1 Les Matrices (chapitre 3)

1.1 Généralités sur les matrices

2 Matrice associée à une application linéaire

2.1 Multiplcation de Matrices

3 L'anneau des matrices carrées et propriétés

Matrice inversible

Définition 1 *On dit que $A \in M_n(\Bbbk)$ est inverssible s'il existe une matrice $B \in M_n(\Bbbk)$ tel que*

$$A.B = B.A = I_n$$

on note $B = A^{-1}$ (A^{-1} est l'inverse de A).

Exemple 1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A.B = I_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-d = 0 \\ c = 0, d = 1 \end{cases}$$

on trouve $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a aussi* $B.A = I_2$.

Proposition .1 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels avec $\dim E = m$, $\dim F = n$, $\dim G = p$ de bases respectivement B_1, B_2, B_3.*
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires, alors

$$Mat(g \circ f, B_1, B_3) = Mat(g, B_2, B_3).Mat(f, B_1, B_2)$$

Proposition .2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaires bijective, $\dim E = \dim F = n$ et soit B_1 une base de E et B_2 une base de F.*
Soit $A = Mat(f, B_1, B_2)$ alors la matrice A est inversible et son inverse

$$A^{-1} = Mat\left(f^{-1}, B_2, B_1\right).$$

Démonstration. *On a $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$*
d'apres la proposition(.1)

$$Mat\left(f \circ f^{-1}, B_2, B_2\right) = Mat(f, B_1, B_2).Mat\left(f^{-1}, B_2, B_1\right) = Mat(Id_F, B_2, B_2) = I_n$$
$$Mat\left(f^{-1} \circ f, B_1, B_1\right) = Mat\left(f^{-1}, B_2, B_1\right).Mat(f, B_1, B_2) = Mat(Id_E, B_1, B_1) = I_n$$

par suite

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

d'ou A *est inversible et* $A^{-1} = Mat\left(f^{-1}, B_2, B_1\right)$. ■

Exemple 2 *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice associée relativement à la base canonique* B *de* $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. l'expression de f.

$$f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x\,(0,1,0) + y\,(1,1,0) + z\,(-1,-1,-1)$$
$$f(x,y,z) = (y-z, x+y-z, -z)$$

$${}^{t}f(x,y,z) = A^{t}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ x+y-z \\ -z \end{pmatrix}$$

2. la matrice associée à $(f \circ f)$ *relativement à* B

$$Mat(f \circ f, B) = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f \circ f(x,y,z) = (x+y, x+2y-z, z)$.

3. l'application f *est un isomorphisme de* $\mathbb{R}^3$.

$\ker f = \{(x,y,z)/f(x,y,z) = (y-z, x+y-z, -z) = (0,0,0)\} = \{(0,0,0)\}$

donc f est injective de plus f *est un endomorphisme donc* f *est bijective.*

$f^{-1}(x,y,z) = (a,b,c) \Longrightarrow (x,y,z) = f\,(a,b,c) = (b-c, a+b-c, -c)$

$$\begin{cases} x = b-c \\ y = a+b \\ z = -c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -x+y \\ b = x-z \\ c = -z \end{cases}$$

$f^{-1}(x,y,z) = (-x+y, x-z, -z)$

par suite la matrice associée à f^{-1} *relativement à* B *est*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.1 Changement de bases

3.1.1 Matrice de passage

Définition 2 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* $\dim E = n$. *soient* $B_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *et* $B_2 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ *deux bases de* E.

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + ... + \alpha_{n1}a_n \\ b_2 = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + ... + \alpha_{n2}a_n \\ \vdots \\ b_n = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + ... + \alpha_{nn}a_n \end{cases}$$

Alors la matrice de ***passage*** *de la base* B_1 *à la base* B_2 *est*

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & ... & b_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ . \\ a_n \end{array}$$

$$Id_E : E_{B_2} \longrightarrow E_{B_1}$$

$$P = Mat\left(Id_E, B_2, B_1\right)$$

$Id_E\left(bj\right) = bj = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}\right)a_i.$

Remarque .1 *Si* P *est la matrice de passage de la base* B_1 *à la base* B_2*, alors* P *est inverssible et son inverse* P^{-1} *est la matrice de passage de la base* B_2 *à la base* B_1*.*

Exemple 3 *Dans* $\mathbb{R}^3, B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$*la base connonique,* $B_2 = \{a_1, a_2, a_3\}$ *avec*

$$\begin{cases} a_1 = -e_1 + e_3 \\ a_2 = e_1 - e_2 \\ a_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{-1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 \\ e_2 = \frac{-1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 \\ e_3 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 \end{cases}$$

la matrice de passage de la base B_1 *à la base* $B_2 = P = Mat(Id_E, B_{2,}B_1)$

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ 2_3 \end{array}$$

la matrice de passage de la base B_2 à la base $B_1 = P^{-1} = Mat(Id_E, B_1, B_2)$.

$$P^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ \\ a_2 \\ \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

Proposition .3 *Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel, $\dim E = n$. soient $B_1 = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et $B_2 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ deux bases de E.*
Soit P la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2.

Pour $v \in E$, il se décompose en $v = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)\, a_i$ dans la base B_1 et on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ce même $v \in E$ se décompose en $v = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x'_j\right) b_j$ dans la base B_2 et on note $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

Alors

$$X = PX'.$$

En effet on a $bj = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_{ij})\, a_i$ et $P = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} (x_i)\, a_i = \sum_{j=1}^{n} \left(x'_j\right) b_j = \sum_{j=1}^{n} \left(x'_j\right) \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij})\, a_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x'_j\right) ((\alpha_{ij})\, a_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(x'_j\right) (\alpha_{ij}) \right) a_i$$

d'ou $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(x'_j\right) (\alpha_{ij}) \Longrightarrow X = PX'$

3.2 Formule de changement de base

Proposition .4 *Soit $f : E \to E$ une application linéaire.*
Soient B_1, B_2 deux bases de E.
Soit $P = P_{B_1 \to B_2}$ la matrice de passage de B_1 à B_2.
Soit $A = Mat\,(f, B_1, B_1) = Mat\,(f, B_1)$ la matrice associée à f relativement à la bases B_1.
Soit $A' = Mat\,(f, B_2)$ la matrice associée à f relativement à la bases B_2. Alors

$$A' = P^{-1}.A.P$$

en effet

$$\underbrace{E_{B_2} \xrightarrow{f} F_{B_2}}_{A'} \iff \underbrace{E_{B_2} \xrightarrow{Id_E}}_{P} \underbrace{E_{B_1} \xrightarrow{f}}_{A} \underbrace{E_{B_1} \xrightarrow{Id_E}}_{P^{-1}} E_{B_2}$$

On a

$$f = id_E \circ f \circ id_E$$

alors

$$\begin{aligned} A' &= Mat\,(f, B_2) = Mat\,(id_E \circ f \circ id_E, B_2) \\ &= Mat\,(id_E, B_1, B_2)\,.Mat\,(f, B_1)\,.Mat\,(id_E, B_2, B_1) \\ A' &= P^{-1}.A.P \end{aligned}$$

Remarque .2 *l'intérêt des changements de base, se ramener à une matrice plus simple. Par exemple, matrice diagonal, il est facile de calculer les puissances A^n.*

Exemple 4 *Soient*

$$\begin{aligned} B_1 &= (a_1 = (1,1,0)\,, a_2 = (0,-1,0)\,, a_3 = (3,2,-1)) \\ B_2 &= (b_1 = (1,-1,0)\,, b_2 = (0,1,0)\,, b_3 = (0,0,-1)) \end{aligned}$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base B_1 est

$$A = Mat\,(f, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A' = Mat\,(f, B_2) = ?$
on note $P = P_{B_1 \to B_2}$ la matrice de passage de B_1 à B_2

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1 = (1,1,0) = e_1 + e_2 \\ a_2 = (0,-1,0) = -e_2 \\ a_3 = (3,2,-1) = 3e_1 + 2e_2 - e_3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e_1 = a_1 + a_2 \\ e_2 = -a_2 \\ e_3 = 3a_1 + a_2 - a_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} b_1 = (1,-1,0) = e_1 - e_2 \\ b_2 = (0,1,0) = e_2 \\ b_3 = (0,0,-1) = -e_3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b_1 = a_1 + 2a_2 \\ b_2 = -a_2 \\ b_3 = -3a_1 - a_2 + a_3 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_1 = b_1 + 2b_2 \\ a_2 = -b_2 \\ a_3 = 3b_1 + 5b_2 + b_3 \end{array} \right.$$

donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \textit{et}\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^3_{B_2} \xrightarrow{Id_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3_{B_1}}_{P} \underbrace{\xrightarrow{f} \mathbb{R}^3_{B_1}}_{A} \underbrace{\xrightarrow{Id_{\mathbb{R}^3}} \mathbb{R}^3_{B_2}}_{P^{-1}}$$

alors

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Par récurrence on montre que

$$A'^n = A'.A'....A' \ \ (n \text{ fois })$$
$$A'^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

On montre par récurrence que $A^n = PA'^nP^{-1}$.
on a:

$$A'^2 = A'.A' = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)AP = P^{-1}A.AP = P^{-1}A^2P$$

on suppose que la propriété est vraie pour n *et la montre pour* $(n+1)$.

$$A'^{n+1} = \left(P^{-1}A^nP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A^n\left(PP^{-1}\right)AP = P^{-1}A^{n+1}P$$

par suite

$$A'^n = P^{-1}A^nP$$

donc

$$A^n = PA'^nP^{-1}$$
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3^{n+1}+3 \\ -2^{n+1}+2 & 2^n & -5\times 2^n - 3^n + 6 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

3.3 Matrices semblables

Définition 3 *Deux matrices* A *et* B *de* $M_n(\mathbb{K})$ *sont dites semblables s'il existe une matrice inversible* $P \in M_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarque .3 *1) Il s'agit d'une relation d'équivalence.*
2) Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes.