Examen de remplacement

Exercice 1 : (08 points)

Le mouvement d'un point matériel M, dans un référentiel (OXY) muni de la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est décrit par les équations paramétriques suivantes : $x(t) = \alpha t - 4$; $y(t) = \beta(t-2)^2$

Où α et β sont des constantes réelles non nulles et strictement positives.

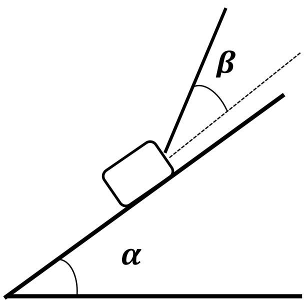
1- Donner les dimensions des constantes α et β ;
2- Donner l'équation de la trajectoire de M ;
3- Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules ;
4- Quel est la nature du mouvement ;
5- Trouver l'expression du cosinus de l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur accélération. En déduire l'instant t_0 pour lequel les deux vecteurs sont perpendiculaire.
6- Déterminer les composantes tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire ;
7- Si m est la masse du point matériel M, déterminer sa quantité de mouvement et la force qu'il subit.

Exercice 02 (05pts)

Un point M se déplace sur une spirale logarithmique d'équations polaires paramétriques :
$\rho = \rho_0 e^{\omega t}$; $\theta = \omega t$avec $\rho_0 et \omega$des constants.

1- Dans la base polaire trouver des vecteurs vitesse et accélération de M en coordonnées polaires. En déduire les normes de ces vecteurs.
2- Que vaut l'angle αque fait le vecteur vitesse avec le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$?
3- Calculer l'accélération tangentielle et normale de M. Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 03 (07pts)



Un bloc de masse m = 200 kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celui-ci (figure).

1. Représenter les forces appliquées sur le bloc, sachant que ce dernier soumis à la force de frottement $\vec{f_r}$.
2. La tension du câble vaut $T = 1000\ N$. Le mouvement étant uniforme de vitesse $v = 10\ km.h^{-1}$. Déterminer la réaction normale Rdu plan incliné et la force de frottement appliquée sur le bloc. Déduire le coefficient de frottement cinétique bloc-sol μ_c.

Données : $\alpha = 20°, \beta = 30°, g = 10\ m.s^{-2}$.

3. On augmente la tension et le mouvement du bloc devient uniformément accéléré.

a. Le coefficient de frottement bloc-sol restant identiques, la force de frottement f_r est-elle modifiée?
b. La vitesse du bloc passe de $10\ km.h^{-1}$ à $20\ km.h^{-1}$ sur une distance de $10\ m$. Calculer l'accélération du mouvement.

Bon courage

Corrigé

Exercice 01 (08pts)

$$x(t) = \alpha t - 4\,;\; y(t) = \beta(t-2)^2$$

1- Les dimensions des constantes α et β :

$$[\alpha] = L.T^{-1} \;\; ; \; [\beta] = L.T^{-2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

2- L'équation de la trajectoire de M :

$$x = \alpha t - 4 \Rightarrow t = \frac{x+4}{\alpha} \Rightarrow y = \left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)(x - 2\alpha + 4)^2 \qquad \textbf{(0.75)}$$

3- Les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2\beta(t-2) \end{cases} \textbf{(0.5)} \quad ; \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 2\beta \end{cases} \textbf{(0.5)}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2(t-2)^2} \quad \textbf{(0.5)}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\beta \quad \textbf{(0.5)}$$

4- Nature de movement:

$$\vec{v}.\vec{a} = 4\beta^2(t-2) \qquad \textbf{(0.25)}$$

$$\vec{v}.\vec{a} = 0 \;\rightarrow t = 2s \qquad \textbf{(0.25)}$$

$\vec{v}.\vec{a} > 0 \;\rightarrow t > 2s$ mouvement uniformément accéléré **(0.25)**

$\vec{v}.\vec{a} < 0 \;\rightarrow 0 < t < 2s$ movement uniformément décéléré. **(0.25)**

5- L'expression du cosinus de l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur accélération.

$$\vec{v}.\vec{a} = \|\vec{v}\|.\|\vec{a}\|\cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{v}.\vec{a}}{\|\vec{v}\|.\|a\|} \quad \textbf{(0.25)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{4\beta^2(t-2)}{2\beta\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2(t-2)^2}} \quad \textbf{(0.5)}$$

$$\vec{a} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{v}.\vec{a} = 0 \rightarrow \frac{4\beta^2(t-2)}{2\beta\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2(t-2)^2}} = 0 \rightarrow t = 2s \quad \textbf{(0.5)}$$

6- Les composantes tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{4\beta^2(t-2)}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2(t-2)^2}} \;\textbf{(0.5)} \; ; \; a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{2\alpha\beta \;\textbf{(0.5)}}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2(t-2)^2}} \; ; \; R_c = \frac{v^2}{a_n}$$

$$= \frac{(\alpha^2 + 4\beta^2(t-2)^2)^{3/2}}{2\alpha\beta} \quad \textbf{(0.5)}$$

7- La quantité de mouvement et la force subie par M.

$$\vec{P} = m\vec{v} = m\left[\alpha\vec{\imath} + \left(2\beta(t-2)\right)\vec{\jmath}\right] \quad \textbf{(0.5)} \qquad ; \; \vec{F} = m\vec{a} = (2\beta m)\vec{\jmath} \;\textbf{(0.5)}$$

Exercice 2 (5 pts)

1. Vecteurs vitesse et accélération:

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ **(0.5)** $\qquad \dot{\rho} = \rho\omega$ et $\dot{\theta} = \omega$ **(0.25)**

$\Rightarrow \vec{v} = \rho\omega(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)$ **(0.5)**

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$ **(0.5)** $\qquad \ddot{\rho} = \omega^2\rho$ et $\ddot{\theta} = 0$ **(0.25)**

$\Rightarrow \vec{a} = (\omega^2\rho - \rho\omega^2)\vec{u}_\rho + 2\rho\omega^2\vec{u}_\theta = 2\rho\omega^2\vec{u}_\theta$ **(0.5)**

ou bien

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\rho\omega(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta))}{dt} = \rho\omega^2(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta) + \rho\omega(\omega\vec{u}_\theta - \omega\vec{u}_\rho)$

donc $\vec{a} = 2\rho\omega^2\vec{u}_\theta$

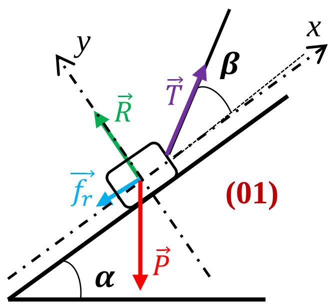
$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}\rho\omega$ **(0.25)**; $\quad \|\vec{a}\| = 2\rho\omega^2$ **(0.25)**

2. $\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{u}_\rho}{\|\vec{v}\|.\|\vec{u}_\rho\|} = \frac{\rho\omega}{\sqrt{2}\rho\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45°$ **(0.75)**

3. $a_T = \frac{dv}{dt} = \sqrt{2}\rho\omega^2$ **(0.5)**; $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{2}\rho\omega^2$ **(0.5)**

$R = \frac{v^2}{a_N} = \sqrt{2}\rho$ **(0.25)**

Exercice 3 (7 pts)



1. Representation des forces:
2. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. **(0.25)**

Le système "bloc" est en M. R. U. $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ **(0.5)**

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f}_r = \vec{0}$ **(0.25)**

Proj/$x'x$: $-mg\sin\alpha - f_r + T\cos\beta = 0$ **(0.5)**

Proj/$y'y$: $-mg\cos\alpha + R + T\sin\beta = 0$ **(0.5)**

$\Rightarrow \begin{cases} f_r = -mg\sin\alpha + T\cos\beta \ldots.\{1\} \\ R = mg\cos\alpha - T\sin\beta \ldots\ldots\{2\} \end{cases}$ **(0.5)** A.N.: $\begin{cases} f_r = 182\ N \\ R = 1379\ N \end{cases}$ **(0.5)**

Coefficient de frottement cinétique: $\mu_c = \frac{f_r}{R} = \frac{182}{1379} = 0.132$ **(0.75)**

3. **a)** T augmente, R va donc diminuer selon l'équation $\{2\}$ qui reste valable dans ce cas.

Le coefficient μ_c restant constant et $f_r = \mu_c R$, donc f_r diminue aussi. **(01)**

b) On a $v_2^2 - v_1^2 = 2ad \Rightarrow a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$ **(0.5)**

$a = \frac{\left(20\times\frac{1000}{3600}\right)^2 - \left(10\times\frac{1000}{3600}\right)^2}{2\times10}$ **(0.5)** $\quad$ donc $a = 1.16\ m.s^{-2}$ **(0.25)**