Série de TD 02

Exercice 01 :

On dispose des charges ponctuelles $q_1 = q_2 = Q$ et $q_3 = q_4 = -2Q$, aux sommets d'un carré de côté a.

1- Déterminer le champ électrique au centre O du carré.

2- Déterminer le potentiel électrostatique au point O.

3- En place en O une charge ponctuelle Q. Trouver la force électrostatique que subit cette charge et son énergie potentiel.

Exercice 02 :

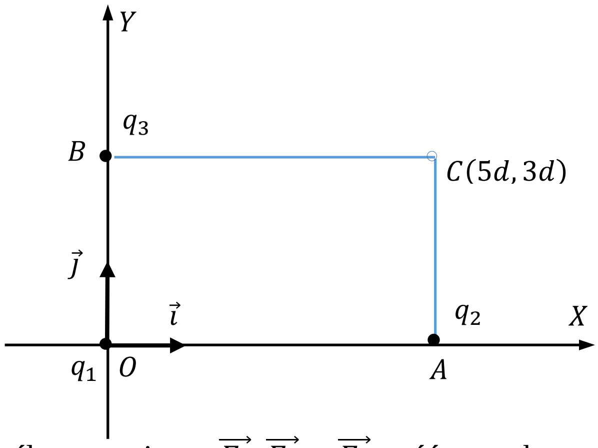
Dans un repère orthonormé $O(\vec{\imath},\vec{\jmath})$,

considérons trois charges ponctuelles

$q_1 = 15q$, $q_2 = 9q$ et $q_3 = -4q$, placées

aux points $O(0,0)$,$A(5d,0)$ et $B(0,3d)$

respectivement. $(q > 0)$



1) Calculer puis représenter les champs électrostatiques $\overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{E_2}$ et $\overrightarrow{E_3}$ créés par charges q_1, q_2 et q_3 respectivement au point $C(5d,3d)$.
2) En déduire le champ électrostatique total résultant au point $C(5d,3d)$.
3) Calculer le potentiel électrostatique au point $C(5d,3d)$.

A.N. : $q = 2nC, d = 1cm$

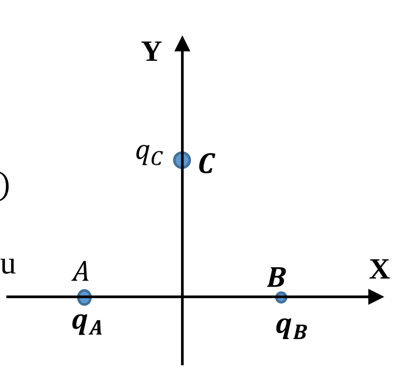
On place une charge q_4 au point $C(5d,3d)$.

4) En déduire la force électrostatique subie par la charge q_4.
5) En déduire l'énergie potentielle de la charge q_4.
6) Calculer E_i l'énergie interne totale du système créé par les quatre charges.

A.N. : $q_4 = 4nC$

Exercice 03 :

On considère trois charges ponctuelles $q_A = -q, q_B = -2q\ et\ q_C = 3q\ (q > 0)$placées aux points $A(-a,0)$, $B(a,0)$ et $C(0,a)$ respectivement.

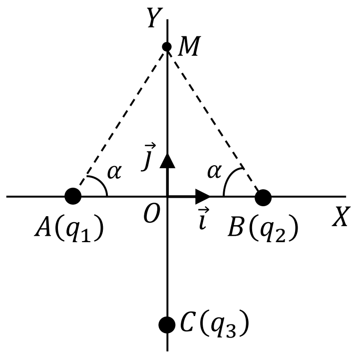


1. Déterminer le potentiel électrostatique créé en un point $M(x,y)$ situé dans le plan des charges.
2. En déduire le champ électrostatique créé par les trois charges au point $M(x,y)$.

3. Calculer l'énergie interne formé par les trois charges.

Exercices supplémentaires :

Exercice s1 :

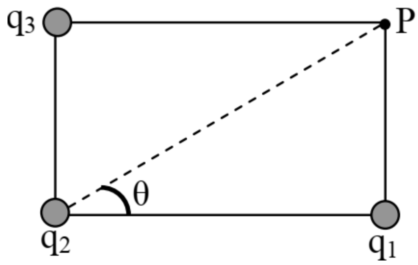


Dans le plan OXY, trois charges $q_1 = q_2 = q > 0$ et $q_3 = -q$ sont placées au point $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(+\frac{a}{2}, 0\right)$et $C(-a, 0)$, respectivement.

1. Trouver, en fonction de q, y et a, les expressions du champ et du potentiel électrostatique créés par les trois charges au point $M(0, y)$, tel que $y > 0$;
2. Calculer l'énergie interne du système forme par les trois charges q_1, q_2et q_3 ;
3. Déduire la force subie par une charge ponctuelle $q_4 = q > 0$ placée au point M et son énergie potentielle électrostatique.

Exercice S2 :

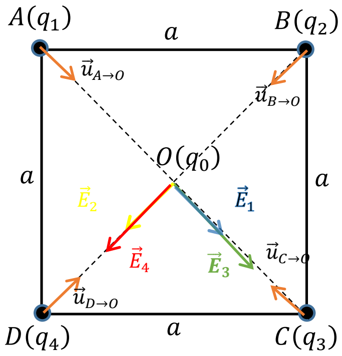
Trois charges ponctuelles positives q_1, q_2 et q_3 sont placées aux coins d'un rectangle, de largeur d et de longueur $2d$.



1- Trouver le champ électrique au point p.
2- Maintenant si q_2 est une charge variable
   a- Quelle est la relation entre q_2 et q_3 pour que la composante suivant l'axe des x du champ résultant au point P soit nulle ?
   b- Donner l'expression du potentiel électrostatique en P.
   c- Monter que la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ est valide.

Corrigé

Exercice 01 :



1- $OA = OB = OC = OD = a/\sqrt{2}$

$\vec{u}_{A\to O} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath} = 1/\sqrt{2}\vec{\imath} - 1/\sqrt{2}\vec{\jmath}$; $\vec{u}_{B\to O} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath} = -1/\sqrt{2}\vec{\imath} - 1/\sqrt{2}\vec{\jmath}$

$\vec{u}_{C\to O} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath} = -1/\sqrt{2}\vec{\imath} + 1/\sqrt{2}\vec{\jmath}$; $\vec{u}_{D\to O} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{\jmath} = 1/\sqrt{2}\vec{\imath} + 1/\sqrt{2}\vec{\jmath}$

$$\vec{E}_{Tot}(O) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{E_1} = \vec{E}_{q_1}(O) = \frac{kq_A}{AO^2}\vec{u}_{A\to O} = \frac{kq}{(a/\sqrt{2})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}\right) = \frac{\sqrt{2}kq}{a^2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

$$\vec{E_2} = \vec{E}_{q_2}(O) = \frac{kq_B}{BO^2}\vec{u}_{B\to O} = \frac{kq}{(a/\sqrt{2})^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}\right) = \frac{\sqrt{2}kq}{a^2}(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

$$\vec{E_3} = \vec{E}_{q_3}(O) = \frac{kq_C}{CO^2}\vec{u}_{C\to O} = \frac{-2kq}{(a/\sqrt{2})^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}\right) = \frac{2\sqrt{2}kq}{a^2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

$$\vec{E_4} = \vec{E}_{q_4}(O) = \frac{kq_D}{DO^2}\vec{u}_{D\to O} = \frac{-2kq}{(a/\sqrt{2})^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}\right) = \frac{2\sqrt{2}kq}{a^2}(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})$$

$$\vec{E}_{Tot}(O) = \frac{\sqrt{2}kq}{a^2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + \frac{\sqrt{2}kq}{a^2}(-\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + \frac{2\sqrt{2}kq}{a^2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath}) + \frac{2\sqrt{2}kq}{a^2}(-\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = \frac{-6\sqrt{2}kq}{a^2}(\vec{\jmath})$$

2- Le potentiel

$$V(O) = V_A + V_B + V_C + V_D$$
$$V_A = \frac{kq_A}{OA} = \frac{\sqrt{2}Kq}{a}$$
$$V_B = \frac{kq_B}{OB} = \frac{\sqrt{2}Kq}{a}$$
$$V_C = \frac{kq_C}{OC} = -\frac{2\sqrt{2}Kq}{a}$$
$$V_D = \frac{kq_D}{OD} = -\frac{2\sqrt{2}Kq}{a}$$
$$V(O) = -\frac{2\sqrt{2}Kq}{a}$$

3- Force et l'énergie électrostatique :

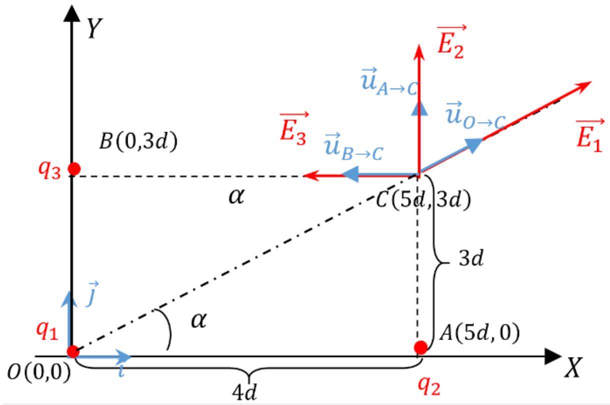
$\vec{F}(q_O) = q_0.\vec{E}_{tot}(O) = \frac{-6\sqrt{2}kq^2}{a^2}(\vec{\jmath})$

$$E_p = q_0\,V(O) = -\frac{2\sqrt{2}Kq^2}{a}$$

Exercice 02 :

1. Le champ

a) $\overrightarrow{E_1} = \vec{E}_{Q_1}(C) = K \frac{q_1}{(\|\overrightarrow{OC}\|)^2} \vec{u}_{O\to C} = K q_1 \frac{\overrightarrow{OC}}{(\|\overrightarrow{OC}\|)^3}$



Avec : $\vec{u}_{O\to C} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}$

$\|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2}$

$= \sqrt{(4d-0)^2 + (3d-0)^2} = 5d$

Ou bien : $OC^2 = OA^2 + AC^2 =$

$(4d)^2 + (3d)^2$

Donc : $OC = 5d$

Et : $\overrightarrow{OC} = (x_C - x_O)\vec{\imath} + (y_C - y_O)\vec{\jmath}$

$= 4d\vec{\imath} + 3d\vec{\jmath}$

$$\vec{u}_{O\to C} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|} = \frac{4d\vec{\imath} + 3d\vec{\jmath}}{5d} = \frac{4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}}{5}$$

Ou bien : $\vec{u}_{O\to C} = \cos\alpha\ \vec{\imath} + \sin\alpha\ \vec{\imath}$

Avec : $\cos\alpha = \frac{OA}{OC} = \frac{4d}{5d} = \frac{4}{5}$ et $\sin\alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5}$

Donc : $\vec{u}_{O\to C} = \frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$

On aura alors :

$$\overrightarrow{E_1} = K \frac{15q}{(5d)^2}\left(\frac{4\vec{\imath}+3\vec{\jmath}}{5}\right)$$
$$\overrightarrow{E_1} = \frac{3}{5}\frac{Kq}{d^2}(4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$$

b) $\vec{E}_2 = \vec{E}_{q_2}(C) = K \frac{q_2}{(\|\overrightarrow{AC}\|)^2} \vec{u}_{A\to C}$

Avec :

$\|\overrightarrow{AC}\| = AC = 3d$ et $\vec{u}_{A\to C} = \vec{\jmath}$

Donc : $\vec{E}_2 = K \frac{9q}{9d^2}\vec{\jmath} = \frac{Kq}{d^2}\vec{\jmath}$

c) $\vec{E}_3 = \vec{E}_{q_3}(C) = K \frac{q_3}{(\|\overrightarrow{BC}\|)^2} \vec{u}_{B\to C}$

Avec :

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = BC = 4d$ et $\vec{u}_{A\to C} = \vec{\imath}$

Donc : $\vec{E}_2 = K\frac{(-4q)}{16d^2}\vec{\imath} = -\frac{1}{4}\frac{Kq}{d^2}\vec{\imath}$

2. Selon le principe de superposition :

$\vec{E}_{tot}(C) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

$= \frac{3}{5}\frac{Kq}{d^2}(4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) + \frac{Kq}{d^2}\vec{\jmath} - \frac{1}{4}\frac{Kq}{d^2}\vec{\imath}$

$$\vec{E}_{tot}(C) = \frac{Kq}{d^2}[(2{,}15)\vec{\imath} + (2{,}8)\vec{\jmath}]$$

Module : $\left\|\vec{E}_{tot}(C)\right\| \cong 3{,}53\frac{Kq}{d^2}$

A.N : $\left\|\vec{E}_{tot}(C)\right\| = 3{,}53\ \frac{9\,.10^9.2.10^{-9}}{(10^{-2})^2} = 6{,}35.\,10^5\ V/m$

3. Potentiel :

$V(C)\ =\ V_{q_1} + V_{q_2} + V_{q_3}$

$= K\frac{q_1}{OC} + K\frac{q_2}{AC} + K\frac{q_3}{BC}$

$= K\ \left(\frac{15q}{5d} + \frac{9q}{3d} + \frac{-4q}{4d}\right)$

$V(C) = 5K\frac{q}{d}$

A .N :

$V(C) = 5.9.\,10^9.\frac{2.10^{-9}}{10^{-2}} = 9.\,10^3\ V$

4. Force électrostatique :

$\vec{F}(q_4) = q_4.\vec{E}_{tot}(C)$

$= \frac{Kqq_4}{d^2}[(2{,}15)\vec{\imath} + (2{,}8)\vec{\jmath}]$

$\left\|\vec{F}(q_4)\right\| = q_4.\left\|\vec{E}_{tot}(C)\right\|$

A.N :

$\left\|\vec{F}(q_4)\right\| = 4.\,10^{-9}.\,6{,}35.\,10^5\ N$

$= 2{,}54.\,10^{-3}\ N$

5. Energie potentielle:

$E_p = q_4.V(C) = 5K\frac{q.q_4}{d}$

A .N :

$E_p = 4.\,10^{-9}.\,9.\,10^3 = 3{,}6.\,10^{-5}\ J$

6. Energie interne du système:

$$E_i = K\sum_{i>j}^{n}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}K\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^{n}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}$$

$$E_i = K\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_1q_4}{r_{14}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}+\frac{q_2q_4}{r_{24}}+\frac{q_3q_4}{r_{24}}\right)$$

$$= K(\frac{135q^2}{OA}-\frac{60q^2}{OB}+\frac{15qq_4}{OC}-\frac{36q^2}{AB}+\frac{9qq_4}{AC}-\frac{4qq_4}{BC})$$

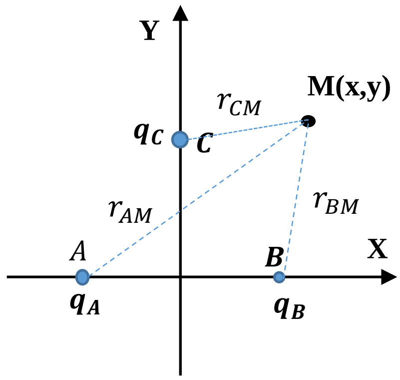
$$= K(\frac{135q^2}{4d}-\frac{60q^2}{3d}+\frac{15qq_4}{5d}-\frac{36q^2}{5d}+\frac{9qq_4}{3d}-\frac{4qq_4}{4d})$$

$$= K\frac{q}{d}(6{,}55q+5q_4)$$

A.N : $E_i = 5{,}96.10^{-5}\,J$

Exercice 03:

$$V(M) = V_A(M)+V_B(M)+V_C(M)$$



$$r_{AM} = \overline{AM} = \sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2} = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$$

$$r_{BM} = \overline{BM} = \sqrt{(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2} = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

$$r_{CM} = \overline{CM} = \sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2} = \sqrt{x^2+(y-a)^2}$$

$$V_A(M) = \frac{kq_A}{r_{AM}} = \frac{-Kq}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

$$V_B = \frac{kq_B}{r_{BM}} = \frac{-2Kq}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$$V_C = \frac{kq_C}{r_{CM}} = \frac{3Kq}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$$

$$V(M) = kq\left(\frac{-1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}-\frac{-2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right)$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} == -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} = E_x\vec{\imath}+E_y\vec{\jmath}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kq\left(\frac{x+a}{\left((x+a)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}}-\frac{3x}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{3/2}}\right)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -kq\left(\frac{y}{\left((x+a)^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{2y}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{3/2}}-\frac{3(y-a)}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^{3/2}}\right)$$