Examen de remplacement

Exercice 1 (07 pts)

Le mouvement d'un point matériel M, dans un référentiel (OXY) muni de la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est décrit par les équations paramétriques suivantes : $x(t) = 5t$; $y(t) = -5t(t-1)$

1- Donner l'équation de la trajectoire de M ;
2- Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules ;
3- Discuter en fonction de temps les phases du mouvement.
4- Déterminer les composantes tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire ;
5- Si m est la masse du point matériel M, déterminer sa quantité de mouvement et la force qu'il subit.
6- Trouver les instants t_0 et t_1 pour lesquels l'ordonnée du mobile est nul.
7- Donner la vitesse du mobile aux instants t_0 et t_1. Conclure ?

Exercice 02 (04 pts)

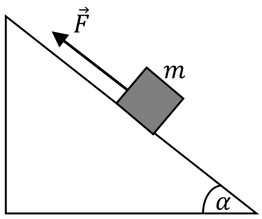
Un point M décrit une trajectoire curviligne dans le plan XOY est repéré en coordonnées polaires par les équations :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{b}}\ ;\ \theta = \frac{t}{b} \text{ avec } \rho_0 \ et\ b \text{ des constants.}$$

1- Dans la base polaire trouver des vecteurs vitesse et accélération de M en coordonnées polaires. En déduire les normes de ces vecteurs.
2- Calculer l'accélération tangentielle et normale de M. Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 3 (07pts)

Soit un corps de masse $m = 2\ kg$ qui glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. Les coefficients du frottement statique et cinétique entre les surfaces en contact sont $\mu_s = 0.50$ et $\mu_c = 0.20$, respectivement. On applique sur le corps une force $\vec{F}$ horizontale au plan incliné (voir figure ci-contre). On prendra $g = 10\ m/s^2$.



Déterminer la valeur de cette force telle que la masse m :

a- reste immobile **b-** se déplace avec une vitesse constante $v = 1\ m/s$ **c-** se déplace avec une accélération constante $a = 1\ m/s^2$

Question de cours (02pts)

- Enoncer le principe fondamental de la dynamique pour le cas où la masse est variable (cas générale).
- Montrer qu'on peut écrire le rayon de courbure de la trajectoire R_c d'un mobile par la relation $R_c = \frac{v^3}{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}$, avec $\vec{a}$ et $\vec{v}$ sont le vecteur accélération et vitesse du mobile.

Bon courage

Corrigé

Exercice 1 (07pts)

1- L'équation de la trajectoire de M :

$$x = 5t \Rightarrow t = \frac{x}{5} \Rightarrow y = -\frac{x}{5}(x-5) \qquad \textbf{(0.5)}$$

2- Les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 5 & \textbf{(0.25)} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -5(2t-1) & \textbf{(0.25)} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 & \textbf{(0.25)} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -10 & \textbf{(0.25)} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5\sqrt{(2t-1)^2+1} \quad \textbf{(0.5)} \qquad ; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10 \ \textbf{(0.5)}$$

3- La nature de mouvement : $\vec{a}.\vec{v} = 50(2t-1)$ **(0.5)**

Mouvement uniformément accéléré $\Rightarrow \vec{a}.\vec{v} \succ 0 \Rightarrow t \succ \frac{1}{2}$ **(0.5)**

Mouvement uniformément décéléré $\Rightarrow \vec{a}.\vec{v} \prec 0 \Rightarrow 0 \prec t \prec \frac{1}{2}$ **(0.5)**

4- Les composantes tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{10\,(2t-1)}{\sqrt{(2t-1)^2+1}} \ ; \ \textbf{(0.5)} \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{10}{\sqrt{(2t-1)^2+1}} \quad \textbf{(0.5)}$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{((2t-1)^2+1)^{3/2}}{10} \quad \textbf{(0.5)}$$

5- La quantité de mouvement et la force subie par M.

$$\vec{P} = m\vec{v} = m[5\vec{\imath} - 5(2t-1)\vec{\jmath}] \quad \textbf{(0.5)} \qquad ; \ \vec{F} = m\vec{a} = -10\vec{\jmath} \quad \textbf{(0.5)}$$

6- $y = 0 \Rightarrow -5t(t-1) = 0 \Rightarrow \ t_0 = 0s \ ou \ t_0 = 1s$ **(0.5)**

7- On a $v = 5\sqrt{(2t-1)^2+1}$ donc ;

$$t_0 = 0s \Rightarrow v_0 = 5\sqrt{2}\,u.a \quad \textbf{(0.25)} \qquad t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 5\sqrt{2}\,u.a \quad \textbf{(0.25)}$$

$$v_0 = v_1$$

Exercice 2 (04pts)

1. Vecteurs vitesse et accélération :

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ **(0.25)** $\qquad \dot{\rho} = -\frac{\rho}{b}$ et $\dot{\theta} = \frac{1}{b}$ **(0.25)**

$\Rightarrow \ \vec{v} = \frac{\rho}{b}(-\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)$ **(0.25)**

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$ **(0.25)** $\qquad \ddot{\rho} = \frac{1}{b^2}\rho$ et $\ddot{\theta} = 0$ **(0.25)**

$\Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{b^2}\rho - \rho\frac{1}{b^2}\right)\vec{u}_\rho - 2\rho\frac{1}{b^2}\vec{u}_\theta = -2\frac{\rho}{b^2}\vec{u}_\theta$ **(0.25)**

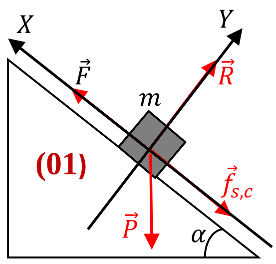
$\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{2}}{b}\rho$ **(0.5)**; $\qquad \|\vec{a}\| = \frac{2}{b^2}\rho$ **(0.5)**

2. $a_T = \frac{dv}{dt} = -\sqrt{2}\frac{\rho}{b^2}$ **(0.5)** ; $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{2}\frac{\rho}{b^2}$ **(0.5)**

$R = \frac{v^2}{a_N} = \sqrt{2}\rho$ **(0.5)**

Exercice 3 (07pts)

PFD :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \;:\; \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}_{s,c} = m\vec{a} \quad \textbf{(0.75)}$$

Projection :

$$\begin{cases} (OX) : F - P_x - f_{s,c} = ma \;\textbf{(0.5)} \\ (OY) : R - P_y = 0 \quad \textbf{(0.5)} \end{cases}$$

Force de frottement :

$$f_{s,c} = \mu_{s,c}R = \mu_{s,c}P_y = \mu_{s,c}mg\cos\alpha \quad \textbf{(0.5)}$$

Expression de la force F :

$$F = P_x + f_{s,c} + ma = mg(\sin\alpha + \mu_{s,c}\cos\alpha) + ma \quad \textbf{(0.75)}$$

a- Le corps reste immobile : $\mu = \mu_s$; $a = 0$ **(0.5)**

$$F = mg(\sin\alpha + \mu_s\cos\alpha) = 18.6\ N \quad \textbf{(0.5)}$$

b- Le corps se déplace avec une vitesse constante $v = 1\ m/s$: $\mu = \mu_c$; $a = 0$ **(0.5)**

$$F = mg(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha) = 13.46\ N \quad \textbf{(0.5)}$$

c- Le corps se déplace avec une accélération constante $a = 1\ m/s^2$: $\mu = \mu_c$ **(0.5)**

$$F = mg(\sin\alpha + \mu_c\cos\alpha) + ma = 15.46\ N \quad \textbf{(0.5)}$$

Question de cours (02Pts)

La résultante des forces extérieurs appliquée sur un corps égale à la variation de son vecteur de quantité de mouvement par rapport au temps $\sum \vec{F}_{ext} = d\vec{p}/dt$. **(01)**

- $a_N = a.sin(\alpha)$

$\|\vec{a} \wedge \vec{v}\| = a.v.sin(\alpha) \rightarrow sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}\wedge\vec{v}\|}{a.v}$ **(0.5)**

$R_C = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^2}{a.sin(\alpha)} = \frac{v^2}{a.\frac{\|\vec{a}\wedge\vec{v}\|}{a.v}} = \frac{v^3}{\|\vec{a}\wedge\vec{v}\|}$ **(0.5)**