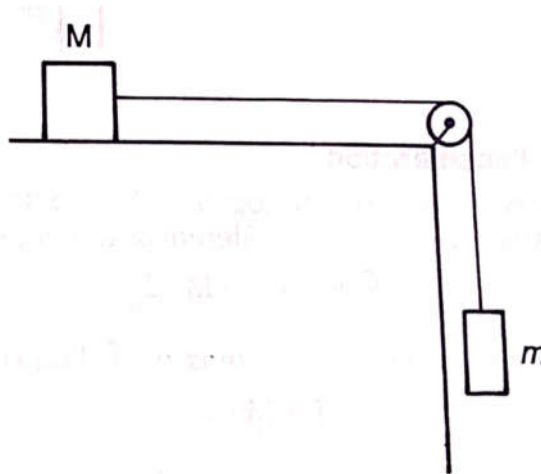


TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

Exercice 1 : (Glissement sur un plan horizontal)

Un solide de masse M est entraîné, sur un plan horizontal, par un solide de masse m . la liaison s'effectue au moyen d'une corde inextensible et sans masse qui peut glisser sans frottement dans la gorge d'une poulie.



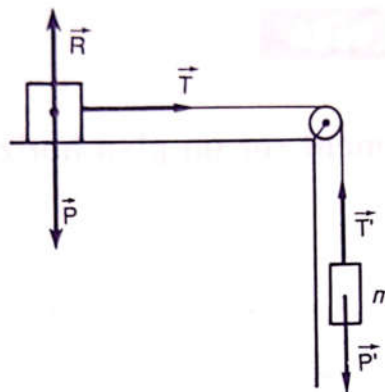
Données : $M = 25 \text{ Kg}$; $m = 5 \text{ Kg}$; $g = 9,80 \text{ m.s}^{-1}$

- Faire le bilan des forces sur le corps de masse M puis sur le corps de masse m .
- Calculer l'accélération de l'ensemble.
- Calculer l'intensité de la tension de la corde.

Solution

a) Bilans des forces

Le corps de masse M subit trois forces : son poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$, la tension de la corde $\vec{T}$. Le corps de masse m subit deux forces : son poids $\vec{P}'$ et la tension de la corde $\vec{T}'$. On obtient la figure suivante :



TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

b) Calcul de l'accélération

Pour le corps de masse M , en appelant $\vec{a}$ le vecteur accélération de son centre d'inertie, on a, dans le référentiel terrestre

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = M \cdot \vec{a}.$$

Pour la direction horizontale, dans le sens de $\vec{T}$, l'équation s'écrit

$$T = M \cdot a.$$

Pour le corps de masse m , en appelant $\vec{a}'$ le vecteur accélération de son d'inertie, on a

$$\vec{P}' + \vec{T}' = m \cdot \vec{a}'.$$

Sur la direction verticale, dans le sens de $\vec{P}'$, l'équation précédente s'écrit

$$T + T' = m \cdot a'.$$

La corde est inextensible, on peut donc écrire que

$$a = a'.$$

On obtient alors

$$T = M \cdot a$$

et

$$m \cdot g - T' = m \cdot a.$$

La tension de la corde est la même en chacun des points puisque sa masse est négligée, on obtient

$$T = T'$$

d'où

$$Ma = m \cdot g - ma.$$

Finalement

$$a = \frac{m}{M + m} \cdot g.$$

Application numérique :

$$M = 25 \text{ Kg} ; \quad m = 5 \text{ Kg} ; \quad g = 9,80 \text{ m.s}^{-1}$$

$$a = \frac{5}{30} \times 9,80$$

$$a = 1,63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

c) Tension de la corde

La tension de la corde a pour expression $T = M \cdot a$

d'où

$$T = \frac{M \cdot m}{M + m} \cdot g.$$

Application numérique :

$$M = 25 \text{ Kg} ; \quad m = 5 \text{ Kg} ; \quad g = 9,80 \text{ m.s}^{-1}$$

$$T = \frac{25 \times 5}{30} \times 9,80$$

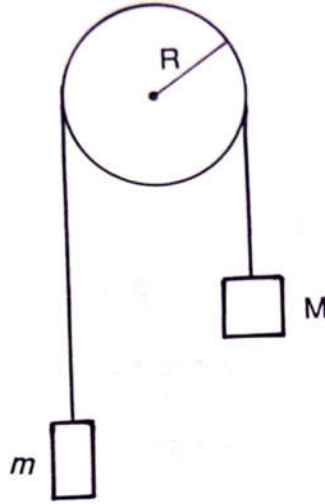
$$T = 40,8 \text{ N}.$$

TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

Exercice 2 : (Méthode énergétique)

On considère le système constitué de deux corps de masses m et M reliés par une corde de masse négligeable passant dans une gorge d'une poulie de rayon R . La corde ne glisse pas la gorge de la poulie, et on la supposera inextensible.

Données : $m = 20 \text{ kg}$; $M = 30 \text{ kg}$; moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe de rotation : $J = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$; $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$; $R = 8 \text{ cm}$.



- a) Le système est abandonné sans vitesse initiale. Que peut-on dire de son énergie mécanique ?
- b) Dédurre, par dérivation de l'énergie mécanique, l'accélération de l'ensemble.

Solution

a) Energie mécanique

En considérant les frottements comme étant négligeables, le système est conservatif et *son énergie mécanique E_0 reste constante.*

b) Accélération de l'ensemble

Exprimons l'énergie mécanique E_0 du système

$$E_0 = E_c + E_p$$

où E_c et E_p sont respectivement l'énergie cinétique totale et l'énergie potentielle de pesanteur des corps de masses m et M .

L'énergie cinétique E_c s'écrit

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

où v est la vitesse commune des deux solides de ω la vitesse angulaire de rotation de la poulie. Il faut remarquer que $\omega = \frac{v}{R}$ puisque la corde ne glisse pas dans la gorge de la poulie.

On obtient ainsi

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left(M + m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot v^2.$$

Après avoir choisi un axe vertical $z'z$, dirigé vers le haut et l'origine O on peut écrire

$$E_p = m \cdot g \cdot z + M \cdot g \cdot Z + c$$

où z et Z sont respectivement les coordonnées des centres d'inertie des deux solides et C une constante dont la valeur est fixée par le choix de l'origine de l'énergie potentielle.

L'énergie mécanique a pour expression dans le référentiel terrestre

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(M + m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot v^2 + m \cdot g \cdot z + M \cdot g \cdot Z + C$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient

$$0 = \left(M + m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} + m \cdot g \cdot \frac{dz}{dt} + M \cdot g \cdot \frac{dZ}{dt}.$$

Or $\frac{dv}{dt} = a$ est l'accélération du système, $\frac{dz}{dt} = v$ car z augmente et $\frac{dZ}{dt} = -v$ car Z diminue.

L'équation précédente devient

$$\left(M + m + \frac{J}{R^2} \right) \cdot v \cdot a + m \cdot g \cdot v + M \cdot g \cdot v = 0$$

soit

$$a = \frac{(M - m) \cdot g}{M + m + \frac{J}{R^2}}.$$

Application numérique :

$$m = 20 \text{ kg} ; \quad M = 30 \text{ kg} ; \quad J = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2 ; \quad g = 9,80 \text{ m.s}^{-2} ; \quad R = 8 \text{ cm}.$$

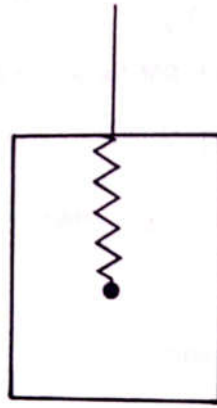
$$a = \frac{(30 - 20) \times 9,80}{30 + 20 + \frac{6,4 \cdot 10^{-3}}{(8 \cdot 10^{-2})^2}}$$

$$a = 1,92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

Exercice 3 : (Ressort dans un ascenseur)

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, est accroché au plafond d'un ascenseur. Un corps de masse m est fixé à son extrémité libre. La constante de raideur du ressort est notée k , et sa longueur à vide l_0 . On appelle g l'intensité du champ de pesanteur.

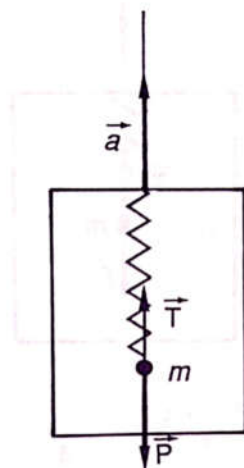


- a) L'ascenseur monte et possède une accélération constante a . Exprimer l'allongement x du ressort.
- b) L'ascenseur descend et possède une accélération constante a' . Exprimer l'allongement x' du ressort. Dans quel cas peut-on avoir $x' = 0$?

Solution

a) Etude de la montée

Lors de la montée, le ressort va s'allonger puisque l'ascenseur possède une accélération $\vec{a}$ dirigée vers le haut. Dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen, le corps de masse m est soumis à deux forces : la tension $\vec{T}$ du ressort et son poids $\vec{P}$.



On peut écrire dans le référentiel terrestre

$$\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a} .$$

TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

Sur un axe vertical dirigé vers le haut, on obtient

$$T - m \cdot g = m \cdot a$$

ou

$$T = m \cdot (g + a).$$

La tension T du ressort est proportionnelle à son allongement x par rapport à sa longueur à vide

$$T = k \cdot x.$$

Finalement

$$k \cdot x = m \cdot (g + a).$$

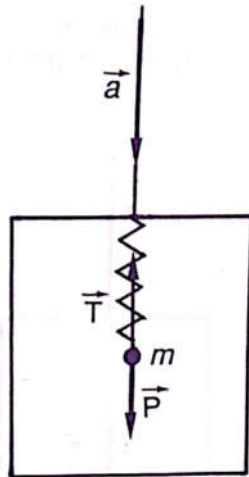
D'où

$$x = \frac{m \cdot (g + a)}{k}.$$

b) Etude de la descente

Au cours de la descente, la longueur du ressort diminue puisque l'ascenseur possède une accélération $\vec{a}$ dirigée vers le bas.

On obtient le schéma suivant :



Dans le référentiel terrestre, on a

$$\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}.$$

Sur un axe vertical dirigé vers le haut, on obtient

$$\vec{T} - m \cdot g = -m \cdot a$$

TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

où $\bar{T}$ est la mesure algébrique de la tension.

En écrivant que

$$\bar{T} = k \cdot \bar{x},$$

on a

$$k \cdot \bar{x} = m \cdot g - m \cdot a$$

soit

$$\bar{x} = \frac{m \cdot (g - a)}{k}.$$

On observe que pour $a = g$ on a $\bar{x} = 0$.

Le ressort possède alors sa longueur à vide l_0 et le solide est en état d'impesanteur.

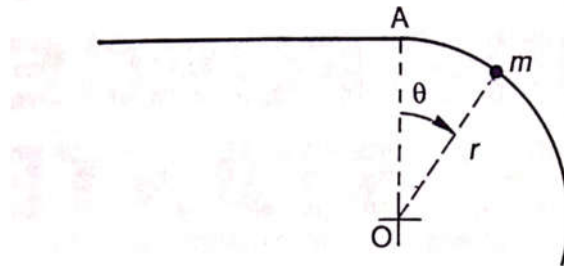
L'ascenseur est alors en chute libre, ce qui est pour le moins dangereux !

TD sur le mouvement du centre d'inertie d'un solide

Exercice 4 : (Glissement sur un support circulaire)

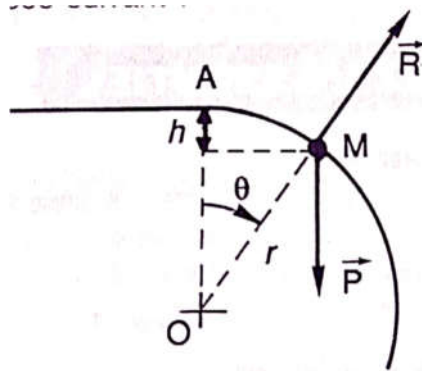
Un solide ponctuel, de masse m , glisse sans frottements sur un support circulaire de rayon r . Le point matériel part du point A sans vitesse initiale.

Calculer la valeur θ_0 de l'angle θ pour lequel le solide quitte le support.



Solution

Dans le référentiel terrestre, considéré comme étant galiléen, le solide est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ du support. On obtient le schéma des forces suivant :



Les forces $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sont reliées par l'équation

$$\vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

où $\vec{a}$ est le vecteur accélération du solide au point M.

Sur la direction et dans le sens de $\vec{R}$ on peut écrire

$$R - m \cdot g \cdot \cos \theta = -m \cdot \frac{v^2}{r}$$

où v est la vitesse du solide au point M.