Chapitre ELETROSTATIQUE 1

I.1 Phénomènes d'électrisation

I.1.1 Les débuts de l'électrostatique

Les phénomènes électrostatiques sont connus depuis l'antiquité grecque : Thalès de Milet au VI^e avant J.C. rapporte que l'ambre jaune frotté attire les corps légers, du duvet ou les brindilles de paille par exemple.

L'étude des phénomènes électriques s'est continuée jusqu'au XIXème siècle, où s'est élaborée la théorie unifiée des phénomènes électriques et magnétiques, appelée électromagnétisme.

On ce qui ce suit nous donnons les grandes étapes d'évolution de la théorie d'électricité[1] :

- en 1663, Otto von Guericke invente une machine constituée d'un globe de soufre en rotation autour d'un axe et frotté à la main, produisant ainsi des décharges électriques. Toutes sortes de machines de plus en plus élaborées sont inventées sur ce principe jusqu'au XIXe siècle.
- en 1730, Stephen Gray, teinturier de son métier et physicien par curiosité intellectuelle, établit la distinction entre conducteur et isolant et établit des listes de corps ayant l'un ou l'autre de ces comportements.
- en 1733, Charles-François du Fay (ou Dufay) remarque que deux corps légers mis en contact avec de l'ambre frotté se repoussent, que deux corps légers mis en contact avec du verre frotté se repoussent mais que deux corps légers mis en contact avec l'un avec de l'ambre frotté et l'autre du verre frotté s'attirent. Il en déduit qu'il y a deux sortes d'électricité rapidement appelées positive et négative.
- en 1745, Pieter van Musschenbroek et quelques autres inventent la bouteille de Leyde 4, ancêtre du condensateur, utilisée d'abord dans les foires pour donner des décharges électriques au public !
- vers 1750 : découverte de l'influence électrique (voir chapitre C-II) et invention de nombreuses machines sur ce principe, de l'électrophore de Volta (1775) à la machine de Wimshurst (1878) puis celle de Van de Graaff (1930) pour ne citer que les plus connues.
- puis commence la mise en forme de la théorie grâce à Benjamin Franklin, Joseph Priestley (loi en 1=r2), Henry Cavendish (conservation de la charge, découverte de la localisation des

[1] Cours de Joël SORNETTE.

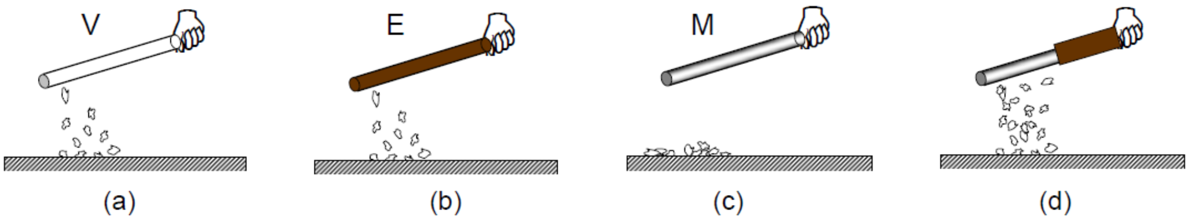
charges en surface) et enfin Coulomb qui énonce la loi qui porte son nom et la vérifie expérimentalement en 1785.

I.1.2 Types d'électrisation

a. Electrisation par frottement

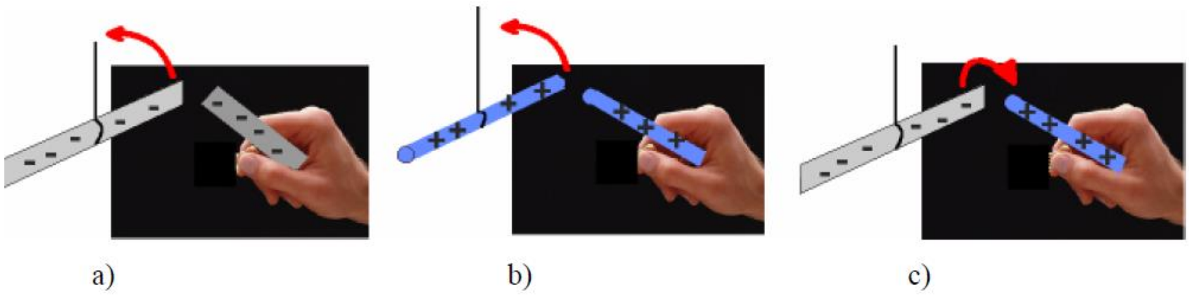
Une tige en verre, frottée par un morceau de drap en soie ou en laine, tenue à la main, peut attirer de petits morceaux de papier (figure I.1.a). On dit que le verre a été *électrisé,* ce phénomène est appelé *électrisation*. Le même phénomène est observé si on remplace la tige en verre par un bâton d'ébonite (figure I.1.b).

Si on répète l'expérience précédente en remplaçant la tige de verre par une tige métallique, en cuivre par exemple, on n'obtient aucun résultat (figure I.1.c), si la tige est tenue à la main. Par contre si on la tient, par l'intermédiaire d'un manche en bois, on constate que des forces d'attraction se produisent sur toute la surface du métal (figure I.1.d).



Figures I. 1

Les deux types d'électricité



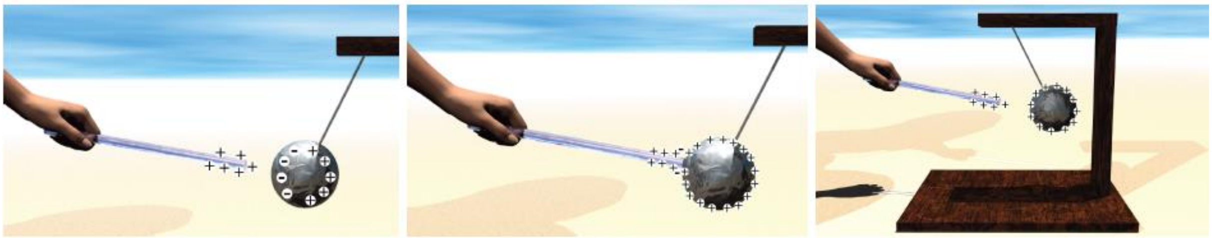
Figures I.2

Suspendons, en son milieu, une règle d'ébonite dont une extrémité a été électrisée par frottement. Approchons de cette extrémité la partie électrisée, par la même méthode, d'un second bâton d'ébonite (figure I(a)). L'interaction de ces parties électrisées se traduit par une répulsion. Répétons la même expérience, en remplaçant les règles d'ébonite par des règles de verre électrisées comme précédemment (figure I(b)). Là encore l'interaction se traduit par une répulsion.

Dans une troisième expérience, on met en présence l'extrémité électrisée de la règle d'ébonite et celle du de verre électrisée (figure I(c)). Il en résulte, à présent, une attraction.
Clairement, il existe deux types d'électricité différentes, celle qui apparaît sur une règle en plastique frottée et celle qui apparaît sur une tige en verre frottée.
Tous les matériaux peuvent être rangés en deux catégories. Une fois frottés, soit ils attirent une tige en verre et repoussent une règle en plastique, soit l'inverse. Benjamin Franklin a proposé de distinguer ces deux types de charge électrique par leur signe positif et négatif. *Il a choisi arbitrairement de donner le signe + aux charges électriques portées par une tige en verre frottée et le signe −, aux charges portées par une règle en plastique.*

b. Electrisation par Influence

Que se passe-t-il lorsqu'on approche deux corps électrisés l'un de l'autre ? Réalisons l'expérience suivante :

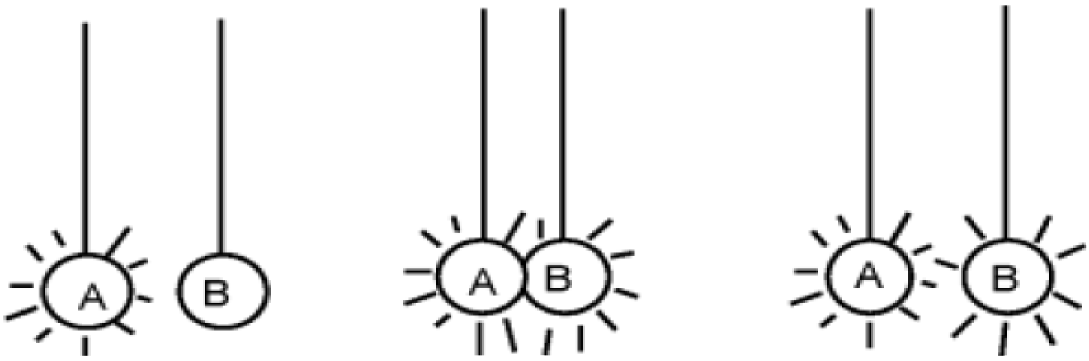


Figures I.3

On approche un objet (bâton) isolant chargé positivement d'un objet isolé conducteur initialement neutre (non chargé), comme une sphère métallique suspendue à un fil isolant.
Les charges négatives (les électrons) vont êtres attirées vers le bâton et laissent derrière elles les atomes ionisés du cristal. Ces atomes ionisés sont chargés positivement puisque le matériau est neutre au départ. La boule va être attirée vers le bâton (Figure I. 3(a)).
Si le bâton touche la boule, cette dernière va se chargée à la même charge du bâton et par conséquence ils vont se repousser Figure I. 3(b et c)).

c. Electrisation par contact

L'électrisation peut être transmise d'un corps à un autre par contact. Une expérience simple peut être effectuée à l'aide de deux boules métalliques suspendues par des fils de nylon. Si au départ, l'une est électrisée et pas l'autre, la mise en contact des deux boules les rend électrisées toutes deux.



Figures I.4

d. Electrisation par une source (Electrocinétique)

Elle se fait au moyen d'un générateur électrique. Si on relie à l'aide d'un fil conducteur un corps électrisable à un générateur électrique, celui-ci s'électrise et portera une charge de même signe que celle de la borne du générateur auquel il est branché.

I.1.3 La charge électrique

a. Définition

La charge électrique est une propriété fondamentale de la matière qui permet d'expliquer certains phénomènes (électrostatique, électrocinétique, électromagnétisme,…).
La charge électrique, qui caractérise le phénomène d'électrisation, ne peut être dissociée de la matière. Elle existe sous deux formes, qualifiées de *positive* et de *négative.* Les corps portant le même type de charge se repoussent par contre, les corps portant des charges de type différent s'attirent.

b. Quantification de la charge électrique

Le physicien américain Robert A. Millikan a montré en 1913, à partir d'une expérience mettant en jeu des gouttes d'huile électrisées, le fait que toute charge électrique q est quantifiée, c'est à dire qu'elle n'existe que sous forme de multiples entier n d'une charge élémentaire indivisible e:
$q = \pm ne$
où : $e = 1{,}602\ 10^{-19}$C (C'est la charge électrique portée par l'électron et le proton).
C est le "Coulomb", l'unité de charge dans le système international.

c. Conservation de la charge électrique

C'est un principe dont le sens est que la charge ne s'annihile pas et ne se crée pas. Elle est donc constante dans un système isolé.

Principe de conservation de la charge électrique :

Dans un système isolé la somme algébrique des charges électriques reste constante.

I.1.4 Structure de la matière

La vision moderne de la matière décrit celle-ci comme étant constituée d'atomes. Un atome est constitué d'un noyau (découvert en 1911 par Rutherford) formé par de protons chargés positivement et des neutrons sans charge. Celui-ci est entouré par un nuage composé d'électrons de charge négative. Ces électrons se repoussent les uns les autres mais restent confinés autour du noyau car celui-ci possède une charge électrique positive qui les attire.

Dans le tableau de Mendeleïev tout élément chimique X est représenté par la notation. ${}_{Z}^{A}X$. Le nombre A est appelé le nombre de masse : c'est le nombre total de nucléons (protons et neutrons). Le nombre Z est appelé le nombre atomique et est le nombre total de protons constituant le noyau. La charge électrique nucléaire totale est donc Q=+Ze, le cortège électronique possédant alors une charge totale Q=-Ze, assurant ainsi la neutralité électrique d'un atome.

I.1.5 Matériaux isolants et matériaux conducteurs

On peut classer les matériaux selon la capacité qu'ils ont de permettre le passage des charges.

– Matériau conducteur : C'est un matériau dans lequel les charges en excès peuvent se déplacer librement. Ceci parce que les atomes du matériau sont liés entre eux mais les électrons des couches atomiques périphériques sont faiblement liés alors avec une très faible énergie d'excitation (fournie par l'agitation thermique) les électrons des couches périphériques se libèrent.

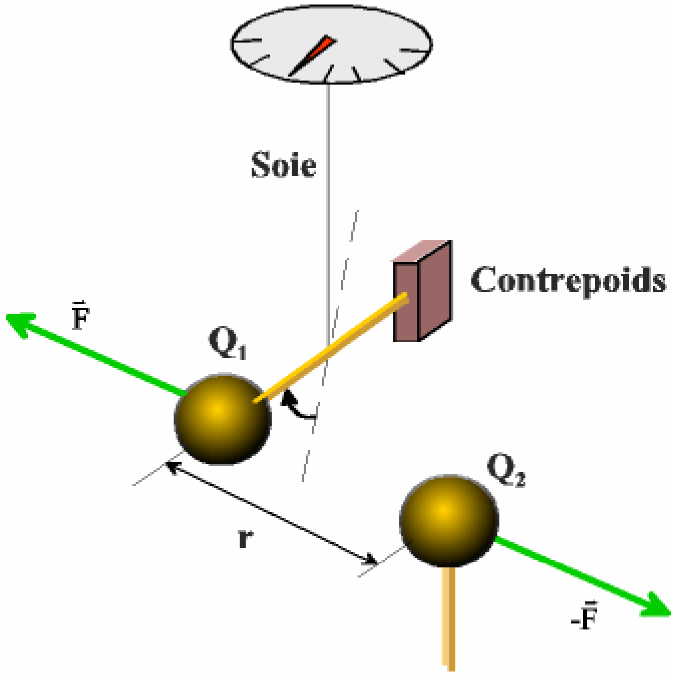
– Matériau isolant : c'est un matériau dans le quel les charges en excès sont ne peuvent pas se déplacer et restent localisés à l'endroit où ils ont été déposés. Dans ce type de matériau, les électrons périphériques sont très liés aux noyaux et ne peuvent pas former de "gaz". Il leur est très difficile de bouger. La densité d'électrons libres est alors quasi nulle. Un diélectrique est un isolant.

–Un matériau quelconque se situe évidemment quelque part entre ces deux états extrêmes.

I.1.6 Loi de Coulomb

En 1785, le physicien français Charles Augustin Coulomb établit expérimentalement la loi donnant la force existant entre deux charges électriques.

Pour mesurer les forces, Coulomb se servit d'une balance de torsion dans laquelle un dispositif en forme de haltère constitué d'une petite sphère métallique de charge Q1 et d'un contrepoids est suspendu à un fil de soie (voir figure I.5).



Figures I.5

a- Enoncé de la loi de Coulomb

Considérons **dans le vide**, deux **charges ponctuelles** q_1 et q_2, **fixées** en M_1 et M_2. Les deux charges **stationnaires** q_1 et q_2 exercent l'une sur l'autre une force proportionnelle à chacune des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. La force électrostatique est dirigée suivant la droite qui joint les charges (figure I-6). Elle attractive si les charges sont de signes contraires (figure I-6-a), répulsive lorsque les charges sont de même signe (figure I-6-b).

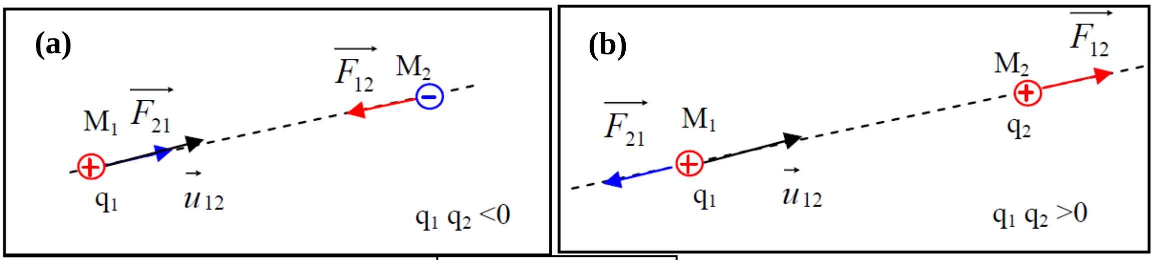


Figure I.6

La force F_{12} exercée par q_1 sur la charge q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

où $r = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$est la distance entre q_1 et q_2 et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 et défini par :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force $\vec{F}_{21}$ exercée par q_2 sur la charge q_1 est égale et opposée à $\vec{F}_{12}$, donc, $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

La constante de proportionnalité est liée aux unités choisies pour exprimer la force, la longueur et la charge. Dans le système d'unités international (S.I.), sous sa forme rationalisée,

K s'écrit :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 v.m/c$$

Où $\epsilon_0$est la permittivité du vide et a pour valeur :

$$\epsilon_0 = 8.854\ 10^{12} Fm^{-1}$$

Remarque : La loi de Coulomb est :

• Proportionnelle au produit des charges

• Inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les charges

• Dirigée parallèlement à M_1M2

• Elle est attractive si les 2 charges sont de signe contraire et répulsive si les 2 charges sont de même signe.

Exemple

Comparer la force de gravitation qui s'exerce entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène à la force électrostatique s'exerçant entre eux. La distance r qui sépare l'électron de masse m_e= 9,1 10^{-31}kg du proton de masse m_p= 1,7 10^{-27}kg est environ 5 10^{-11}m.

$$\|\vec{F}_{el}\| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 9.10^9 \frac{(1.6\ 10^{-19})^2}{(5\ 10^{-11})^2} = 9\ 10^{-8} N$$

$$\|\vec{F}_{gr}\| = G\frac{m_e m_p}{r^2} = 6.71\ 10^{-11} \frac{9.1\ 10^{-31} * 1.7\ 10^{-27}}{(5\ 10^{-11})^2} = 41\ 10^{-47} N$$

$$\frac{\|\vec{F}_{el}\|}{\|\vec{F}_{gr}\|} = 10^{39}$$

A l'échelle atomique les forces gravitationnelles sont négligeables devant les forces électrostatiques.

b- ***Principe De Superposition***

Considérons trois charges ponctuelles q_1, $q_2$et q **fixées** respectivement en P_1, P_2et M (Figure I-7).

Quelle est la force $\vec{F}$que subit la charge q placée en présence des charges $q_1$et q_2?

La loi de Coulomb permet de calculer la force $\vec{F}_1$subie par la charge q lorsqu'elle est uniquement en présence de q_1. On peut de la même manière calculer $\vec{F}_2$, la force subie par q lorsque seule q2 est en présence de la charge q.

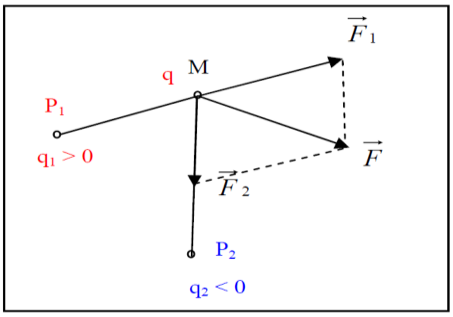


Figure I.7

L'expérience montre que la force$\vec{F}$subit par q lorsqu'elle est en présence des deux charges q1 et q2 est la somme vectorielle des forces $\vec{F}_1$et $\vec{F}_2$.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{kq_1q}{\left\|\overrightarrow{p_1M}\right\|^2}\overrightarrow{u_1} + \frac{kq_2q}{\left\|\overrightarrow{p_2M}\right\|^2}\overrightarrow{u_2}$$

En général si en disposant de n charges ponctuelle q, q_1, q_2,…,q_n, la force électrostatique appliquée sur q par les autres charges est donné par :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + .. + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_iq}{\left\|\overrightarrow{p_iM}\right\|^2}\overrightarrow{u_i}$$

I.2 Le champ électrostatique

Définition

La notion de champ est très utilisée en physique, par exemple, un champ électrostatique, un champ gravitationnel, un champ de température, un champ de vitesses dans un fluide...

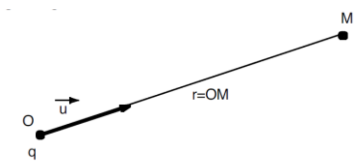
Donc, on peut définir un champ comme étant est un ensemble de grandeurs mathématiques définies et existant en tout de l'espace. Ces grandeurs peuvent être, des scalaires on parle alors d'un champ scalaire, par exemple la température dans l'atmosphère, qui varie en fonction de la position géographique (x, y, z), T(x, y, z). Des vecteurs, on parle alors d'un champ vectoriel, par exemple la vitesse du vent en fonction de la position géographique (x, y, z): $\vec{v}(x,y,z) = v_x(x,y,z)\vec{\imath} + v_y(x,y,z)\vec{\jmath} + v_z(x,y,z)\vec{k}$

Ou d'autres grandeurs qu'on appelle des tenseurs...

I.2.1- Champ créé par une seule charge

Soit une charge q_1 située en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge q_2 située en un point M. L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb:

$\vec{F}_{1/2} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$



On peut exprimer cette force on fonction d'une nouvelle grandeur vectoriel appelée le champ électrique.

$$\vec{F}_{1/2} = q_2\vec{E}$$

où

$$\vec{E}(M) = k\frac{q_1}{r^2}\vec{u}$$

Définition : *Une particule de charge q située en O crée en tout point M de l'espace distinct de O un champ vectoriel appelé le champ électrique avec lequel elle interagie avec les charges qui sont dans son approximée. Son expression est donne par :*

$$\vec{E} = k\frac{q_1}{r^2}\vec{u}$$

avec r, la distance entre la charge et le point M de l'espace et $\vec{u}$ le vecteur unitaire orienté de O vers le point M.

. Unité en SI: V/m. Dimension : M.L.I $^{-1}$ .T $^{-3}$

Remarque

- La charge q est appelée source du champ électrostatique.
- Le champ électrostatique est non défini au point où se trouve la charge source (charge q) Le vecteur du champ électrostatique s'éloigne des sources de charges positives (même sens que $\vec{u}$ sur le schéma) et se dirige vers les sources de charges négatives (sens opposé à $\vec{u}$)

La force d'interaction exercée par q_A sur q_B s'écrit aussi $\vec{F}_{A/B} = q_B \vec{E}_A(B)$, avec $\vec{E}_A(B)$ le champ électrique créé par q_A au point B

I.2.2- Champ créé par un ensemble de charges

Le champ existant en M dû à une distribution de charges q_i situées aux points Pi est simplement la somme des champs créés par chaque charge qi au point M.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) + \cdots + \vec{E}_n(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Le champ $\vec{E}(M)$ présente deux caractéristiques :

➢La première réside dans le fait que $\vec{E}(M)$ est de la **forme** $f(r)\overrightarrow{ur}$, propriété que nous exploiterons dans le calcul de la circulation de $\vec{E}$et qui conduira à la définition du potentiel électrostatique.

➢La deuxième caractéristique est la **forme de f(r)**, en $\frac{1}{r^2}$, propriété que nous exploiterons d ans le calcul du flux de $\vec{E}$et qui conduira au théorème de Gauss.

Exemple

On considère deux charges ponctuelles identiques (q > 0) distantes de 2a et placées dans le vide en deux points A(0, a, 0) et B(0, -a, 0) de l'axe *Oy*.

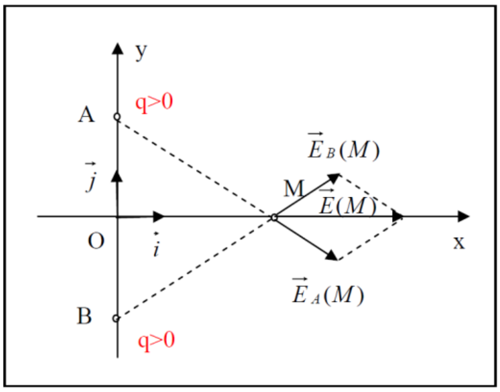
1) Calculer le champ électrostatique *E*(*M*) crée par ces deux charges en un point M de la médiatrice de AB. On note O le milieu de AB et on pose : $\overrightarrow{OM}$=x $\vec{\imath}$.

2) Que devient l'expression de *E*(*M*) lorsqu'on remplace la charge q en A par –q.

Solution:

1) $\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{BM}}{\|\overrightarrow{BM}\|}$$



Or, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = -a\vec{j} + x\vec{i}$

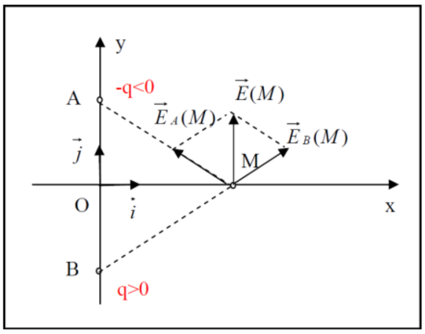
et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = a\vec{j} + x\vec{i}$

Donc,

$\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| = (a^2 + x^2)^{1/2}$

Et donc,

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\vec{i}$$



2) On remplace la charge q en A par (-q) :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{BM}}{\|\overrightarrow{BM}\|^3}$$

Et donc,

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}(-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\vec{j}$$

I.2.3 Champ créé par une distribution continue de charges

Dans le cas où la distribution de charges est continue, volumique, surfacique ou linéique, le champ électrostatique créé par cette distribution en un point M de l'espace s'écrit :

(a) ***Cas de distribution linéique***

Si la charge est concentrée sur un système filiforme, on définit une densité linéique de charges λ(P), à partir de la charge *dq* portée par un élément dl du fil, entourant le point P : $dq=\lambda dl$

Le champ électrostatique créé par une telle distribution est donc

$$\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \int k\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$$

(b) ***Cas de distribution surfacique***

Lorsque les charges sont réparties sur une couche d'épaisseur très faible par rapport aux dimensions de la couche, on définit une densité surfacique de charges σ(P) à partir de la charge dq portée par un élément dS de la surface de la couche, entourant le point P : $dq=\sigma dS$

Le champ électrostatique créé par une telle distribution est donc

$$\vec{E} = \iint k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \iint k\frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}$$

(c) ***Cas de distribution volumique***

Pour décrire une distribution volumique de charge, on définit la densité volumique de charges ρ(P) à partir de la charge dq contenue dans un élément de volume dv entourant le point P :

Le champ électrostatique créé par une telle distribution est donc

$$\vec{E} = \iiint_{volume} k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \iiint_{volume} k\frac{\rho dv}{r^2}\vec{u}$$

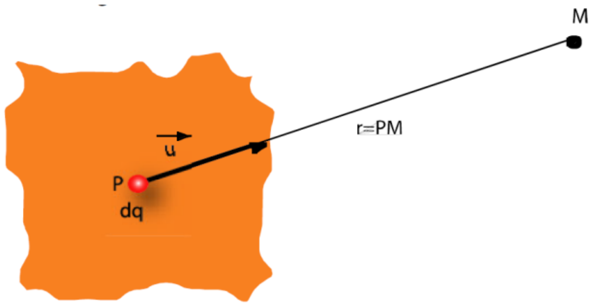


Figure I.8

I.2.4 Lignes de champ

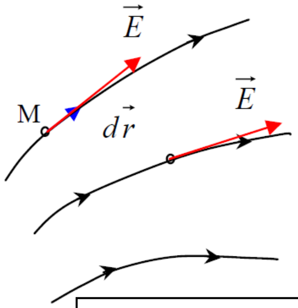


Figure I.9

Les lignes de champ sont les lignes tangentes au champ électrostatique en tout point et orientées par ce champ.

L'ensemble des lignes de champ définit une cartographie du champ.

La ligne de champ $\vec{E}$ peut être obtenue en n'import quel point M par la relation : $\overrightarrow{dr} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ Cette relation permet d'obtenir les équations des lignes

de champ. Dans le système de coordonnées **cartésiennes**, posons : $\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_x\vec{k}$et $\overrightarrow{dr} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Propriétés

– Deux lignes de champ ne se croisent jamais en un point M sauf si le champ $\vec{E}$ en nul en M ou il existe une charge en M (le $\vec{E}$ n'est pas défini en M).

– Une ligne de champ électrostatique n'est pas fermée. Elle part à l'infini ou part d'une charge q et se termine sur une charge de signe opposé.

1.2.5 Tube de champ

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée (ou contour) C engendre une surface S appelée tube de champ.

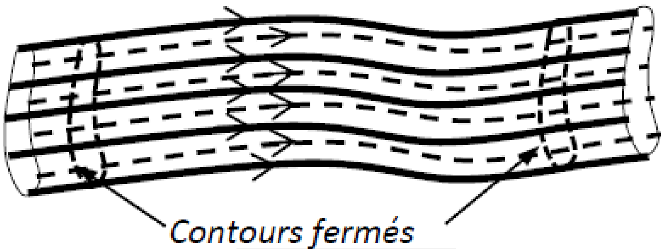


Figure I.10

Exemple 1

Lignes de champs cas d'une seule charge q (positive et négative)

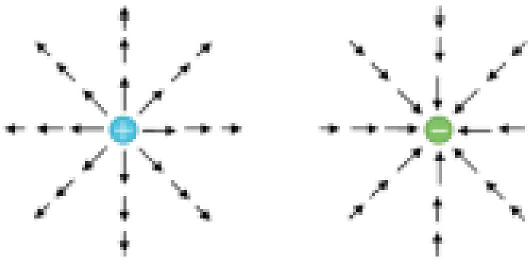


Figure I.11

Lignes de champs cas de deux charges de signe opposées

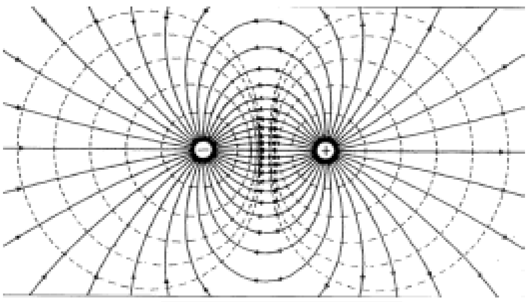


Figure I.12

Exemple 2

Trouver les lignes de champ électrostatique crée par une charge ponctuelle positive q placée à l'origine (O).

Solution

Suite à la répartition radiale des lignes du champ présenté sur la figure (I-11), la distribution du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle positive à une symétrie sphérique. Il est donc plus convenable de choisir le système de coordonnées sphérique.

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta\ d\varphi\vec{e}_\varphi$$

Le champ électrique $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\vec{e}_r$

$$\vec{E} \wedge d\vec{l} = \frac{kq}{r^2}rd\theta\vec{e}_\varphi - \frac{kq}{r^2}rsin\theta\ d\varphi\vec{e}_\theta = \vec{0}$$

Alors ; $\frac{kq}{r^2}rd\theta = 0 \Rightarrow d\theta = 0d\varphi\theta = cst\ ;\frac{kq}{r^2}rsin\theta\ d\varphi = 0\ \Rightarrow d\varphi \Rightarrow \varphi = cst$

Les lignes sont des droites qui forment un faisceau de sommet (lignes radiales).

I.2.6 Propriétés de symétrie du champ électrostatique

a. Principe de Curie

Enoncé: « Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. »

Application en électrostatique: les éléments de symétrie des distributions de charges (les causes) se retrouvent dans le champ électrostatique créé (les effets).

b. Plan de symétrie et plan d'antisymétrie

b.1. Plan de symétrie

(π) est un plan de symétrie pour les charges si la distribution de charges D peut être décomposée en éléments K et K' deux à deux symétriques tels que q = q'.

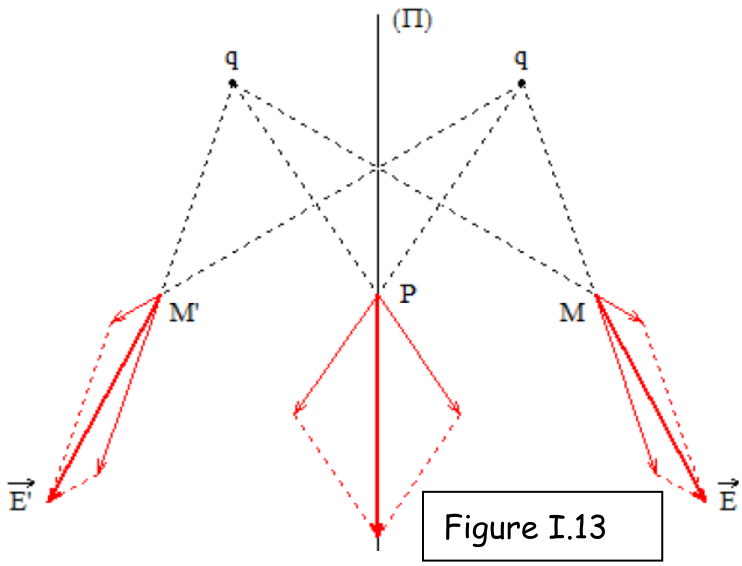


Figure I.13

On dira d'une distribution de charge qu'elle possède un plan de symétrie (π) si la distribution de charges est symétrique par rapport au plan Π, Ceci implique que q= q' avec p' le point symétrique de p. Le champ électrique créé par ces deux distributions de charges au point M est au son symétrique M' possède les mêmes propriétés de symétrie par rapport à π . Si le point appartient au plan de symétrie (le point p sur le schéma) le champ électrique sera porté par le plan

b.2 Plan antisymétrie

Une distribution de charge possède un plan de symétrie impaire Π', si pour deux points symétriques par rapport à Π', on a q=-q'. Le champ électrique créé par cette distribution de charge au point M et son symétrique M' sont aussi antisymétrique.

Si le point M appartient au plan d'antisymétrie Π' (le point p sur le schéma) le champ électrique est perpendiculaire au plan est orienté dans la direction de la charge négative.

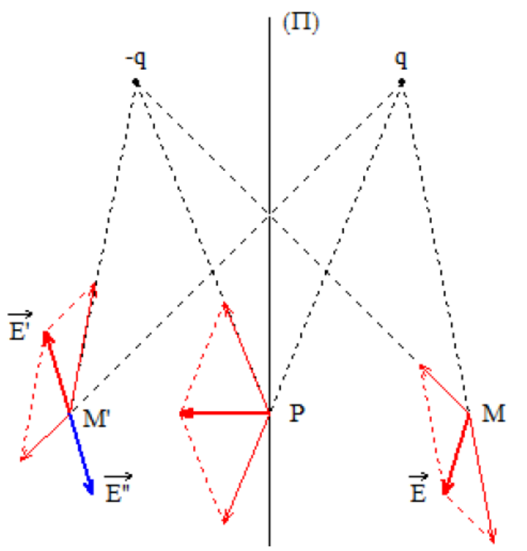


Figure I.14

b.3 Invariance de la symétrie par translation

Si une distribution de charge reste inchangée (invariante) par translation entre 2 points M et M' suivant un axe, ox par exemple, alors le champ électrostatique en M' et en M est identique, c-à-dire $\vec{E}$ est indépendant de la variable x

b.4 Invariance de la symétrie par rotation

Une distribution est invariante par rotation si elle reste inchangée par rotation autour d'un axe Δ: le champ ne dépend pas de l'angle. Si la rotation ce fait par rapport à un point, par exemple O, le champ électrique en un point M dépend uniquement de la distance, r, entre le point O et M.

- **Cas de symétrie cylindrique**

Si une distribution de charges est invariante par translation le long de l'axe Oz et par rotation autour de l'axe Oz, alors le champ produit par cette distribution ne dépend que de r (en coordonnées cylindriques (r,θ,z)), $\vec{E}(r,\theta,z)=\vec{E}(r)$

- **Cas de symétrie sphérique**

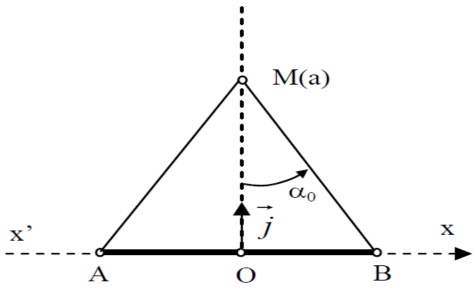
Si une distribution de charges est invariante dans toute rotation autour d'un point O, alors le champ produit par cette distribution ne dépend que de la distance r au centre de la sphère (en coordonnées sphériques (r,θ,φ), $\vec{E}(r,\theta,\varphi)=\vec{E}(r)$.

II.3 Applications

(a) Cas de fil:

Soit un segment AB uniformément chargé avec une densité linéique λ>0.

On désigne par O le milieu du segment AB. Calculer le champ E crée par cette distribution en tout point M sur une distance a de la médiatrice de AB et en un point M appartenant au segment AB.

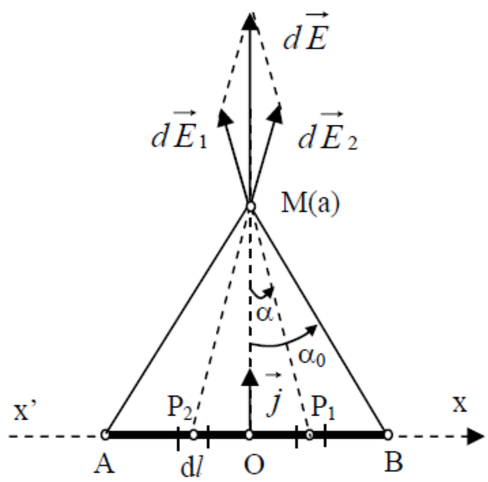


Solution

1) Le point M est sur la médiatrice de AB

Considérons les points A et B sur l'axe x'x tel que l'origine O soit le milieu de AB.

Deux éléments de charges dq_1 et dq_2, centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice



(OM), par exemple l'axe y'y de vecteur $\vec{j}$.

L'axe médiateur du segment AB est un axe de symétrie pour la distribution de charge. Le point M appartient à cet axe, donc le champ électrostatique en ce point sera porté sur cet axe. Donc la résultante du champ $\vec{E}$ est portée sur l'axe y'y.

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\alpha\,\vec{j}$$

Si on choisit α comme variable d'intégration, on aura :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\frac{\cos\alpha}{a}d\alpha\,\vec{j}$$

avec, $tg\alpha = \dfrac{x}{a}$

$$dx = a(1+tg^2\alpha)d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2}$$

Pour x = - L, $\alpha = -\alpha_0$ et pour x = + L, $\alpha = \alpha_0$

Soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_0\,\vec{j} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\vec{j}$$

1-3 Cas limite

- Si le point M est très éloigné de l'origine O (a >> L), on a :

$$\sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \cong \alpha_0 \cong \frac{L}{a}$$

et donc,

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{2\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge $Q = 2\lambda L$ concentrée en O.

- Si le point M est très proche du segment (L >> a), on a :

$$\alpha_0 \to \frac{\Pi}{2}$$

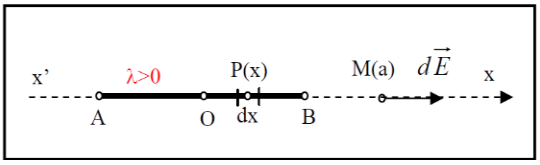
et

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par un fil de longueur infinie uniformément chargé.

2) <u>Le point M appartient à (AB)</u>

Un élément de charge $dq = \lambda dx$ centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par $\vec{i}$ (figure 3) :



$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{i}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{-d(a-x)}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

1-4 Cas limite

* Si le point M est très éloigné du segment [AB] (a >> L), on a :

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{4\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$$

C'est équivalent du champ créé en M par une charge $Q = \lambda 2L$ concentrée en O.

I.3- Potentiel électrostatique

I.3.1Circulation du champ électrique $\vec{E}$

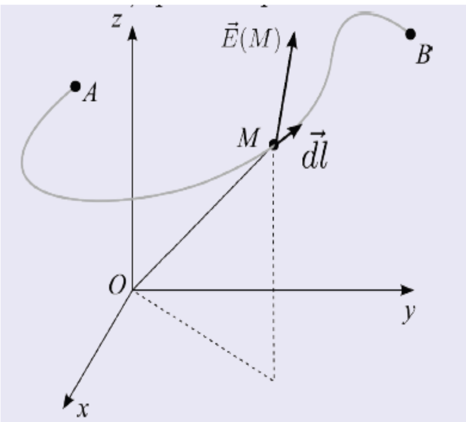


Figure I.15

On défini la circulation élémentaire du champ électrique $\vec{E}$ (M) sur une courbe quelconque (AB) par la quantité scalaire notée $\vec{E}.\vec{dl}$, donnée par la relation $dC = \vec{E}.\vec{dl}$ avec $\vec{dl}$ élément de déplacement élémentaire. On peut donc considérer la circulation de $\vec{E}$ le long de la courbe (AB) comme :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

I.3.2 Circulation du champ électrostatique d'une charge ponctuelle

Le champ électrostatique crée par une charge ponctuelle q placée en O par exemple en un point M de l'espace est donné par :

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\vec{u_r}$$

$\vec{u_r}$ le vecteur unitaire le long de $\overrightarrow{OM}$ et r =la distance OM= $\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

La circulation élémentaire de $\vec{E}$:

$$dC = \vec{E}.\vec{dl}$$

En coordonné sphérique $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + rsin\theta\, d\varphi\vec{u}_\varphi$

$$\boldsymbol{dC} = \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \frac{kq}{r^2}dr$$

Puisque$\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{1}{r}\right)$, on peut écrire :

$$\boldsymbol{dC} = -d\left(\frac{kq}{r}\right)$$

la circulation du champ électrostatique entre A et B sur la courbe donne :

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = -\int_A^B d\left(\frac{kq}{r}\right) = \frac{kq}{r_A} - \frac{kq}{r_B}$$

La circulation du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle ne dépend que des points initial et final (A et B) et pas de la courbe entre ces deux points. <u>Un champ vérifiant cette propriété est appelé champ conservatif.</u>

I.3.3 Définition du potentiel

Comme la circulation du champ est indépendante du chemin suivi, on peut définir une grandeur scalaire appelée potentiel électrostatique, noté V par la relation :

$$\boldsymbol{dC} = -dV$$

Pour le cas d'une charge ponctuelle :

$$\boldsymbol{dV} = -\frac{kq}{r^2}dr = d\left(\frac{kq}{r}\right) \rightarrow \int \boldsymbol{dV} = \int d\left(\frac{kq}{r}\right) \rightarrow V = \frac{kq}{r} + Cst$$

On **choisit** en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point M est infiniment éloigné de la charge $V(r \rightarrow \infty) = 0$,

$$V = \frac{kq}{r}$$

Son unité en SI est le Volt, sa dimension est $M.L^2.T^{-3}.I^{-3}$.

a. Potentiel électrostatique crée par une distribution discrète de charges

Le potentiel électrostatique est une grandeur scalaire additive, c'est-à-dire que le potentiel créé par la réunion de N systèmes de charges est la somme des potentiels électrostatiques.
Soient N charges ponctuelles q_1, q_2,..., q_N, placées aux points $P1$, $P2$,..., PN. Le potentiel électrostatique créé en un point M quelconque est :

$V = \sum_{i=1}^{N} \frac{kq_i}{r_i}$ avec $r_i = P_i M$, la distance entre le point P_i est le point M.

b. Potentiel électrostatique crée par une distribution continue de charges

- Distribution linéique de charges: $V = \int_l \; k\frac{\lambda}{r} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \; \frac{\lambda}{r} dl$
- Distribution surfacique de charges $V = \iint_s \; k\frac{\sigma}{r} ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_s \; \frac{\sigma}{r} ds$
- Distribution volumique de charges $V = \iiint_v \; k\frac{\rho}{r} dv = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_v \; \frac{\rho}{r} dv$

I.3.4 Relation entre le champ et le potentiel

a. Relation différentielle : Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ

$$dV = -\vec{E} d\vec{l}$$

Cette relation permit le calcul du potentiel électrostatique dans une région d'espace si l'expression du champ électrique est connue dans cette région.

b. Relation locale : Le potentiel électrostatique peut être vu comme une fonction des coordonnées de l'espace. En coordonnées cartésiennes V = V (x, y, z). On peut alors écrire sa différentielle totale:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz$$

Le champ électrique et le déplacement élémentaire son données par:

$$d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\vec{E} = E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}$$

alors ;

$$-dV = \vec{E} d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Calculons à présent le produit scalaire suivant :

$$\overrightarrow{grad}V . d\vec{l} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) . \left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{grad}V . d\vec{l} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV$$

Par identification ; $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ On dit alors que le champ électrostatique $\vec{E}$ dérive d'un potentiel scalaire V.

Remarque : *Le champ électrostatique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.*

En général, la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe allant de A vers B est obtenue par l'intégration, entre ces deux points, du champ électrique. Elle est égale à la variation du potentiel électrique entre les positions A et B et ne dépend pas du chemin suivi.

Le champ électrostatique $\vec{E}$dérive du potentiel scalaire V. Par l'intermédiaire de cette relation locale, qui lie le champ électrostatique$\vec{E}$et le potentiel électrostatique V, la connaissance de V en un point de l'espace suffit pour la détermination de $E(M)$. Cette relation implique des conditions de continuité et de dérivabilité sur la fonction V(M).

I.3.5 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel : V (M) = cte.

Propriétés :

- ✓ **La circulation du champ électrique est nulle sur une surface équipotentielle (S).**

La circulation du champ électrostatique le long d'une courbe entre deux points A et B appartenant à une surface équipotentielle (S), s'écrit :

$C_{AB} = \int_A^B \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = -\int_A^B \boldsymbol{dV} = \boldsymbol{V(A)} - \boldsymbol{V(B)} = \boldsymbol{0}$ car A et B appartenant à une surface équipotentielle (S), V(A) = V(B).

- ✓ Les lignes de champ et les équipotentielles sont orthogonales. $\boldsymbol{dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \overrightarrow{dl}}$

Le champ électrostatique est tangent aux lignes de champ aux points de contact avec la surface, on conclut que ces lignes traversent perpendiculairement la surface équipotentielle.

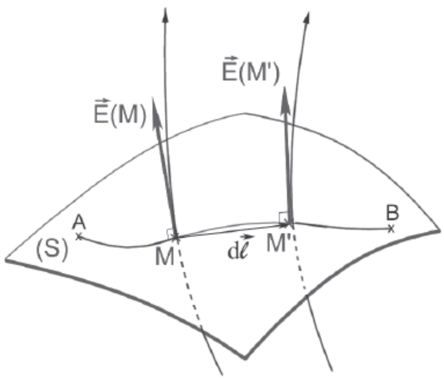


Figure I.16

- ✓ Le potentiel décroit le long d'une ligne de champ.

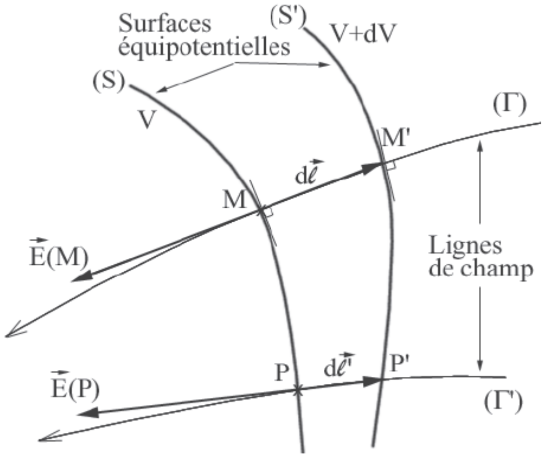
En effet, un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{\boldsymbol{dl}}$ dans le sens de sur la ligne de champ. La variation du potentiel électrostatique est donnée par :

$\boldsymbol{dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -|\vec{E}|.|\overrightarrow{dl}|}$**, puisque sur la ligne de champ on a** $\boldsymbol{\vec{E} // \overrightarrow{dl}}$**,**

Donc, $\boldsymbol{dV} < 0 \rightarrow V(M') < V(M)$→**Le champ électrostatique est orienté vers les potentiels décroissants.**

- ✓ Le champ électrique est plus intense là où les équipotentielles sont les plus resserrées.

En effet, si l'on considère deux très petits déplacements $\overrightarrow{dl}$ **et** $\overrightarrow{dl'}$



$$dV = -\vec{E}(M).\overrightarrow{dl} = -|\vec{E}(M)|.|\overrightarrow{dl}|$$

et

$$dV = -\vec{E}(p).\overrightarrow{dl'} = -|\vec{E}(p)|.|\overrightarrow{dl'}|$$

Figure I.17

Et comme $|\overrightarrow{dl'}| < |\overrightarrow{dl}| \rightarrow |\vec{E}(p)| > |\vec{E}(M)|$

- ✓ Dans le cas d'un champ uniforme les lignes de champ sont des droites parallèles et les surfaces équipotentielles sont des plans perpendiculaires à ces droites.

I.3.6 Énergie potentielle électrostatique

a. Charges discrètes

Par définition, une surface fermée défini clairement un volume intérieur et un volume extérieur.

- **Cas d'une charge placée dans un champ extérieur**

L'´energie potentielle électrostatique d'une charge q située en un point M soumis au potentiel VM, s'exprime par:

$$E_P(M) = qV(M)$$

- **Cas d'une distribution discrète de n charges ponctuelles**

$$E\text{p} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} K\frac{q_1 q_2}{r_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} K\frac{q_1 q_2}{r_{ij}}$$

b. Charges continues

On peut étendre la sommation discontinue précédente à une sommation intégrale.
En désignant par dq la charge élémentaire et par $V(M)$ le potentiel auquel est soumis cette charge, on obtient

$$E_P = \frac{1}{2}\int_{espace\ charge} V(M)dq$$

Selon que l'on considère une distribution de charges de densité volumique (ρ), surfacique (σ) ou linéique (λ), les énergies potentielles du corps chargé sont respectivement:

Distribution linéique : $dq = \lambda dl$ $E_P = \frac{1}{2}\int_l \lambda V(M)dl$

Distribution surfacique : $dq = \sigma ds$ $E_P = \frac{1}{2}\iint_s \sigma V(M)ds$

Distribution volumique : $dq = \rho dv$ $E_P = \frac{1}{2}\iiint_v \rho V(M)dv$

I.4-Théorème de Gauss

I.4.1 Vecteur élément de surface

a- pour une surface ouverte

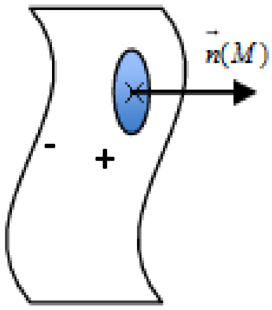


Figure I.18

On considère une surface S ouverte. En un point M de cette surface, on note dS un petit élément de surface assimilable à une partie de plan tangent en M à S. Sur cette portion de surface, on peut distinguer arbitrairement deux faces : signes + et –. On définit au point M le vecteur unitaire normal dirigé de la face – vers la face +, noté $\vec{n}$. On définit alors le vecteur élément de surface: $d\vec{S} = dS\vec{n}$, *l'orientation de* $\vec{n}$ *dans ce cas est arbitraire*.

b- pour une surface orientée par un contour

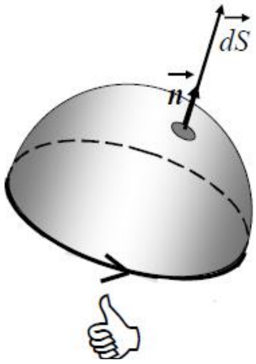


Figure I.19

Dans le cas d'une surface *S* qui s'appuie une un contour orienté, il faut utiliser **la règle de la main droite ou règle de Stokes** : si l'on place la main droite de telle manière que le sens positif va vers le bout des doigts, le pouce droit pointe dans le sens positif pour *S*.

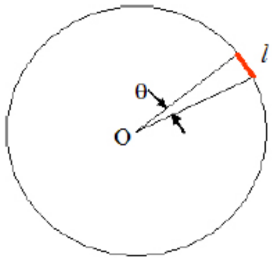
c- Pour une surface fermée

Par définition, une surface fermée défini clairement un volume intérieur et un volume extérieur. Par exemple une sphère.

Dans ce cas, par convention, la face – est toujours la face intérieure et la face + est toujours la face extérieure. Le vecteur normal en un point *M* est donc toujours orienté **vers l'extérieur**.

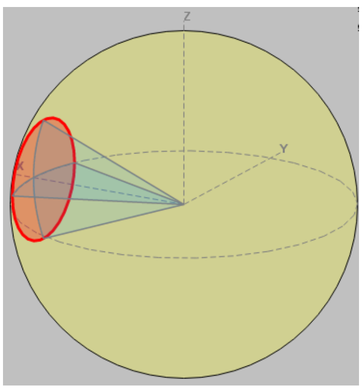
I.4.2 Angle solide

a- L'angle plan



Mesure d'un angle θ: soit un cercle de rayon R, la valeur de l'angle est le rapport entre la longueur l de l'arc de cercle intercepté par deux rayons séparés de cet angle et le rayon R : $\theta = l/R$. Il est mesuré en radians (sans dimension).

b- Angle solide



La notion d'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan.

Soit une sphère de rayon R, la valeur de l'angle solide Ω est le rapport entre la surface S de la sphère interceptée par le cône de sommet O

Figure I.20

(centre de la sphère) et le rayon R au carré : $\Omega = S/R^2$. Son unité en SI s'exprime en stéradian (sr).

D'une manière générale on peut définir l'angle solide:

L'angle solide élémentaire dΩ, délimité par un cône de demi-angle α coupant un élément de surface élémentaire dS située sur une sphère de rayon r centrée sur le sommet en O du cône vaut:

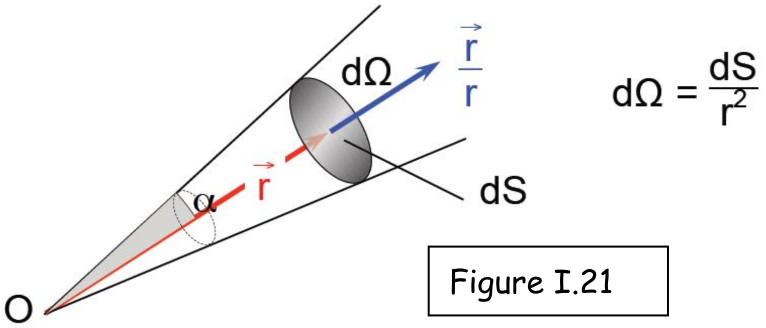


Figure I.21

En coordonnée sphérique par exemple, l'élément de surface ds est exprimé par $ds = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$, alors, l'angle solide élémentaire est: $d\Omega = \frac{ds}{r^2} = \sin\theta \, d\theta d\varphi$.

c- Calcul d'un angle solide Ω d'ouverture α□

En coordonnées sphériques, l'élément de surface perpendiculaire à $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, son expression donné par:

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2} = \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

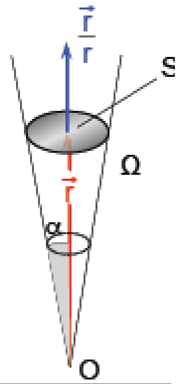


Figure I.22

L'angle solide d'ouverture Ω est défini par :

$\varphi: 0 \to 2\pi$ et $\theta: 0 \to \alpha \quad \Omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1 - \sin\alpha) \; sd$

- ✓ Pour voire la moitie de l'espace $\varphi: 0 \to 2\pi$ et $\theta: 0 \to \pi/2 \quad \Omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = 2\pi sd$
- ✓ Pour voire tout l'espace $\varphi: 0 \to 2\pi$ et $\theta: 0 \to \pi \quad \Omega = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 4\pi sd$

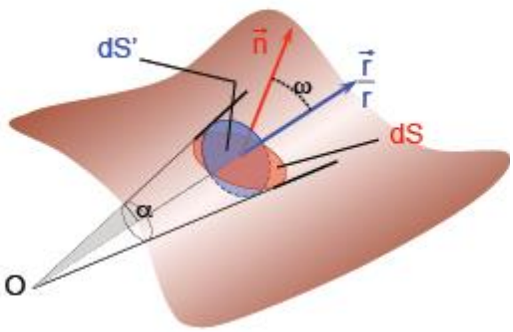


Figure I.23

d- Surface interceptée par un angle solide

On considère une surface quelconque S et un angle solide interceptant cette surface :

La surface interceptée correspond à l'élément de surface dS. Cette surface élémentaire a pour normale $\vec{n}$ incliné avec un angle ω par rapport à la perpendiculaire à la ligne de visée $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

D'abord, On construit dS', élément de surface perpendiculaire à $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, ensuite, on définie notre angle solide par :

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{ds}\vec{e}_r}{r^2} = \frac{ds}{r^2}\cos\omega = \frac{ds'}{r^2}$$

I.4.3 Flux d'un champ

La notion de flux est toujours associée avec une surface S (de façon explicite ou implicite). Le flux,ϕ, d'un champ vectoriel, $\vec{A}$, à travers une surface orientée, $\vec{S}$, est par définition:

$\phi = \iint_s \ \vec{A}\, d\vec{S}$. C'est-à-dire, le flux d'un champ vectoriel à travers une surface est la mesure du nombre de lignes du dit champ traversant cette surface.

1.4.4 Flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle

a- Flux élémentaire à travers une surface

Soit une charge ponctuelle q>0 placée en O et M un point de l'espace

Le flux élémentaire $\boldsymbol{d\phi}$ de $\vec{E}$ à travers l'élément de surface dS est défini par la relation : $\boldsymbol{d\phi = \vec{E}\, d\vec{S}}$

Le champ électrique au point M : $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\vec{e}_r$ avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$

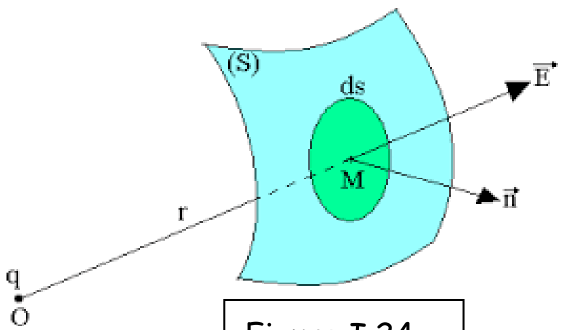


Figure I.24

$$d\phi = \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{kq}{r^2}\vec{e}_r d\vec{S} = kq\frac{\vec{e}_r d\vec{S}}{r^2} = kq\, d\Omega$$

Conséquences

- Le flux de champ électrostatique$\vec{E}$Ene dépend que de l'angle solide sous lequel est vue la surface.
- Le flux de $\vec{E}$ est indépendant de la distance r entre la charge et la surface s.

Flux total du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque fermée

b- Flux à travers une surface fermée

On se propose de calculer le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle supposée positive à travers la surface fermée Σ. On s'intéresse au **flux sortant**, donc on a choisi d'orienter le vecteur n dans **le sens de la normale sortante** à Σ. On distingue deux cas :

- La charge q se situe à l'extérieure de la surface Σ.

- La charge q se situe à l'intérieur de la surface Σ.

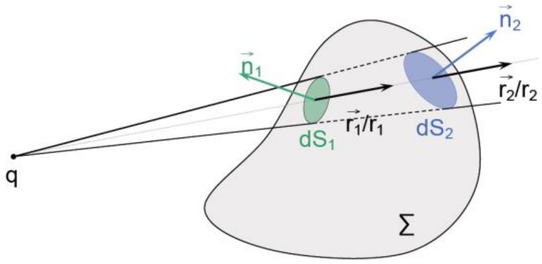


Figure I.25

1èr Cas : La charge est située à l'extérieur de Σ

On considère une charge ponctuelle q à l'extérieur d'une surface fermée Σ.

Le flux de $\vec{E}(r)$ généré par la charge q à travers la surface Σ est défini par l'angle solide dΩ qui intercepte la surface fermée Σ dans deux différentes régions en définissant ainsi 2 surfaces élémentaires dS$_1$et dS$_2$ ayant pour normales respectives $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ (normales sortantes). Le flux élémentaire total est la somme des deux flux élémentaires:

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 = \vec{E}(\vec{r}_1)d\vec{S}_1 + \vec{E}(\vec{r}_2)d\vec{S}_2$$

$$d\phi = \frac{kq}{r_1^2}\vec{e}_r d\vec{S}_1 + \frac{kq}{r_2^2}\vec{e}_r d\vec{S}_2 = kq\left[\frac{S_1}{r_1^2}(\vec{e}_r.\vec{n}_1) + \frac{S_2}{r_2^2}(\vec{e}_r.\vec{n}_2)\right]$$

$$d\phi = kq[-d\Omega + d\Omega] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[-d\Omega + d\Omega] = 0$$

Pour obtenir le flux total de E sortant de la surface Σ, il faut intégrer le flux élémentaire sur toute la surface fermée donc, $\phi = \oiint_s \vec{E}d\vec{S}$

On peut balayer toute la surface Σ à l'aide de cônes élémentaires tels que celui de la figure ci-dessus. Chacun de ces cônes intercepte sur la surface Σ une paire de surfaces élémentaires dS$_1$ et dS$_2$ telles que leur contribution au flux total, $d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$.

Conclusion: *Le flux du champ électrostatique crée par une charge ponctuelle située à l'extérieur d'une surface fermée Σ, sortant de la surface Σ est nul.*

$$\phi = \oiint_s \vec{E}d\vec{S} = 0$$

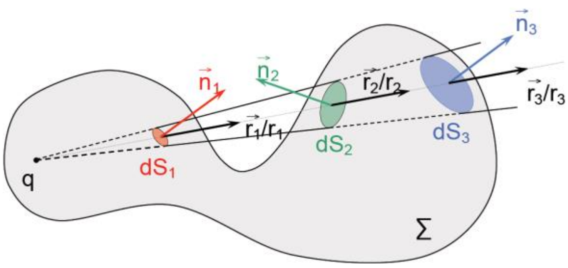


Figure I.26

2ème Cas : La charge est située à l'intérieur de Σ

On considère une charge ponctuelle q à l'intérieur d'une surface fermée Σ. On cherche à calculer le flux élémentaire de $\vec{E}$ à travers la surface Σ vue sous l'angle solide dΩ.

Soit un cône élémentaire s'appuyant sur un angle solide élémentaire dΩ, partant du point où se trouve la charge. Les surfaces élémentaires correspondant à l'intersection de ce cône avec la surface Σ sont dS$_1$, dS$_2$ et dS$_3$ ayant pour normales respectives $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$.

Dans ce cas, le flux de $\vec{E}$ est la somme d'un nombre impair (3) de flux élémentaires :

$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 + d\phi_3 = \vec{E}(\vec{r}_1)d\vec{S}_1 + \vec{E}(\vec{r}_2)d\vec{S}_2 + \vec{E}(\vec{r}_3)d\vec{S}_3$$

$$d\phi = \frac{kq}{r_1^2}\vec{e}_r d\vec{S}_1 + \frac{kq}{r_2^2}\vec{e}_r d\vec{S}_2 + \frac{kq}{r_3^2}\vec{e}_r d\vec{S}_3 = kq\left[\frac{S_1}{r_1^2}(\vec{e}_r.\vec{n}_1) + \frac{S_2}{r_2^2}(\vec{e}_r.\vec{n}_2) + \frac{S_3}{r_3^2}(\vec{e}_r.\vec{n}_3)\right]$$

$$d\phi = kq[d\Omega - d\Omega + d\Omega] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[d\Omega - d\Omega + d\Omega] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Le flux total de $\overrightarrow{E}$ à travers la surface Σ, est obtenu en intégrant l'expression du flux élémentaire $d\phi$ dans toutes les directions c-à-dire sur toute sur les 4π stéradian :

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}\, d\vec{S} = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Conclusion: *Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'intérieur d'une surface fermée Σ, sortant de la surface Σ est égal à:*

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}\, d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

I.4.5 Flux du champ ´électrostatique créé par un ensemble de charges

Soit une surface S fermée et un ensemble de charges, certaines à l'extérieur du volume délimité par la surface S (notées q_i^{ext}), d'autres à l'intérieur (notées q_j^{int}). Le champ électrostatique créé en un point M de la surface est la somme vectorielle de tous les champs créés par toutes les charges:

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i^{ext} + \sum_j \vec{E}_j^{int}$$

Avec $\vec{E}_i^{ext}$ le champ électrique créé par la charge q_i que se trouve à l'extérieur de S et $\vec{E}_j^{int}$ le champ électrique créé par la charge q_j que se trouve à l'intérieur de S.

Le flux total de $\overrightarrow{E}$ à travers S s'écrit:

$$\phi = \oiint_{S} \overrightarrow{E}(M) d\vec{S} = \oiint_{S} \left(\sum_i \vec{E}_i^{ext} + \sum_j \vec{E}_j^{int}\right) d\vec{S}$$

$$= \oiint_{S} \sum_i \vec{E}_i^{ext}\, d\vec{S} + \oiint_{S} \sum_j \vec{E}_j^{int}\, d\vec{S}$$

$$\sum_i \oiint_{S} \vec{E}_i^{ext}\, d\vec{S} + \sum_j \oiint_{S} \vec{E}_j^{int}\, d\vec{S}$$

Le flux total est donc la somme des flux totaux individuels dus à chaque charge. Les charges à l'extérieur donnant un flux nul et celles à l'intérieur un flux $\frac{q_j}{\varepsilon_0}$, on a :

$$\phi = 0 + \sum_j \frac{q_j}{\varepsilon_0}$$

Conclusion: *Le flux sortant de la surface* ***fermée*** *Σ est égal à la somme, divisée par ε0, des charges intérieures à la surface Σ :*

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M)d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Qint : charge totale intérieure à Σ.

I.4.6 Théorème de Gauss

***<u>Enoncé</u>*:** Le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface S quelconque dans le vide est égal à la somme des charges intérieures au volume délimité par S divisé par la permittivité ε_0.

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M)d\vec{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec Q_{int}la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface

$Q_{int} = \sum_i q_i$ cas de distribution discontinue de charge.

$Q_{int} = \int_l \, dq = \int_l \, \lambda dl$ cas de distribution (continue) linéique de charge.

$Q_{int} = \iint_s \, dq = \iint_s \, \sigma ds$ cas de distribution (continue) surfacique de charge.

$Q_{int} = \iiint_v \, dq = \iiint_v \, \varrho dv$ cas de distribution (continue) volumique de charge.

I.4.7 Application: Calcul de champ électrostatique

a. Méthode

Le théorème de Gauss est un outil très puissant pour déterminer le champ électrostatique surtout pour des distributions de charges possédant des symétries, sphérique, cylindrique, ou plane. Les calculs de champs électrostatiques avec des distributions de charges complexes font appel aux méthodes numériques et des programmes informatiques.

Pour déterminer $\vec{E}$ à partir du théorème de Gauss, il faudra suivre la démarche suivante:

- Déterminer **la direction** du champ $\vec{E}$ à partir des considérations de **symétries** (radiale pour des géométries cylindriques et sphériques, normale pour des géométries planes). Les symétries permettent aussi de réduire le nombre de variables d'espace dont dépend la norme de $\vec{E}$
- Choisir **une surface de Gauss imaginaire** dans la région où l'on souhaite déterminer $\vec{E}$. **Il faudra que la surface de Gauss possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges et donc que du champ électrostatique**.
- Calculer le **flux du champ électrostatique** à travers la surface de Gauss choisie $\oiint_{\Sigma} \vec{E}\,d\vec{S}$. Le calcul de l'intégrale de surface sera très simple si l'on choisie une surface de Gauss ayant les mêmes symétries que $\vec{E}$, dans ce cas $\vec{E}$ soit il est perpendiculaire sur cette surface, donc, $\vec{E}//d\vec{S}$ partout sur la surface de gauss. Le flux élémentaire sera simplement $\vec{E}\,d\vec{S} = EdS$ et si E est constant partout sur la surface de gauss nous allons rencontrer les cas suivants :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\,d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi r^2 E (\text{flux à travers une sphere de rayon r}). \text{Surface de Gauss une sphère} \\ 4\pi r L (\text{flux latéral sur un cylindre de rayon r et longueurL}). \text{Surface de Gauss un cylindre} \\ \pi r^2 E\ (\text{flux sur la base sur un cylindre de rayon r et longueurL}). \text{Surface de Gauss un cylindre} \end{cases}$$

- Calculer la **charge intérieure** à la surface de Gauss Qint . Il faudra calculer Qint avec la densité de charge appropriée

$$Q_{int} = \begin{cases} cas\ liénique = \int_l \lambda dl \\ cas\ surfacique = \iint_s \sigma ds \\ cas\ volumique = \iiint_v \varrho dv \end{cases}$$

- Appliquer le **théorème de Gauss** $\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ et en déduire E.

b. Charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle q située en un point O. Cherchons à calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette charge en un point P dans l'espace. Le problème a une symétrie sphérique; on sait par ailleurs que le champ $\vec{E}$ est radial : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

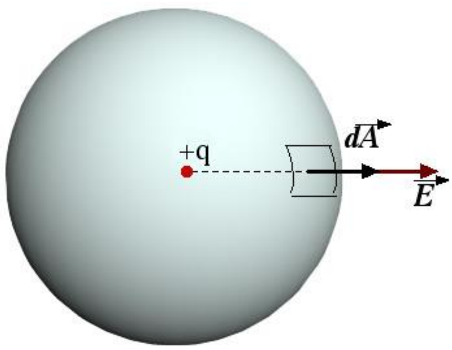


Figure I.27

On choisi la surface de Gauss une sphère de centre sur M et de rayon r=OP (le point P est un point de la surface de gauss).

En chaque point M de Σ :

- Le champ est perpendiculaire à Σ, alors $\overrightarrow{E}//d\vec{A}$. Puisque le champ le champ $\overrightarrow{E}$ est radial, donc, il a la même norme E(r) sur les points de surface de Gauss.

Le théorème de Gauss implique:

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec

$\phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}\, d\vec{A} = \oiint_{\Sigma} E.dA = E \oiint_{\Sigma} dA = EA = 4\pi r^2 E$ (A l'aire de la sphère de Gauss).

$$Q_{int} = q$$

D'où : $E = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

Sous forme vectoriel le champ électrostatique est donné : $\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{e}_r$

Le potentiel électrostatique: En utilisant la relation liant le potentiel au champ électrique

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} \implies V = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

En coordonnée sphérique $\overrightarrow{dl} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\vec{e}_\varphi$

$$\vec{E}.\overrightarrow{dl} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\vec{e}_r.\left(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\vec{e}_\varphi\right) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr$$

$$V = -\int \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r} + C$$

c. Plan infinie

On considère un plan infini chargé avec la densité surfacique σ > 0. En utilisant le théorème de Gauss, Trouver l'expression du champ électrostatique puis du potentiel en tout point de l'espace.

Pour utiliser Gauss, il nous faut d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ $\vec{E}$:

- ✓ La distribution de charge est invariante par translation de tout vecteur parallèle au plan (xoy), $\vec{E}$ est indépendant des variables x et y $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$.
- ✓ Tous les plans perpendiculaires au plan infini sont des plans de symétrie de celui-ci.
- ✓ Le plan z=0 lui-même est un plan de symétrie donc, le champ électrique est symétrique par

Pour ces raisons on choisi la surface fermé de Gauss soit un parallélépipède ou un cylindre perpendiculaire sur le plan (je vais choisir la surface cylindrique)..

D'après le théorème de Gauss : $\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$

La surface de Gauss est la surface du cylindre, formée de trois surfaces, deux surfaces de base et une surface latérale. Le flux total à travers cette surface fermée est la somme des flux à travers toutes les surfaces :

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_1 + \iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_2 + \iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_{latérale}$$

Comme le champ est perpendiculaire au plan infini, le flux à travers la surface latérale est nul $\iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_{latérale} = 0$.

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_1 + \iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_2 = 2\iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_1$$

Puisque les bases de cylindre sont identiques.

Comme le champ $\vec{E}$ est parallèle à $d\vec{S}_1$. Sa norme est constante su S_1 on trouve :

$\Phi(\vec{E}) = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 2\iint \vec{E}\,.\,d\vec{S}_1 = 2\iint E\,.\,dS_1 = 2E\iint dS_1 = 2\,E.S_1$

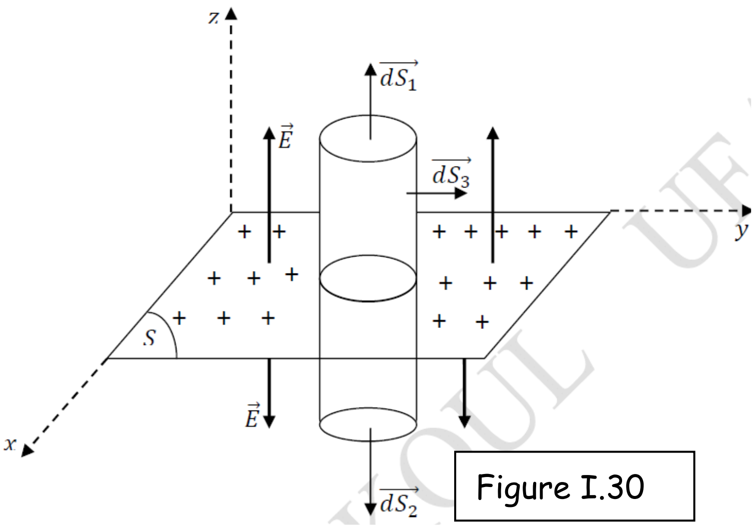


Figure I.30

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est la charge portée par le disque intersection du cylindre de Gauss avec le plan infini chargé .

$$Q_i = \sigma\,S_1$$

Au final, on trouve :

$$2\,E.S_1 = \frac{\sigma\,S_1}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

On écrit vectoriellement :

Au dessus du plan $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

Au dessous du plan $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

Le potentiel :

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} \implies V = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int E.dz = \int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} Z + C \; si \; z > 0$$

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} Z + C \; si \; z < 0$$

d. Sphère pleine

Une sphère de centre O et de rayon *r* uniformément chargée en volume avec une densité volumique de charge ρ > 0. En utilisant le théorème de Gauss, Trouver l'expression du champ électrostatique puis du potentiel en tout point de l'espace distingué les régions r<R et r>R.

La symétrie sphérique de la distribution nous suggère d'utiliser les coordonnées sphériques (*r*, θ, φ). La distribution de charge est invariante par rotation au tour du point O donc le champ $\overrightarrow{E}$ et le potentiel V ne dépend pas des angles, θ, φ**.** les plans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie donc $\overrightarrow{E}$ est radial. On prend la surface de Gauss Σ est une surface sphérique de centrée sur O et rayon r.

En chaque point de la surface Σ, le champ $\vec{E}(r)$ est perpendiculaire, donc $\vec{E}(r)//\overrightarrow{dS}$.

Le théorème de Gauss implique:

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}\, d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\phi = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{E}\, d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} E.dS = E \oiint_{\Sigma} dS = ES = 4\pi r^2 E.$

Donc, $4\pi r^2 E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

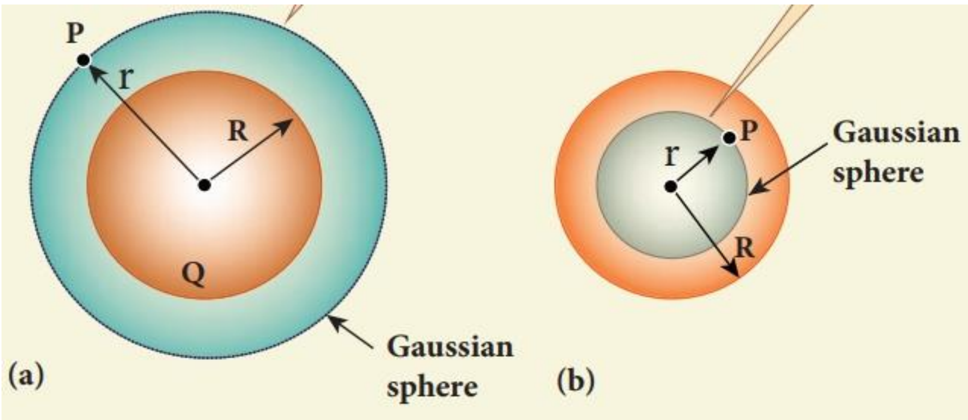


Figure I.31

En désigne par E_{int} le champ électrostatique à l'intérieur de la sphère et par E_{ext} le champ électrostatique à l'extérieur de la sphère.

Si le point P est à l'intérieur de la sphère $r < R$ (**figure a**)

Tout le volume de la sphère de Gauss Σ est rempli de charge

$Q_{int} = \rho V_G = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ ($V_G$le volume de la sphère de Gauss)

$$4\pi r^2 E_{int} = \frac{4\pi\rho r^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow E_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}_{int} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

Si le point P est à l'extérieur de la sphère $r > R$

$$Q_{int} = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

$$4\pi r^2 E_{ext} = \frac{4\pi\rho R^3}{3\varepsilon_0} \rightarrow E_{ext} = \frac{\rho R^3}{\varepsilon_0 r^2}$$

En forme vectoriel $\vec{E}_{ext} = \frac{\rho R^3}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Le potentiel

Depuis la relation locale $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$

Si r > R

$$V_{ext}(r) = -\int \vec{E}_{ext}\,\vec{dl} = -\int E_{ext}dr = -\frac{\rho R^3}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} + C_1$$

$V_{ext} = 0$ $quand\ r \rightarrow \infty$ donc $V_{ext} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}$

Si r < R,

$$V_{int}(r) = -\int \vec{E}_{int}\,\vec{dl} = -\int E_{int}dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + C_2$$

La condition de continuité du potentiel impose:

$$V_{ext}(r = R) = V_{int}(r = R) \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

I.4.8 Relations locales:

Dans le cas ou la distribution des charges est volumique on peut écrire $Q_{int} = \iiint \rho dv$, alors le théorème de gauss s'écrira sous la forme :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dv$$

Cette formulation peut être réécrite sous une forme locale grâce au théorème de Green-Ostrogradski (théorème de flux divergence) qui stipule que :

Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume (v) défini par la surface.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\, d\vec{S} = \iiint_{v} div(\vec{E}) dv$$

Le théorème de Gauss s'écrira :

$$\iiint_{v} div(\vec{E}) dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dv$$

d'où l'expression du théorème de Gauss sous sa forme locale :

$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ cette équation s'appel aussi Équation de Maxwell – Gauss.

Équation de Poisson

On remplace la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ dans l'équation locale de gauss on trouve :

$$\iiint_{v} div\left(-\overrightarrow{grad}(V)\right) dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dv$$

On a par définition, $div - \overrightarrow{grad}(f) = \Delta f$ (Δ l'opérateur laplacien$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \textbf{\textit{Equation de Poisson}}$$

En l'absence locale de charge volumique, l'équation de Poisson prend la forme de l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0 \quad \textbf{\textit{Equation de Laplace}}$$