0.1 Déterminants

Le déterminant est un nombre que l'on associe à une matrice carrée d'ordre n qui permet de savoir si une matrice est inversible ou pas, et de façon plus générale, joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Définition 1 *cas $n = 2$. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on appelle déterminant d'ordre 2*, et on note*

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - (-1).4 = 10.$$

Définition 2 *cas $n = 3$. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

on appelle déterminant d'ordre 3*, et on note*

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge). \end{aligned}$$

Exemple 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

La règle de Sarrus

La **règle de Sarrus** est une règle pour calculer un **déterminant d'ordre** 3.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)\,.$$

Exemple 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = ((-4) + 12 + 4) - ((-6) + 4 + 8) = 6.$$

Remarque .1 *pour* $n = 1$ $\det A = \det(a) = a$.

Cas général:

On peut développer un déterminant par rapport à n'importe quelle ligne,ou n'importe quelle colonne.

Notation: Soit $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$
pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ nous noterons A_{ij} la matrice carrée d'ordre $(n-1)$ obtenue en supprimant dans la matrice A, la ligne i et colonne j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & .. & a_{i+1,j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & .. & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdot & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdot & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot\cdot & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdot & \cdot\cdot & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdot & \cdot\cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & & \cdot & \cdot\cdot & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdot & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

pour simplifier les calculs, on doit respecter ce tableau de signe

$$\begin{array}{cc} & j\downarrow \\ i\rightarrow & \begin{vmatrix} + & - & + & \dots.(-1)^{1+n} \\ - & + & - & \cdot\cdot\,. \quad \vdots \\ . & \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots \quad \vdots \\ \vdots & \vdots & (-1)^{i+j} & .\;. \quad \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots. \quad . \\ (-1)^{n+1} & \cdot\cdot & . & \cdot\cdot\,.\;(-1)^{n+n} \end{vmatrix} \end{array}$$

pour simplifier les calculs, on doit respecter ce tableau de signe

Règle de calcul

pour j fixée: (selon "j" ème colonne)

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\det A_{ij}$$

pour i fixée: (selon "i" ème ligne)

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\det A_{ij}$$

Exemple 4

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

selon la première ligne

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(-1)\det A_{11} - (2)\det A_{12} + 0\det A_{13} - (-2)\det A_{14} =$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

selon la 3 ème colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0)\det A_{13} - (1)\det A_{23} + (-3)\det A_{33} - (0)\det A_{43}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Cas particulier

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure ou diagonale) est égal au produit des termes diagonaux

$$\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

Exemple 5

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-4)(-1)6 = 24$$

Propriétés

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ on a

$$\det A = \det\left({}^tA\right).$$

2) $\det A = 0$ si est seulement si les vecteurs colonnes ou lignes sont liées.

3) $\det(A.B) = \det A.\det B.$

4) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ en effet

$$\det\left(A.A^{-1}\right) = \det I_n = \det A.\det A^{-1} = 1$$

5) En général $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

6) Si A et A'sont semblables $(A = P^{-1}A'P)$ alors $\det A = \det(A')$.

7) $\forall\lambda \in \mathbb{K}$

i)

$$\det(C_1, C_2, ..., \lambda C_j, ..., C_n) = \lambda \det(C_1, C_2, ..., C_j, ..., C_n)$$

ii)$\det \lambda A = \lambda^n \det A$

Exemple

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 10 & -1 & 2 \\ 15 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (5)(3)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(3)(2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -90$$

8) Si le vecteur $C_j = C_{j'} + C_{j"}$ alors

$$\det(C_1, C_2, ..., C_{j'} + C_{j"}, ..., C_n) = \det(C_1, C_2, ..., C_{j'}, ..., C_n) + \det(C_1, C_2, ..., C_{j"}, ..., C_n)$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

9) Si $C_i = \lambda C_j$ alors $\det(C_1, C_2, ..., C_n) = 0$

Exemple

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Si $C_i = 0$ alors $\det(C_1, C_2, ..., C_n) = 0$.

10) Quand on permute deux colonnes ou deux lignes on change le signe du résultat,

$$\det(C_1, C_2, ...C_i, ..., C_j, ..., C_n) = -\det(C_1, C_2, ...C_j, ..., C_i, ..., C_n)$$

Exemple

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

11) On ne change pas le résultat en ajoutant à une ligne (ou colonne) une combinaison

linéaire des autres lignes (ou colonnes). mais on ne peut pas ajouter un vecteur proportionnel à lui même.
Ces règles de calcul conduisent à l'idée suivante:
faire apparaître un maximum de zéros sur une même ligne (ou colonne) et développer par rapport à cette ligne (ou colonne).

Exemple

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2 + \alpha C_1 + \beta C_3, C_3), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -6 & 9 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -18 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -18 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

0.2 Méthode de Calcul de l'inverse d'une matrice carrée. (la méthode des cofacteurs).

Définition 3 *Soit la matrice* $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ *définie par*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \ \ \forall i, j = 1, ..., n$$

la matrice C *est appelée la matrice des cofacteurs de la matrice* A *ou bien la comatrice de* A.

Théorème .1 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *. La matrice* A *est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$. *De plus,*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} . {}^tC$$

Exemple 6 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_2 \to l_2 - l_3}{=} \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 18$$

La matrice cofacteur de A

$$C = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 10 & 9 \\ -2 & 14 & 18 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
{}^tC = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 10 & 14 & 4 \\ 9 & 18 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A^{-1} = \frac{1}{\det A}.{}^tC = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 10 & 14 & 4 \\ 9 & 18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Exercice 1. *Soit A la matrice définie par*

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}
$$

1) Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déduire la matrice A^{-1}.

2) Retrouver le résultat de A^{-1} avec la méthode des cofacteurs.