pondération des critères

Cette approche appelée également appelée "Approche Naive" a pour but de transformer le problème multicritère de départ en un problème mono-critère. La manière la plus simple consiste à prendre les critères, à leur appliquer un coefficient de pondération et à faire la somme pondérée de ces critères.

Les étapes de la méthode sont décrites comme suit :

- On part du problème (3.1).
- Les critères du problème (3.1) sont agrégés et le problème (3.1) se transforme en

$$\begin{cases} \text{Maximiser } \sum_{i=1}^N w_i f_i(x) \\ x \in X. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\text{avec } w_i \geq 0, \forall i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

Théorème 3.3.1. Si $x^* \in X$ est une solution optimale du problème (3.3) alors x^* est une solution optimale de Slater du problème (3.1).

Preuve. Supposons que $x^* \in X$ est une solution du problème (3.3) mais qu'elle n'est pas optimale de Slater du problème (3.1) :

$$x^* \notin X^s \Leftrightarrow \exists x \in X, F(x) > F(x^*) \Leftrightarrow \exists x \in X, f_i(x) > f_i(x^*), i = \overline{1, N}.$$

Selon les hypothèses sur les poids, il existe au moins $w_{i_0} > 0$. Nous avons alors :

$$\sum_{i=1}^N w_i f_i(x) > \sum_{i=1}^N w_i f_i(x^*), \text{ ce qui contredit l'optimalité de } x^* \text{ dans le problème (3.3).}$$

Théorème 3.3.2. *Si $x^* \in X$ est une solution du problème (3.3) avec $w_j > 0, j = \overline{1, N}$ alors x^* est une solution optimale de Pareto du problème (3.1).*

Preuve. La démonstration est analogue à la démonstration de la proposition 3.2.2

Remarque 3.3.1. Cette méthode est très efficace du point de vue algorithmique, mais elle ne permet pas de trouver les solutions non supportées.

3.3.2 Méthode du compromis (ϵ -méthode)

Cette méthode permet de transformer un problème multicritère en un problème monocritère comportant quelques contraintes supplémentaires.

Les étapes de la méthode sont décrites comme suit :

- On part du problème (3.1).
- On suppose que le critère prioritaire est f_k .
- On choisit un vecteur des contraintes $\epsilon_i \geq 0, i = \overline{1, N}, i \neq k$.
- On définit le ϵ -problème associé à (3.1) :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f_k(x) \\ f_j(x) \geq \epsilon_j, j = \overline{1, N}, j \neq k, \\ x \in X. \end{cases} \quad (3.4)$$

Théorème 3.3.3. *Si $x^* \in X$ est une solution du problème (3.4), alors x^* est une solution optimale de Slater du problème (3.1).*

Preuve. Soit $x^* \in X$ une solution du problème (3.4) et supposons qu'elle n'est pas solution optimale de Slater du problème (3.1).

$$\begin{aligned} x^* \notin X^s &\Rightarrow \exists x \in X, f_j(x) > f_j(x^*), j = \overline{1, N}. \\ &\Rightarrow \exists x \in X, \begin{cases} f_j(x) > f_j(x^*) \geq \epsilon_j, j = \overline{1, N}, j \neq k, \dots (*) \\ f_k(x) > f_k(x^*) \dots (**) \end{cases} \end{aligned}$$

De (*) on déduit que x est une solution réalisable du problème (3.4) et de (**) on a x^* n'est pas la solution optimale de (3.4). D'où la contradiction.

Théorème 3.3.4. *Une solution $x^* \in X$ est une solution optimale de Pareto du problème (3.1) si elle est une solution du problème (3.4) pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$ avec $\epsilon_j = f_j(x^*), \forall j \neq k$.*

Preuve. :

\Rightarrow Supposons que x^* est une solution optimale de Pareto du problème (3.1) mais qu'elle n'est pas une solution du problème (3.4) pour un certain $k \in \{1, \dots, N\}$ où $\epsilon_j = f_j(x^*), \forall j \neq k$ i.e :

$$x^* \in X^p \text{ et } \exists x \in X, f_k(x) > f_k(x^*) \text{ et } f_j(x) \geq \epsilon_j = f_j(x^*), j = \overline{1, N}, j \neq k.$$

Donc $x^* \notin X^p$.

Contradiction avec $x^* \in X^p$.

⇐ Supposons que $x^* \in X$ est une solution optimale de (3.4) alors :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \nexists x \in X, \begin{cases} f_k(x) > f_k(x^*) \\ f_j(x) \geq f_j(x^*), j \neq k. \end{cases}$$

Ce qui signifie que $x^* \in X^p$

Remarque 3.3.2. Cette approche a l'avantage par rapport à la précédente dans les problèmes non convexes, mais présente plusieurs inconvénients à savoir :

- la formulation des préférences utilisateur est délicate et nécessite une connaissance approfondie du problème de départ.
- Les contraintes rajoutées compliquent la résolution du problème.

3.3.3 Méthode du but à atteindre

Cette méthode (en anglais "Goal attainment") n'impose pas contrairement à la méthode de pondération des critères, de travailler sur un domaine réalisable convexe.

Les étapes de la méthode sont décrites comme suit :

- On part du problème (3.1).
- On choisit un vecteur initial de valeurs des fonctions objectifs f^0 .
- On choisit une direction de recherche W (on fournit en quelque sorte des coefficients de pondération comme pour la méthode de pondération des critères) .
- On cherche ensuite à minimiser un coefficient scalaire λ qui représente l'écart par rapport à l'objectif initial f^0 que l'on s'est fixé.
- Le problème (3.1) se transforme en

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \lambda \\ f_1(x) + w_1 \times \lambda \geq f_1^0, \\ \vdots \\ f_N(x) + w_N \times \lambda \geq f_N^0, \\ x \in X. \end{cases} \quad (3.5)$$

Remarque 3.3.3. Ainsi en minimisant λ et en vérifiant toutes les contraintes, la recherche va s'orienter vers le but f^0 et s'arrêter sur un point faisant partie de la surface de compromis. Cette approche permet comme l'approche par ϵ -contrainte de trouver les parties non convexes des fronts Pareto. Cependant, cette approche comme les précédentes, doit être itérée plusieurs fois dans le but d'obtenir un ensemble de points Pareto optimaux. Les paramètres doivent être bien choisis par l'utilisateur.

3.3.4 Méthode du but Programmé

Cette méthode appelée (en anglais "Goal programming") se rapproche beaucoup de la méthode du but à atteindre. La principale différence est qu'après la transformation, on se retrouve avec des contraintes d'égalité et non des contraintes d'inégalité.

- On part du problème (3.1).
- On choisit un vecteur initial F^0 .
- A chaque critère, on associe deux nouvelles variables que l'on appelle "les déviations" par rapport au vecteur initial fixé f^0 .
- On minimise ensuite une des deux variables. Le choix de la variable en fonction du type de dépassement que l'on veut (au dessus ou au dessous de l'objectif que l'on s'est fixé).
- Le problème (3.1) se transforme en

$$\begin{cases} \text{Minimiser}(d_1^+ \text{ ou } d_1^-, \dots d_N^+ \text{ ou } d_N^-) \\ f_1(x) = f_1^0 + d_1^+ - d_1^-, \\ \vdots \\ f_N(x) = f_N^0 + d_N^+ - d_N^-, \\ x \in X, \\ d_j^+, d_j^- \geq 0; d_j^+ \times d_j^- = 0; j = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Selon la fonction dont on désire atteindre le but F^0 , on cherchera à minimiser différentes combinaisons des coefficients d_j^+ et d_j^- .

Ces combinaisons sont réunies dans le tableau suivant :

Type	Valeur de la déviation	Variable
On désire atteindre par valeurs supérieures l'objectif j	Positive	d_j^+
On désire atteindre par valeurs inférieures l'objectif j	Négative	d_j^-
On désire atteindre l'objectif j sans dépassement	Nulle	$d_j^+ + d_j^- = 0$

3.3.5 Méthode Lexicographique

Dans cette méthode les critères sont préalablement rangés par ordre d'importance par le décideur. Ensuite, l'optimum est obtenu en maximisant tout d'abord le critère le plus important puis le deuxième et ainsi de suite.

Les étapes de la méthode sont décrites comme suit :

- On part du problème (3.1).
- Soient les critères $f_j, j = \overline{1, N}$, supposons un ordre tel que : $f_1 \succ f_2 \succ, \dots, \succ f_N$ (\succ : préféré à).

1. Tout d'abord, résoudre

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f_1(x) \\ x \in X. \end{cases}$$

2. Soit x_1^* , la solution optimale du problème précédent avec $f_1^* = f_1(x_1^*)$. Cette valeur est prise en compte comme nouvelle contrainte.

L'expression du nouveau problème est donc :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f_2(x) \\ x \in X, \\ f_1(x) = f_1^*. \end{cases}$$

3. La procédure est répétée jusqu'à ce que tous les critères soient traités. Ainsi, soit x_{N-1}^* , la solution optimale du $(N-1)^{\text{ème}}$ problème avec $f_{N-1}^* = f_{N-1}(x_{N-1}^*)$. Cette valeur est prise en compte comme nouvelle contrainte dans le $N^{\text{ème}}$ problème.

L'expression du $N^{\text{ème}}$ problème est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f_N(x) \\ x \in X, \\ f_1(x) = f_1^*, \\ f_2(x) = f_2^*, \\ \vdots \\ f_{N-1}(x) = f_{N-1}^*. \end{array} \right.$$

4. La solution obtenue à l'étape N sera la solution du problème (3.1).

Remarque 3.3.4. L'inconvénient essentiel de cette méthode est la grande importance attribuée aux critères classés en premier. La meilleure solution trouvée pour le critère f_1 le plus important va faire converger l'algorithme vers une zone restreinte de l'espace des solutions.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques méthodes scalaires pour la résolution de problèmes multicritère dans le cas où l'ensemble des alternatives possibles du problème est continu, défini en compréhension par un ensemble de contraintes. Toutefois, la liste des concepts et méthodes de résolution présentée n'est pas exhaustive voir [20, 11].

Chapitre 4

Quelques Exercices

Sommaire

4.1 Exercices corrigés	57
4.2 Exercices non corrigés	68

4.1 Exercices corrigés

Exercice 4.1.1. [22] On considère une ville pour laquelle se pose le choix d'un projet de réalisation d'une raffinerie parmi 6 projets concurrents. Chaque projet est évalué sur la base de 5 critères liés à l'environnement.

- g_1 : Nuisance sonore.
- g_2 : Séparation du territoire.
- g_3 : Pollution de l'air.
- g_4 : Impact sur l'aménagement du territoire.
- g_5 : Impact sur les activités récréatives.

L'importance de chaque critère dans la prise de décision est traduite par un poids : $w_1 = 3, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 1, w_5 = 1$. Chaque projet est évalué en fonction des critères retenus à l'aide d'une échelle qualitative et des scores. Plus le score est **élevé, plus** les impacts du projet sur l'environnement sont **moindres**. Le tableau de performance est donné dans le tableau suivant :

Projets \ Critères	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
P_1	10	20	5	10	16
P_2	0	5	5	16	10
P_3	0	10	0	16	7
P_4	20	5	10	10	13
P_5	20	10	15	10	13
P_6	20	10	20	13	13

1. Appliquer la méthode ELECTRE I pour identifier les projets avec le moins d'impacts sur l'environnement en prenant le seuil de concordance $c = 0.9$ et le seuil de discordance $d = 0.15$.
2. On suppose qu'à chaque critère, on associe un seuil de veto donné sur le tableau suivant :

Critères	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
Seuils	11	11	9	2	7

- (a) Quel est le rôle du seuil de veto.
- (b) Comment peut-on prendre en compte le seuil de veto dans ELECTRE I ?
- (c) La prise en compte du seuil de veto va-t-elle changer le résultat trouvé dans la question précédente ? Pourquoi ?

Corrigé 4.1.1. 1. On notera un projet P_i comme une action $a_i, i = \overline{1, 6}$. Alors :

- (a) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$: l'ensemble des actions.
- (b) $g = \{g_1, g_2, \dots, g_5\}$: la famille des critères
- (c) $J = \{1, 2, \dots, 5\}$: l'ensemble des indices des critères.
- (d) $J^+(a_i, a_k) = \{j \in J, g_j(a_i) > g_j(a_k)\}$: l'ensemble des indices des critères pour lesquels l'action a_i est préférée à l'action a_k .

(e) $J^-(a_i, a_k) = \{j \in J, g_j(a_i) < g_j(a_k)\}$: l'ensemble des indices des critères pour lesquels l'action a_k est préférée à l'action a_i .

(f) $J^=(a_i, a_k) = \{j \in J, g_j(a_i) = g_j(a_k)\}$: l'ensemble des indices des critères pour lesquels l'action a_i est indifférente de l'action a_k .

(g) $P^+(a_i, a_k) = \sum_{j \in J^+(a_i, a_k)} w_j$; $P^-(a_i, a_k) = \sum_{j \in J^-(a_i, a_k)} w_j$; $P^=(a_i, a_k) = \sum_{j \in J^=(a_i, a_k)} w_j$.

On construit les ensembles des indices $J^+(a_i, a_k)$, $J^=(a_i, a_k)$ et $J^-(a_i, a_k)$ dans les tableaux suivants :

$J^+(a_i, a_k)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		{1, 2, 5}	{1,2,3,5}	{2, 5}	{2, 5}	{2, 5}
a_2	{4}		{3, 5}	{4}	{4}	{4}
a_3	{4}	{2}		{2, 4}	{4}	{4}
a_4	{1, 3}	{1, 3, 5}	{1, 3, 5}		\emptyset	\emptyset
a_5	{1, 3}	{1, 2, 3, 5}	{1, 3, 5}	{2, 3}		\emptyset
a_6	{1, 3, 4}	{1, 2, 3, 5}	{1, 3, 5}	{2, 3, 4}	{3, 4}	

$J^-(a_i, a_k)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		{4}	{4}	{1, 3}	{1, 3}	{1, 3, 4}
a_2	{1, 2, 5}		{2}	{1,3,5}	{1, 2, 3, 5}	{1, 2, 3, 5}
a_3	{1, 2, 3, 5}	{3, 5}		{1, 3, 5}	{1, 3, 5}	{1, 3, 5}
a_4	{2, 5}	{4}	{2, 4}		{2, 3}	{2, 3, 4}
a_5	{2, 5}	{4}	{4}	\emptyset		{3, 4}
a_6	{2, 5}	{4}	{4}	\emptyset	\emptyset	

$J^=(a_i, a_k)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		{3}	\emptyset	{4}	{4}	\emptyset
a_2	{3}		{1, 4}	{2}	\emptyset	\emptyset
a_3	\emptyset	{1, 4}		\emptyset	{2}	{2}
a_4	{4}	{2}	\emptyset		{1, 4, 5}	{1, 5}
a_5	{4}	\emptyset	{2}	{1, 4, 5}		{1, 2, 5}
a_6	\emptyset	\emptyset	{2}	{1, 5}	{1, 2, 5}	

Calculons les matrices $P^+(a_i, a_k)$ et $P^=(a_i, a_k)$:

$P^+(a_i, a_k)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		6	9	3	3	3
a_2	1		4	1	1	1
a_3	1	2		3	1	1
a_4	6	7	7		0	0
a_5	6	9	7	5		0
a_6	7	9	7	6	4	

$P^=(a_i, a_k)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		3	0	1	1	0
a_2	3		4	2	0	0
a_3	0	4		0	2	2
a_4	1	2	0		5	4
a_5	1	0	2	5		6
a_6	0	0	2	4	6	

Calculons les éléments C_{ik} $a_i, a_k \in A$ de la matrice de concordance définis par $C_{ik} = \frac{P^+(a_i, a_k) + P^=(a_i, a_k)}{w = \sum_{j \in J} w_j}$.

C_{ik}	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		0.9	0.9	0.4	0.4	0.3
a_2	0.4		0.8	0.3	0.1	0.1
a_3	0.1	0.6		0.3	0.3	0.3
a_4	0.7	0.9	0.7		0.5	0.4
a_5	0.7	0.9	0.9	1		0.6
a_6	0.7	0.9	0.9	1	1	

Nous avons : $\delta = \max_{a_k, a_i \in A, j \in J} [g_j(a_k) - g_j(a_i)] = 20$, calculons tous les éléments D_{ik} $a_i, a_k \in A$

de la matrice de discordance $D_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } J^-(a_i, a_k) = \emptyset; \\ \frac{\max [g_j(a_k) - g_j(a_i)]}{\delta}, j \in J^-(a_i, a_k) & \text{Sinon.} \end{cases}$

D_{ik}	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		0.3	0.3	0.5	0.5	0.5
a_2	0.75		0.25	1	1	1
a_3	0.5	0.25		1	1	1
a_4	0.75	0.3	0.3		0.25	0.5
a_5	0.5	0.3	0.3	0		0.25
a_6	0.5	0.15	0.15	0	0	

Construisons la relation de surclassement :

$a_i S a_k$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1		0	0	0	0	0
a_2	0		0	0	0	0
a_3	0	0		0	0	0
a_4	0	0	0		0	0
a_5	0	0	0	1		0
a_6	0	1	1	1	1	

On trouve que le noyau est constitué des actions $\{a_1, a_6\}$, c'est à dire que les deux projets P_1 et P_6 restent incomparables.

2. (a) Les seuils de veto interviennent dans la condition de discordance. Parmi les critères qui ne sont pas concordants avec l'assertion aSb , certains peuvent exprimer une forte opposition, un veto conduisant à rejeter aSb . Un critère g_j pourra ainsi opposer son veto à l'assertion aSb lorsque $g_j(a)$ est beaucoup plus petit que $g_j(b)$.
- (b) On définit donc pour chaque critère g_j un seuil de veto v_j , où $v_j \geq p_j (j = 1, \dots, N)$ tel que : si $g_j(a) < g_j(b) - v_j$ alors l'assertion aSb est rejetée. On pose alors $d_j(a, b) = 1$ pour indiquer que le critère g_j oppose un veto (et $d_j(a, b) = 0$ sinon). Notons que plus v_j est faible, plus le pouvoir de veto de g_j est grand.
- (c) D'après la question 1), on a $a_6 S a_2, a_6 S a_3, a_6 S a_4, a_6 S a_5, a_5 S a_4$, mais, avec l'introduction du seuil de veto, on aura : $g_4(a_2) - g_4(a_6) = 16 - 13 = 3 > 2 = v_4$, donc on aura $a_6 \bar{S} a_2$. Pour les mêmes raisons, on aura : $a_6 \bar{S} a_3$. Donc le noyau sera constitué de : $N = \{a_1, a_2, a_3, a_6\}$.

Exercice 4.1.2. [] On considère la méthode ELECTRE TRI pour affecter des actions à des catégories ordonnées. On considère k catégories ordonnées C_1, C_2, \dots, C_k , C_1 étant la catégorie la plus basse et C_k la catégorie la plus haute. Chaque catégorie est définie par un profil limite, le profil limite b_h définissant la limite entre les catégories C_h et C_{h+1} pour $h = 1, 2, \dots, k-1$.

Sur chacun des critères g_j , $j = 1, \dots, n$, les profils b_h , $h = 1, \dots, k-1$ sont définis par leur évaluation $g_j(b_h)$. Les profils sont construits de telle sorte que b_{h+1} domine b_h pour $h = 1, 2, \dots, k-2$.

On supposera dans tout ce qui suit que :

- sur chaque critère, les seuils d'indifférence et de préférence sont confondus,
- sur chaque critère, le seuil d'indifférence, égal au seuil de préférence, est constant (on notera $q_j = p_j$ ce seuil sur le critère j),
- l'on ne prend pas en compte la discordance (ceci revient à supposer que les seuils de veto sont arbitrairement grands).

1. Rappeler de manière concise mais précise comment dans la version pessimiste d'ELECTRE TRI on réalise l'affectation d'une action a à l'une des catégories C_1, C_2, \dots, C_k .
2. On appelle méthode d'affectation conjonctive la méthode consistant à affecter une action a à la plus haute catégorie C_h telle que $g_j(a) \geq g_j(b_{h-1})$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que cette méthode d'affectation conjonctive est un cas particulier de la version pessimiste d'ELECTRE TRI.
3. En utilisant un exemple numérique, montrer qu'il est possible, avec ELECTRE TRI, qu'une action soit jugée indifférente à deux profils limites consécutifs. A quelle catégorie une telle action est-elle affectée avec la règle pessimiste d'ELECTRE TRI?
4. Montrer que si $g_j(b_h) + p_j < g_j(b_{h+1}) - p_j$, $\forall j = 1, \dots, n$, $\forall h = 1, \dots, k-2$, il est impossible qu'une action soit indifférente à deux profils limites consécutifs (aIb_h et aIb_{h+1}).

Corrigé 4.1.2. 1. Dans ELECTRE TRI on affecte un poids w_j à chaque critère. Sous les hypothèses du texte, on définit une relation de surclassement S entre actions et profils en posant :

$$aSb_h \Leftrightarrow \frac{\sum_{j: g_j(a) \geq g_j(b_h) - p_j} w_j}{\sum_{j=1}^n w_j} \geq \lambda$$

où λ est un seuil de coupe compris entre $1/2$ et 1 .

Dans la version pessimiste d'ELECTRE TRI, on teste pour $h = k, k-1, k-2, \dots$ si aSb_{h-1} . On affecte a à la première catégorie C_h pour laquelle ce test est positif.

2. Supposons que les seuils de préférence soient tous nuls et posons $\lambda = 1$. On a alors

$$aSb_{h-1} \Leftrightarrow [g_j(a) \geq g_j(b_{h-1}), \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}].$$

Il est alors clair que la version pessimiste d'ELECTRE TRI affecte chaque action de même que la procédure conjonctive.

3. Considérons trois critères et trois catégories C_1, C_2 et C_3 . Considérons les profils suivants :

	g1	g2	g3
b1	10	10	10
b2	12	12	12

Supposons que sur chaque critère le seuil de préférence soit égal à 3. Il est clair qu'une action a ayant comme évaluation (11, 11, 11) sera jugée indifférente à la fois à b_1 et à b_2 quel que soit le niveau de coupe λ retenu. En utilisant la formule rappelée plus haut, l'action a sera affectée à la catégorie C_3 .

4. Supposons que $g_j(b_h) + p_j < g_j(b_{h+1}) - p_j, \forall j = 1, \dots, n, \forall h = 1, \dots, k - 2$. Supposons que aIb_h .

Ceci implique que b_hSa soit :

$$\frac{\sum_{j: g_j(b_h) \geq g_j(a) - p_j} w_j}{\sum_{j=1}^n w_j} \geq \lambda,$$

Posons $J = \{j : g_j(b_h) \geq g_j(a) - p_j\}$. Pour tout $i \in J$ on a : $g_j(a) \leq g_j(b_h) + p_j$ et donc, par hypothèse, $g_j(a) < g_j(b_{h+1}) - p_j$. Un critère de J ne peut donc appartenir à l'ensemble $J' = \{j : g_j(a) \geq g_j(b_{h+1}) - p_j\}$. La somme normalisée des poids des critères de J' est donc strictement inférieure à $1 - \lambda$. Il est donc impossible que aSb_{h+1} et donc que aIb_{h+1} .

Exercice 4.1.3. Soit un ensemble $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ d'actions évaluées sur un ensemble de critères $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ (A maximiser). A chaque critère f_j , un poids $w_j > 0, j = \overline{1, n}$ est associé avec $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Soit $P_j(a_i, a_k)$ l'indice de préférence entre l'action a_i et l'action a_k sur le critère f_j et soit $\pi(a_i, a_k)$ l'indice de préférence multicritère entre l'action a_i et l'action a_k .

Parmi ces propositions lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses? Justifier.

1. Si $P_j(a_i, a_k) = P_j(a_k, a_i)$ alors $P_j(a_k, a_i) = 0$.
2. Si $P_j(a_i, a_k) > 0$ alors $P_j(a_k, a_i) = 0$.
3. Si $P_j(a_i, a_k) = 0$ alors $P_j(a_k, a_i) \geq 0$.
4. Si $\pi(a_i, a_k) = 1$ alors $\pi(a_k, a_i) = 1$.
5. $\forall a_i, a_k \in A, \pi(a_i, a_k) = 1 - \pi(a_k, a_i)$.

Corrigé 4.1.3. 1. Si $P_j(a_i, a_k) = P_j(a_k, a_i)$ alors $P_j(a_k, a_i) = 0$. **Vraie**

$$\begin{aligned}
P_j(a_i, a_k) = P_j(a_k, a_i) &\Rightarrow d_j(a_i, a_k) = d_j(a_k, a_i). \\
&\Rightarrow f_j(a_i) - f_j(a_k) = f_j(a_k) - f_j(a_i). \\
&\Rightarrow 2f_j(a_i) - 2f_j(a_k) = 0. \\
&\Rightarrow f_j(a_i) = f_j(a_k). \\
&\Rightarrow d_j(a_i, a_k) = d_j(a_k, a_i) = 0. \\
&\Rightarrow P_j(a_i, a_k) = P_j(a_k, a_i) = 0(CQFD).
\end{aligned}$$

2. Si $P_j(a_i, a_k) > 0$ alors $P_j(a_k, a_i) = 0$ **Vraie**.

$$\begin{aligned}
P_j(a_i, a_k) > 0 &\Rightarrow d_j(a_i, a_k) > 0. \\
&\Rightarrow d_j(a_k, a_i) < 0. \\
&\Rightarrow P_j(a_k, a_i) = 0(CQFD)
\end{aligned}$$

3. Si $P_j(a_i, a_k) = 0$ alors $P_j(a_k, a_i) \geq 0$.

4. Si $\pi(a_i, a_k) = 1$ alors $\pi(a_k, a_i) = 1$ **Fausse**.

$$\pi(a_i, a_k) = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^N P_j(a_i, a_k) \times w_j = 1.$$

Comme $w_j > 0, j = 1, \bar{n}$ et $\sum_{j=1}^N w_j = 1$ alors :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P_j(a_i, a_k) = 1, j = 1, \bar{n}. \\
&\Rightarrow P_j(a_k, a_i) = 0, j = 1, \bar{n}, \text{ D'après la question 2.} \\
&\Rightarrow \pi(a_k, a_i) = 0.
\end{aligned}$$

5. $\forall a_i, a_k \in A, \pi(a_i, a_k) = 1 - \pi(a_k, a_i)$.

Supposons que cette proposition est vraie.

$$\begin{aligned}
&\forall a_i, a_k \in A, \pi(a_i, a_k) = 1 - \pi(a_k, a_i) \\
&\forall a_i, a_k \in A, \sum_{j=1}^N P_j(a_i, a_k) \times w_j + \sum_{j=1}^N P_j(a_k, a_i) \times w_j = 1 \\
&\forall a_i, a_k \in A, \sum_{j=1}^N w_j [P_j(a_i, a_k) + P_j(a_k, a_i)] = 1
\end{aligned}$$

Comme $w_j > 0, j = 1, \bar{n}$ et $\sum_{j=1}^N w_j = 1$ alors : $\forall a_i, a_k \in A, P_j(a_i, a_k) + P_j(a_k, a_i) = 1, j = 1, \bar{n}$.

Contradiction avec les propositions 1, 2 et 3.

Exercice 4.1.4. Soit la fonction bi-critères $f(x) = (x_1 + 1; x_2 - \frac{1}{2})$ et l'ensemble des décisions constitué des solutions du système $X = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \geq x_1; x_1 + x_2 \leq 4\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0; x_2 \geq -1; x_2 \leq x_1; x_1 + x_2 \leq 3\}$:

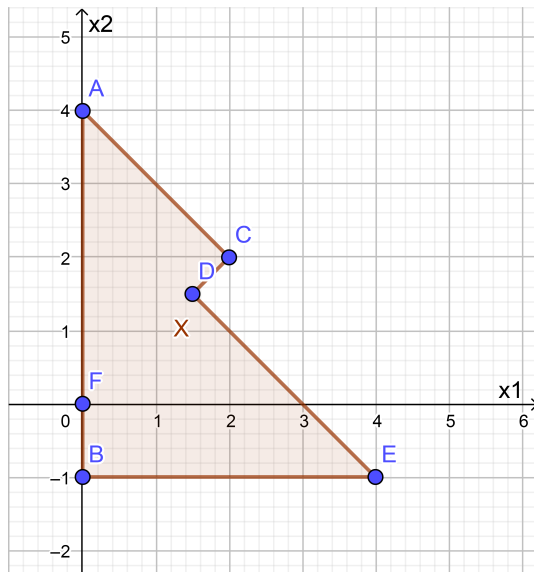
1. Représenter graphiquement l'ensemble X des décisions.
2. Représenter graphiquement l'ensemble $Y = f(X)$ des valeurs réalisables de $f(X)$.
3. Quel est le point idéal ? Représenter le graphiquement. Que peut-on déduire ?
4. Identifier l'ensemble des valeurs maximales de Pareto (Resp. de Slater) dans l'espace des critères. En déduire une caractérisation analytique de l'ensemble des décisions maximales de Pareto (Resp. de Slater).
5. Représenter graphiquement le point Nadir. A quoi correspond-il ?
6. Préciser la nature des points de l'espace des critères de coordonnées $M = (3, 3/2)$ et $N = (3, 1/2)$.
7. On souhaite résoudre ce problème bi-critère par la méthode ϵ -Contrainte. La fonction prioritaire est la fonction $f_1(x) = x_1 + 1$ et l'objectif pour la fonction $f_2(x) = x_1 - \frac{1}{2}$ est d'au moins 5.
 - (a) Ecrire le ϵ -problème.
 - (b) Résoudre le ϵ -problème.
 - (c) Que peut-on conclure ?
 - (d) Supposons maintenant que la fonction prioritaire soit la fonction $f_1(x) = x_1 + 1$ et que l'objectif pour la fonction $f_2(x) = x_2 - \frac{1}{2}$ soit d'au moins 3.
 - i. Quel est le lien entre la solution de ce ϵ -problème et celle du problème bi-critères ? Justifier.
 - ii. Cette solution est-elle une solution de Pareto ? Justifier sans utiliser les résultats trouvés en 4).

Corrigé 4.1.4. 1. Représentations graphiques X et $f(X)$.

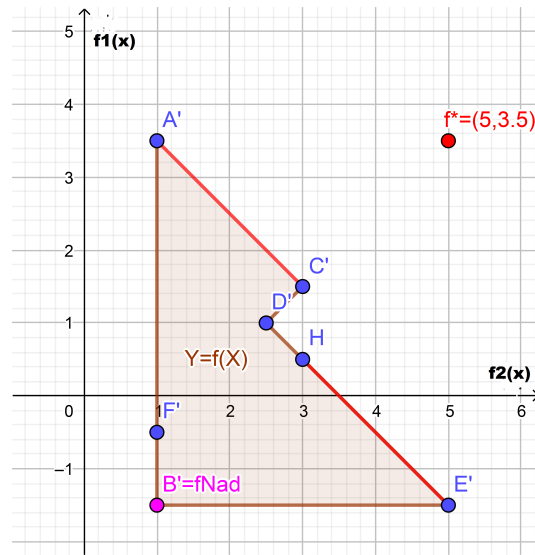
Afin de représenter graphiquement l'ensemble $Y = f(X)$, on pose

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) = x_1 + 1 & \Rightarrow & x_1 = y_1 - 1 \\ y_2 = f_2(x) = x_2 - \frac{1}{2} & \Rightarrow & x_2 = y_2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble $Y = f(X) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 1; y_2 \geq \frac{-1}{2}; y_2 - y_1 \geq \frac{-3}{2}; y_1 + y_2 \leq \frac{9}{2}\} \cup \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 1; y_2 \geq \frac{-3}{2}; y_2 - y_1 \leq \frac{-3}{2}; y_1 + y_2 \leq \frac{7}{2}\}$.



(a) Ensemble des décisions X



(b) Ensemble des valeurs réalisables $f(X)$

FIGURE 4.1 – Les représentations graphiques de X et $f(X)$

2. Pour obtenir les coordonnées du point idéal, il suffit de trouver la valeur maximale atteinte par chaque fonction objectif séparément.

A la base de la Fig.4.1(a), on peut déduire que la fonction f_1 atteint son maximum au point $E = (4, -1)$ avec $f_1^* = f_1(E) = 5$.

De même pour la fonction f_2 atteint son maximum au point $A = (0, 4)$ avec $f_2^* = f_2(A) = \frac{7}{2}$.
Donc $f^* = (f_1^*, f_2^*) = (5, \frac{7}{2})$.

Comme $f^* \notin f(X)$ alors on en déduit que la solution idéale n'existe pas.

3. Les ensembles valeurs maximales de Pareto (Resp. de Slater) dans l'espace des critères.

Graphiquement (Fig.4.1(b)), on peut déduire les ensembles $Y^p = f(X^p)$ et $Y^s = f(X^s)$.

On a $Y^p = [A'C'] \cup [HE']$ et $Y^s = [A'C'] \cup [HE'] = Y^p \cup H$.

Analytiquement

$$Y^p = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = \frac{9}{2}; \underbrace{1 \leq y_1 \leq 3}_{\text{ou bien } \frac{3}{2} \leq y_2 \leq \frac{7}{2}} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = \frac{7}{2}; \underbrace{3 < y_1 \leq \frac{7}{2}}_{\text{ou bien } -\frac{3}{2} \leq y_2 < \frac{1}{2}} \right\}$$

$$X^p = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 4; \underbrace{0 \leq x_1 \leq 2}_{\text{ou bien } 2 \leq x_2 \leq 4} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 3; \underbrace{2 < x_2 \leq 4}_{\text{ou bien } -1 \leq x_2 < 1} \right\}$$

$$Y^s = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = \frac{9}{2}; \underbrace{1 \leq y_1 \leq 3}_{\text{ou bien } \frac{3}{2} \leq y_2 \leq \frac{7}{2}} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = \frac{7}{2}; \underbrace{3 \leq y_1 \leq \frac{7}{2}}_{\text{ou bien } -\frac{3}{2} \leq y_2 \leq \frac{1}{2}} \right\}$$

$$X^s = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 4; \underbrace{0 \leq x_1 \leq 2}_{\text{ou bien } 2 \leq x_2 \leq 4} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 3; \underbrace{2 \leq x_2 \leq 4}_{\text{ou bien } -1 \leq x_2 \leq 1} \right\}$$

4. Representation graphique du point Nadir.

$$f_1^{Nad} = \inf_{x \in X^p} f_1(x) = \inf[5, 1] = 1.$$

$$f_2^{Nad} = \inf_{x \in X^p} f_2(x) = \inf\left[\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}; 1\right] = -\frac{3}{2}.$$

$$f^{Nad} = (f_1^{Nad}, f_2^{Nad}) = \left(1, -\frac{3}{2}\right). \text{ Il s'agit du point } B'.$$

5. La nature des points de l'espace des critères de coordonnées $M = \left(3, \frac{3}{2}\right)$ et $N = \left(3, \frac{1}{2}\right)$.
 $M = \left(3, \frac{3}{2}\right) = C' \in Y^p$ et $N = \left(3, \frac{1}{2}\right) = H \in Y^s$ mais $N = \left(3, \frac{1}{2}\right) = H \notin Y^p$.

Exercice 4.1.5. Soit la fonction bi-critères $f(x) = (x_1 + x_2; x_2 - x_1)$ et l'ensemble des décisions constitué des solutions du système $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_1 \geq x_2; x_1 + x_2 \leq 4; x_1 \leq 4; x_2 \leq 2\}$.

1. Résoudre ce problème bi-critère par la méthode de pondération des fonctions objectif ($w_1 = 0.7$).
2. On souhaite résoudre ce problème bi-critères par la méthode ϵ -Contrainte. La fonction prioritaire est la fonction $f_1(x) = x_1 + x_2$ et l'objectif pour la fonction $f_2(x) = x_2 - x_1$ est d'au moins 3.
 - (a) Ecrire le ϵ -problème.
 - (b) Résoudre le ϵ -problème.
 - (c) Quel est le lien entre la solution du ϵ -problème et celle du problème bi-critères ? Justifier.
 - (d) Peut-on montrer l'optimalité de Pareto du point $x^* = (3, 2)$ pour le problème bi-critères par la méthode ϵ -contrainte ? Justifier.

Corrigé 4.1.5. 1. Résolution par la méthode de pondération.

Nous avons $f_{Moy}(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) = 0.7(x_1 + x_2) + 0.3(x_2 - x_1) = 0.4x_1 + x_2$.

Le problème bi-critères se transforme alors en :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f_{Moy}(x) = 0.4x_1 + x_2 \\ x \in X \end{cases} \quad (4.1)$$

La fonction f_{Moy} atteint son maximum au point B . La solution optimale du problème 4.1 est alors le point $x^* = (3, 2)$ (Voir Fig.4.2(a)).

2. Résolution par la méthode ϵ -Contrainte.

- (a) Si la fonction prioritaire est la fonction $f_2(x) = x_2 - x_1$ et que l'objectif pour la fonction $f_1(x) = x_1 + x_2$ est d'au moins 3, alors le ϵ -problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f_2(x) = x_2 - x_1, \\ f_1(x) = x_1 + x_2 \geq 3, \\ x \in X. \end{cases} \quad (4.2)$$

- (b) L'ensemble des solutions réalisables du ϵ -problème (4.2) est le polygone ABCDEF. On peut voir sur le graphe de la Fig.4.2(b), que les solutions optimales du ϵ -problème (4.2) sont le segment de droite $[AF]$.

- (c) En vertu du théorème 3.3.3, ces solutions sont aussi des solutions de Slater du problème bi-critères.

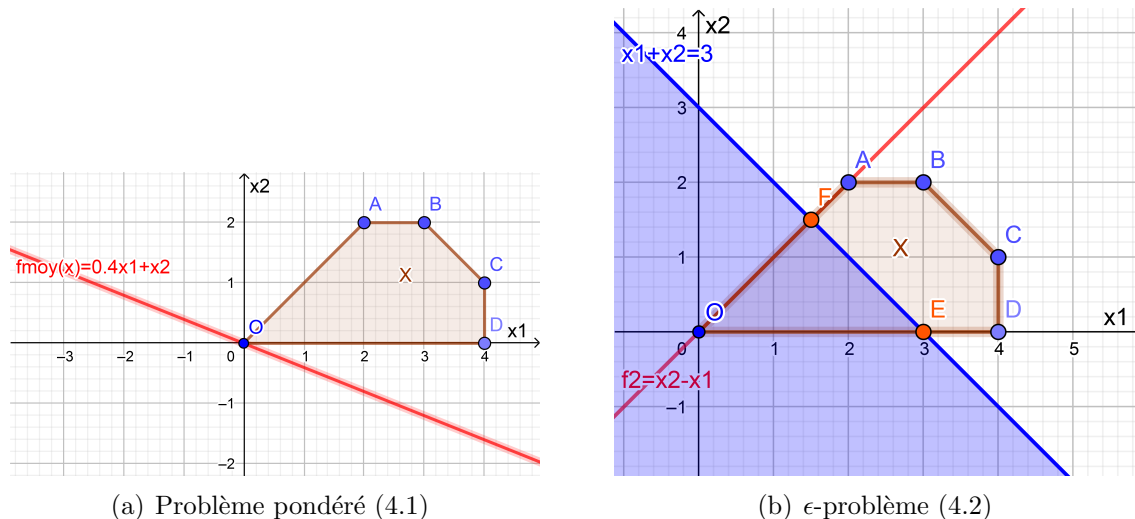


FIGURE 4.2 – Résolution graphique des problèmes (4.1) et (4.2)

- (d) En vertu du théorème 3.3.4, pour que la solution $x^* = (3, 2)$ soit une solution optimale de Pareto du problème bi-critères, il suffit qu'elle soit la solution optimale de ces deux ϵ -problèmes :

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f_1(x) = x_1 + x_2, \\ f_2(x) = x_2 - x_1 \geq \epsilon_2 = f_2(x^*) = -1, \\ x \in X. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \text{Maximiser } f_2(x) = x_2 - x_1, \\ f_1(x) = x_1 + x_2 \geq \epsilon_1 = f_1(x^*) = 5, \\ x \in X. \end{cases} \quad (4.4)$$

La résolution graphique montre que x^* est bien la solution optimale des deux ϵ -problèmes. En effet,

- l'ensemble des solutions réalisables du ϵ -problème (4.3) est le polygone ABGO. La fonction f_1 atteint son maximum au point $B = (2, 3)$ (Voir Fig.4.3(a)) ;
- l'ensemble des solutions réalisables du ϵ -problème (4.4) est le segment $[BC]$. La fonction f_2 atteint son maximum au point $B = (2, 3)$ (Voir Fig.4.3(b)).

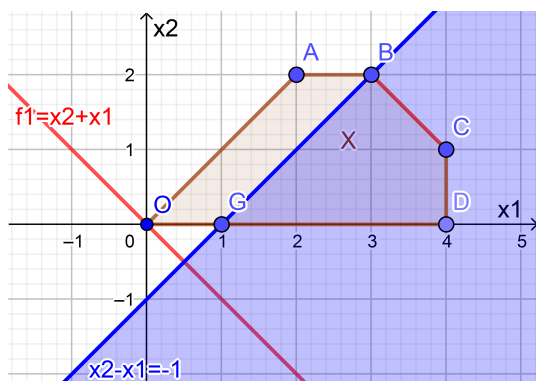
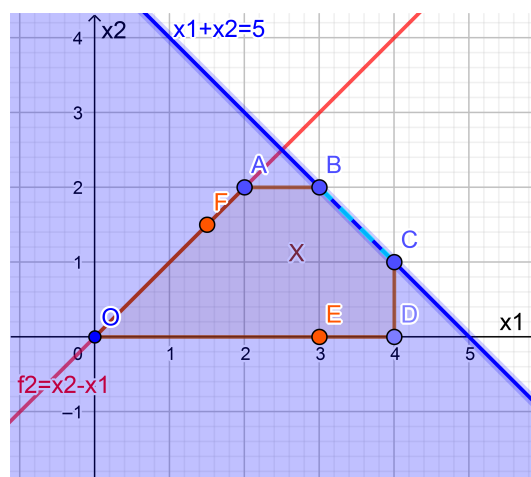
(a) ϵ -problème (4.3)(b) ϵ -problème (4.4)

FIGURE 4.3 – Résolution graphique des problèmes (4.3) et (4.4)

4.2 Exercices non corrigés

Exercice 4.2.1. [1] Une entreprise souhaite implanter un nouvel entrepôt. 5 sites ont été sélectionnés et évalués sur les critères suivants :

- C1 : prix du foncier,
- C2 : facilité d'accès,
- C3 : marché du travail,
- C4 : surface disponible,
- C5 : environnement.

Chaque site a été évalué sur chacun des critères sur l'échelle : A (excellent), B (très bon), C (bon), D (mauvais) et E (très mauvais), tel que présenté dans le tableau suivant :

	C1	C2	C3	C4	C5
Lyon	E	A	A	D	A
Valence	A	B	C	B	C
St Etienne	B	C	D	A	E
Grenoble	D	C	B	C	A
Bourgoin	B	B	C	A	C

Après discussion, les importances des critères ont été fixées à :

C1	C2	C3	C4	C5
3	2	3	1	1

1. Complétez la matrice des degrés de concordance $S(i; j)$ ci-dessous avec les poids des critères normalisés.

	L	V	StE	G	B
L					
V		1	0.9	0.6	0.9
StE		0.1	1	0.6	0.4
G		0.4	0.6	1	0.4
B		0.7	1	0.6	1

2. On calcule pour chaque paire de ville et chaque critère k un indice de discordance $D_k(i, j) = 1 \Leftrightarrow C_k(j) = A$ et $C_k(i) = E$, et $D_k(i, j) = 0$ sinon. Donner les éléments $D_k(i, j)$ égaux à un.
3. Calculez la matrice des degrés de surclassement $S'(i, j) = S(i, j) \prod_{k=1}^5 (1 - D_k(i, j))$.
4. Supposons que l'on choisisse un seuil de 0,6. Quelle relation de préférence obtient-on ?
5. Supposons que l'on choisisse un seuil de 0,8. Quelle relation de préférence obtient-on ?
6. Au final, Quel est le choix que vous recommandez ?

Exercice 4.2.2. Soit le tableau de performances associé à un problème multicritères ayant 04 actions évaluées sur 04 critères.

	f_1	f_2	f_3	f_4
a_1	-1.6	3	10	1
a_2	-2.0	7	10	6
a_3	-2.3	7	6	9
a_4	-5.2	10	3	10
Poids	2	1	1	2

L'évaluation de l'action de référence b^1 et les seuils par critères pour appliquer la méthode ELECTRE Tri sont donnés dans le tableau suivant. Le seuil de coupe est $\lambda = 0.60$

	f_1	f_2	f_3	f_4
b^1	-3	7	7	7
q_j	1	1	1	1
p_j	2	2	2	2
v_j	5	5	5	5

1. Compléter la matrice des degrés de crédibilité.

	(a_j, b^1)	$(?b^1, a_j)$
a_1		0.70
a_2	1	
a_3		0.67
a_4	0.33	

2. Donner la matrice de surclassement.
3. Quels sont les résultats obtenus avec l'affectation optimiste et pessimiste ?
4. On dit qu'une action $a^* \in A$ domine au sens lexicographique une autre action $a \in A$ s'il existe un indice $j^* \in \{1, \dots, N\}$ tel que $f_j(a^*) = f_j(a), \forall j \in \{1, \dots, (j^* - 1)\}$ et $f_{(j^*)}(a^*) > f_{(j^*)}(a)$. Les relations entre $f_{(j^*)}(a^*)$ et $f_{(j^*)}(a)$ pour $j > j^*$ ne sont pas prises en considération. La comparaison se fait selon l'ordre de préférence établit par le décideur sur l'ensemble des critères.
 - (a) Supposons que dans notre cas que l'ordre des critères soit (f_3, f_2, f_4, f_1) . Que peut-on dire de la relation entre a_3 et a_4 ?
 - (b) Trouver l'optimum au sens lexicographique pour le problème traité.

Exercice 4.2.3. Soit un ensemble $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ d'actions évaluées sur un ensemble de critères $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ (A maximiser). A chaque critère f_j , un poids $w_j > 0, j = 1, \dots, n$ est associé avec $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

Soit $P_j(a_i, a_k)$ l'indice de préférence entre l'action a_i et l'action a_k sur le critère f_j et soit $\pi(a_i, a_k)$ l'indice de préférence multicritère entre l'action a_i et l'action a_k .

Parmi ces propositions lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ? Justifier.

1. Si $P_j(a_i, a_k) = 0$ alors $P_j(a_k, a_i) > 0$.
2. Si $\pi(a_i, a_k) > 0$ alors $\pi(a_k, a_i) = 0$.
3. Si $\pi(a_i, a_k) = 1$ alors a_i est nécessairement meilleure que a_k sur tous les critères .

Exercice 4.2.4. Dans un problème multicritère,

1. Si le critère $f_j()$ est à minimiser et qu'un critère généralisé de type III lui est associé, sachant que $p = 20$, $f_j(a) = 20$ et $f_j(b) = 10$, quelle est la valeur de $P_j(a, b)$?
2. Si le critère $f_j()$ est à minimiser et qu'un critère généralisé de type V lui est associé, sachant que $d_j(a, b) = -10$, $P_j(a, b) = 0.75$, $P_j(b, a) = 0$ et $p = 12$, quelle est la valeur de q ?
3. Si le critère $f_j()$ est à maximiser et qu'un critère généralisé de type V lui est associé, sachant que l'on observe un écart de 15 entre a et b et que $P_j(a, b) = 0.25$, $q = 10$, quelle est la valeur de p ?
4. A quel type correspond un critère généralisé de type V avec $q = 0$ et $p > 0$?
5. Soit le tableau des indices de préférence multicritères :

	a	b	c
a	0	0.6	0.5
b	0.3	0	0.2
c	0.4	0.1	0

Quels sont les classements obtenus avec PROMETHEE I et II.

Exercice 4.2.5. Soit la fonction bi-critères $f(x) = (x_1 + x_2; x_1 - 2x_2)$ et l'ensemble des décisions constitué des solutions du système $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \geq x_1; x_1 + x_2 \leq 4\}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble $Y = f(X)$ des valeurs réalisables de $f(X)$.
2. Identifier l'ensemble des valeurs maximales de Pareto (Resp. de Slater) dans l'espace des critères. En déduire une caractérisation analytique de l'ensemble des décisions maximales de Pareto (Resp. de Slater).
3. Résoudre ce problème bi-critère par la méthode de pondération des fonctions objectif ($w_1 = 0.6$).
4. On souhaite résoudre ce problème bi-critère par la méthode ϵ -Contrainte. La fonction prioritaire est la fonction $f_1(x) = x_1 + x_2$ et l'objectif pour la fonction $f_2(x) = x_1 - 2x_2$ est d'au moins 3.
 - (a) Ecrire le ϵ -problème.
 - (b) Résoudre le ϵ -problème.
 - (c) Quel est le lien entre la solution du ϵ -problème et celle du problème bi-critères ? Justifier.

- (d) La solution du ϵ -problème est-elle un optimum de Pareto pour le problème bi-critères de départ ? Justifier.

Exercice 4.2.6. Soient la fonction bi-critères $f(x) = (x_1 + 1; x_1 + x_2)$ et l'ensemble des décisions constitué des solutions du système $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 4; x_2 \geq 2; x_1 + x_2 \leq 8\}$.

1. Montrer que la fonction bi-critères admet une solution idéale que l'on notera x^* . x^* Est-elle une décision maximale de Slater (resp. de Pareto) ? Justifier.
2. Les ensembles X^S et X^P peuvent ils être vides pour le problème bi-critères traité ? Justifier.
3. On souhaite résoudre ce problème bi-critères par la méthode ϵ -Contrainte. La fonction prioritaire est la fonction $f_1(x) = x_1 + 1$ et l'objectif pour la fonction $f_2(x) = x_1 + x_2$ est d'au moins (9). Que peut-on conclure ? Justifier.

Bibliographie

- [1] Rolland. A. *Exercices sur l'agrégation de préférences*. Université Lumière Lyon 2, 2015/2016.
- [2] N. Aribi. Contribution to the parameter elicitation in multicriteria optimization. *4OR*, 13 :221–222, 2015.
- [3] N. Belacel. *Méthodes de Classification Multicritère "Méthodologie et Applications à l'Aide au Diagnostic Médical"*. PhD thesis, Université Libre De Bruxelles : Institut De Statistique, 1999-2000.
- [4] S. Ben Mena. Introduction aux méthodes multicritères d'aide à la décision. *Biotechnol. Agron. Soc. Environ*, 5 :83–93, 2000.
- [5] S. Ben Mena. Méthodes multicritères d'aide à la décision : Méthodes de surclassement. *Biotechnol. Agron. Soc. Environ*, 10 :103–114, 2001.
- [6] W. Bossert, Y. Sprumont, and K. Suzumura. Upper semicontinuous extensions of binary relations. *Journal of Mathematical Economics*, 37 :231–246, 2002.
- [7] D. Bouyssou and P. Vincke. *Relations binaires et modélisation des préférences*. Hermès, 2003.
- [8] J. P. Brans. L'ingénierie de la décision. élaboration d'instruments d'aide à la décision. méthode promethee. *Université Laval, Colloque d'aide à la décision, Quebec, 182-213*, (1982).
- [9] J. P. Brans and Ph. Vincke. The promethee method for multiple criteria decision-making. *Management Science* 31(6), pages. 647-656, (1985).
- [10] J.P. Brans and B. Mareschal. *PROMETHEE-GAIA. Une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples*. Editions de l'université de Bruxelles/ Ellipses, (2002).
- [11] Y. Collette and P. Siarry. *Optimisation multiobjectif*. Eyrolles, 2002.
- [12] D. Donaldson and J.A. Weymark. A quasoordering in the intersection of orderings. *Journal of Economic theory*.
- [13] B. Dushnick and E. Miller. Partially ordered sets. *American Journal of Economics*, 75 :643–669, 1961.
- [14] J. Figueira, Roy B. Greco, S., and R. Slowinski. An overview of electre methods and their recent extensions. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 20(1-2), pages. 61 ?85, (2013).
- [15] J. Figueira, S. Greco, and M. Ehrgott. *Multiple criteria decision analysis : state of the art surveys*. New york : Springer, (2005).

- [16] P.C. Fishburn. Nontransitive measurable utility. *Journal of Mathematical Psychology*, 26 :31–67, 1985.
- [17] K. Govindan and M.B. Jepsen. Electre : A comprehensive literature review on methodologies and applications. *European Journal of Operational Research* 250, pages.1-29, (2016).
- [18] E. Jacquet-Lagrange and J. Siskos. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the uta method. *European Journal of Operational Research* 10(2), pages. 151-164, (1982).
- [19] R.L. Keeney and Raiffa H. *Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs*. John Wiley and Sons,, New York, 1976.
- [20] Ehrgott M. *Multicriteria optimisation*. Springer Berlin, Heidelberg, Second edition, (2005).
- [21] L.Y. Maystre, J. Pictet, and J. Simos. *Méthodes multicritères ELECTRE*. Lavoisier, 1994.
- [22] M.S. Radjef. *Méthodes multicritères d'aide à la décision*. Université Bejaia, 2010.
- [23] A. Rolland. *Procédure d'agregation ordinaire de preferences avec points de reference pour l'aide a la decision*. PhD thesis, universite paris vi Pierre et Marie Curie. ufr informatique, 2008.
- [24] B. Roy. *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Economica, (1985).
- [25] B. Roy. The outranking approach and the foundation of electre methods. *Theory and Decision* 31, pages. 49-73, (1991).
- [26] B. Roy and D. Bouyssou. *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*. Economica, Paris, (1993).
- [27] P. Vincke. *L'Aide Multicritère à la Décision*. Ellipses, 1993.