EXAMEN

Exercice N°1 :(12 points)
Soit le modèle à deux variables explicatives estimé sur 19 observations :

$$y_t = -47,5046 + 0,004860x_{1t} + 0,012742x_{2t} + \varepsilon_t$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a_0}} = 14,93307, \hat{\sigma}_{\hat{a_1}} = 0,001256, \hat{\sigma}_{\hat{a_2}} = 0,004975$$

$$R^2 = 0,5718; F^* = 10,6836$$

Les résidus calculés sur le modèle précédent sont représentés sur le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e_t	-5,81	10,46	-26,86	-26,37	-42,13	1,14	24,27	0,93	-1,60	2,31
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
e_t	23,25	13,62	27,52	-23,61	-16,54	-32,87	-4,88	36,82	40,39	

1. Vérifier les conditions d'application du test d'autocorrélation des erreurs de Durbin et Watson (DW).
2. Dans le cas où les conditions de DW son vérifiées,effectuer le test d'autocorrélation des erreurs ($d_1 = 1,08$;$d_2 = 1,53$).
3. Expliquer les étapes de la méthode des quasi différences premières afin de lever l'autocorrélation des erreurs d'ordre 1, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t$.
4. Estimer la valeur de ρ.

Exercice N°2 :(08 points)
Soit le modèle suivant sous forme structurelle :

$$R_t = a_0 + a_1M_t + a_2Y_t + \varepsilon_{1t} \quad (1)$$

$$Y_t = b_0 + b_1R_t + b_2I_t + \varepsilon_{2t} \quad (2)$$

avec :
- M_t : L'offre de monnaie pour l'année t,
- R_t : Le taux d'intérêt pour l'année t,
- Y_t : Le Produit Intérieur Brut pour l'année t.
- I_t : L'Investissement intérieur pour l'année t.

1. Quelles sont les variables Endogènes et Exogènes du modèle.
2. Préciser les conditions d'identifiabilité du modèle.
3. Exprimer la forme réduite du modèle à partir de la forme structurelle et démontrer que les estimateurs ne sont pas optimaux.
4. Préciser quelle méthode à appliquer pour estimer les coefficients du modèle équation par équation.

2016/2017

Corrigé de l'EMD 2 Econométrie 2 3EQ

Exo 1 : $y_t = -47,5046 + 0,004860\, x_{1t} + 0,012742\, x_{2t} + \varepsilon_t$ ---- (1)

1°)
- $n = 19 \geq 15$
- Le modèle contient un terme constant. 2
- Le modèle ne contient pas de variable à expliquer figurant parmi les variables explicatives en tant que variable retardée.

2) $\sum_{t=2}^{19}(e_t - e_{t-1})^2 = 11069,50$ 1,5 ; $\sum_{t=1}^{19} e_t^2 = 10339,26$ 1,5 ; $DW = \dfrac{\sum_{t=2}^{19}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{19} e_t^2} = 1,07$ 1

$DW = 1,07 < d_1 = 1,108$ 1, on est en présence d'autocorrélation des erreurs positive.

3) $\varepsilon_t = \rho\,\varepsilon_{t-1} + v_t$. Les étapes des quasi-différences premières

- L'équation (1) se transforme en : $\rho y_{t-1} = \rho(-47,5046) + \rho(0,004860\, x_{1t-1}) + \rho(0,012742)\, x_{2t-1} + \rho\,\varepsilon_{t-1}$ ---- (2)

en général : $\rho y_{t-1} = \rho a_0 + \rho a_1 x_{1t-1} + \rho a_2 x_{2t-1} + \dots + \rho a_k x_{kt-1} + \rho\,\varepsilon_{t-1}$ ---- (2) 1

- En retranchant (2) de (1) on obtient :

$y_t - \rho y_{t-1} = -47,5046(1-\rho) + 0,004860\,(x_{1t} - \rho x_{1t-1}) + 0,012742\,(x_{2t} - \rho x_{2t-1}) + \varepsilon_t - \rho\,\varepsilon_{t-1}$ ---- (3) 1

- On applique une régression par les MCO sur l'équation (3), on obtient alors un estimateur $\hat{a}$ sans biais et à variance minimale. 1

$$\hat{a} = (X'M'MX)^{-1}(X'M'MY) \quad \text{avec} \quad M'M = \begin{pmatrix} \rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$ 1

4) $\rho = 1 - \dfrac{DW}{2} = 1 - \dfrac{1,07}{2} = 0,465$ 1

Exo 2

1) Les variables endogènes sont : R_t et Y_t 0,5
- " exogènes sont : M_t et I_t 0,5

2) Première équation : $g = 2,\ k = 2,\ g' = 2,\ k' = 1$, $g-1 = g-g'+k-k' \Rightarrow 1 = 1$, elle est juste identifiée 1

Deuxième équation : $g = 2,\ k = 2,\ g' = 2,\ k' = 1$, $g-1 = g-g'+k-k' \Rightarrow 1 = 1$, elle est juste identifiée. 1

3)
$$\begin{cases} R_t = \dfrac{a_0 + a_2 b_0}{1 - a_2 b_1} + \dfrac{a_2 b_2}{1 - a_2 b_1} I_t + \dfrac{a_2\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{1 - a_2 b_1} + \dfrac{a_1}{1 - a_2 b_1} M_t & \text{---- (3)} \\[2ex] Y_t = \dfrac{b_0 + a_0 b_1}{1 - a_2 b_1} + \dfrac{a_1 b_1}{1 - a_2 b_1} M_t + \dfrac{b_2}{1 - a_2 b_1} I_t + \dfrac{b_1\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1 - a_2 b_1} & \text{---- (4)} \end{cases}$$
1,5 1,5

- L'équation (4) indique que Y_t est fonction de ε_{1t} et par conséquent $E(Y_t\,\varepsilon_{1t}) \neq 0$. Il en résulte que dans l'équation (1), l'hypothèse d'indépendance entre Y_t et l'erreur ε_{1t} n'est pas respectée. Ainsi les estimateurs $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ et $\hat{a}_2$ obtenus par les MCO sur l'équation (1) ne sont pas optimaux. 1,5
- De même l'équation (3) indique que R_t est fonction de ε_{2t} et par conséquent $E(R_t\,\varepsilon_{2t}) \neq 0$. Il en résulte que dans l'équation (2), l'hypothèse d'indépendance entre R_t et l'erreur ε_{2t} n'est pas respectée. Ainsi les estimateurs $\hat{b}_0, \hat{b}_1$ et $\hat{b}_2$ obtenus par les MCO sur l'équation (2) ne sont pas optimaux.

4) Les méthodes à appliquer pour estimer les coefficients du modèle équation par équation sont soit les DMC ou les MCI. 0,5

EXAMEN

Exercice N°1 :(06 points)

soit le modèle : $y_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 + \varepsilon_t$
avec :

$$E[\varepsilon, \acute{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 6 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 9 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 75 \end{pmatrix}$$

1. Les variables ε_t sont -elles autocorrélées ? Justifier.
2. Le modèle est-il homoscédastique ? Justifier.
3. S'il ne l'est pas, quelle transformation doit être réalisée pour qu'il devienne homoscédastique ?

Exercice N°2 :(08 points)

Supposant que, suite à une crise économique, les reserves de change d'un pays sont caractérisées par l'équation :

$$Q = Q_0 e^{-kt}$$

où :
Q : désigne la quantité des reserves de change restante à l'instant t,
Q_0 : la quantité des reserves de change initiale,
k : constante de vitesse d'épuisement des reserves de change.
On dispose des données expérimentales suivantes :

t (année)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q(UM)	416	319	244	188	144	113	85	66	50	41

1. Estimer la constante de vitesse d'épuisement **k** par linéarisation de l'équation donnée.
2. Retrouver la forme du modèle initial.

Exercice N°3 :(06 points)

Soit le modèle à équations simultanées suivant :

$$C_t = a_0 + a_1 PIB_t + \varepsilon_t \quad (1)$$
$$PIB_t = C_t + I_t \quad (2)$$

avec :
- **C** : la consommation, **PIB** : produit intérieur brut en terme réel, **I** : l'investissement.

1. Ecrire le modèle sous forme matricielle.
2. Exprimer la forme réduite du modèle à partir de la forme structurelle.
3. Préciser les conditions d'identifiabilité du modèle.
4. Préciser quelle méthode à appliquer pour estimer les coefficients du modèle équation par équation.

Corrigé type EMD 2 Econométrie 2 — Année Universitaire 2017/2018 — 24/05/2018

Exo1 : (06 points)

1°) Les ε_t ne sont pas autocorrélés car $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \; \forall i \neq j$. 1,5

2°) Le modèle n'est pas homoscédastique, il est hétéroscédastique puisque les variances des erreurs (diagonale) ne sont pas constantes. 1,5

3°) Pour rendre le modèle homoscédastique, il faut procéder à la transformation suivante :
$v_1 = \varepsilon_1, \; v_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}}, \; v_3 = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{3}} \; \cdots, \; v_{25} = \frac{\varepsilon_{25}}{\sqrt{25}}$ car $V(v_1) = V(v_2) = \cdots = V(v_{25}) = 3$ 1

Le modèle transformé alors :

2

$$y_1 = a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + a_3 + v_1$$
$$\frac{y_2}{\sqrt{2}} = a_1 \frac{x_{11}}{\sqrt{2}} + a_2 \frac{x_{21}}{\sqrt{2}} + \frac{a_3}{\sqrt{2}} + v_2$$
$$\frac{y_3}{\sqrt{3}} = a_1 \frac{x_{11}}{\sqrt{3}} + a_2 \frac{x_{21}}{\sqrt{3}} + \frac{a_3}{\sqrt{3}} + v_3$$
$$\vdots$$
$$\frac{y_{25}}{\sqrt{25}} = a_1 \frac{x_{11}}{\sqrt{25}} + a_2 \frac{x_{21}}{\sqrt{25}} + \frac{a_3}{\sqrt{25}} + v_{25}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2/\sqrt{2} \\ y_3/\sqrt{3} \\ \vdots \\ y_{25}/\sqrt{25} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & 1 \\ \frac{x_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{x_{22}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_{13}}{\sqrt{3}} & \frac{x_{23}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots & & \\ \frac{x_{125}}{\sqrt{25}} & \frac{x_{225}}{\sqrt{25}} & \frac{1}{\sqrt{25}} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{25} \end{pmatrix}$$

$\hat{a} = (X'X)^{-1} X'Y$ (X est la matrice transformée).

Exo2 : (08 points)

1°) $Q = Q_0 e^{-kt} \Rightarrow \log(Q) = \log(Q_0) - kt = a + bt$ avec $a = \log Q_0$ et $b = -k$. 1

C'est un modèle de régression linéaire simple.

$\bar{t} = 5,5$ 0,5 ; $\overline{\log Q} = 4,85$ 0,5 ; $\sum_{i=1}^{10} (\log Q_i - \overline{\log Q})(t_i - \bar{t}) = -21,45$ 1 ; $\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})^2 = 82,5$. 1

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (\log Q_i - \overline{\log Q})(t_i - \bar{t})}{\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})^2} = \boxed{-0,26} \quad 1$$

$$\hat{a} = \overline{\log Q} - \hat{b}\bar{t} = 4,85 + 0,26 \times 5,5 = \boxed{6,28} \quad 1$$

2°) $a = \log Q_0 \Rightarrow Q_0 = e^a = e^{6,28} = 534$ 1 ; $k = -b = 0,26$. 1 $\Rightarrow \boxed{Q = 534 e^{-0,26t}}$

Exo3 : (06 points)

1°)
$$\begin{cases} C_t - a_1 PIB_t + 0 I_t - a_0 = \varepsilon_t \\ -C_t + PIB_t - I_t + 0 a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_t \\ PIB_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_t \\ U_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$B \times Y + C \times X = \varepsilon$$

2°)
$$\begin{cases} PIB_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_1} I_t + \frac{\varepsilon_t}{1-a_1} & 1 \\ C_t = \frac{a_0}{1-a_1} + \frac{a_1}{1-a_1} I_t + \frac{\varepsilon_t}{1-a_1} & 1 \end{cases}$$

3°) (Eq_1) : $g = 2, \; k = 1, \; g' = 2, \; k' = 0, \; r = 0$
$g - 1 = g - g' + k - k' + r \Leftrightarrow 1 = 1$ l'équation (1) est <u>juste</u> identifiée. 1

(Eq_2) : $g = 2, \; k = 1, \; g' = 2, \; k' = 1, \; r = 1$
$g - 1 = g - g' + k - k' + r \Leftrightarrow 1 = 1$ l'équation (2) est <u>juste</u> identifiée 1

4°) Le modèle est juste identifié, on peut appliquer la méthode des DMC ou MCI pour estimer les coefficients du modèle équation par équation. 1

Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

EXAMEN

Question :(04 points)
Parmi les tests de détection d'une hétéroscédasticité dans un modèle linéaire, le test de Gleisjer.
- Expliquer la procédure à suivre pour effectuer ce test.

Exercice N°1 :(10 points)
Soit le modèle à trois variables explicatives estimé sur 20 observations :

$$y_t = -242,795 + 3,897x_{1t} + 0,404x_{2t} - 0,879x_{3t} + e_t$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} = 26,800, \hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = 0,400, \hat{\sigma}_{\hat{a}_2} = 0,061, \hat{\sigma}_{\hat{a}_3} = 0,240$$

$$R^2 = 0,939; F^* = 81,948$$

Les résidus calculés sur le modèle précédent sont représentés sur le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e_t	1,20	2,67	-2,56	-5,39	-5,65	-2,01	0,36	1,54	0,02	-0,48
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
e_t	-3,05	-0,18	4,91	0,76	2,68	1,16	0,79	-2,88	0,85	5,25

1. Vérifier les conditions d'application du test d'autocorrélation des erreurs de Durbin et Watson (DW).
2. Dans le cas où les conditions de DW son vérifiées, effectuer le test d'autocorrélation des erreurs ($d_1 = 1,00$;$d_2 = 1,68$).
3. Expliquer les étapes de la méthode des quasi différences premières afin de lever l'autocorrélation des erreurs d'ordre 1, $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t$.
4. Estimer la valeur de ρ.

Exercice N°2 :(06 points)
On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= a_1 + b_1 Y_{2t} + c_1 X_{1t} + \varepsilon_{1t} \quad (1) \\ Y_{2t} &= a_2 + b_2 Y_{1t} + c_2 X_{2t} + \varepsilon_{2t} \quad (2) \end{aligned}$$

Dans lequel :
– Y_{1t} et Y_{2t} sont des variables endogènes,
– X_{1t} et X_{2t} sont des variables exogènes.

1. Préciser les conditions d'identifiabilité du modèle.
2. Exprimer la forme réduite du modèle à partir de la forme structurelle et démontrer que les estimateurs ne sont pas optimaux.
3. Préciser quelle méthode à appliquer pour estimer les coefficients du modèle équation par équation.

Corrigé Type Econométrie II

L3EQ S6 2018/2019

Mr HIDRA. Younes

Ex 3 (04 points) Test de Glejser

- Regression par les MCO de y_j sur x_j et calculer le vecteur e_j. 0,5
- Regression de $|e_j|$ sur x_j 0,5
- Tester différentes formes de relations:

$|e_j| = a_0 + a_1 x_j + \eta_j \overset{H}{\rightsquigarrow} \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = k^2 x_j^2$

$|e_j| = a_0 + a_1 x_j^{1/2} + \eta_j \overset{H}{\rightsquigarrow} \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = k^2 x_j$ 2

$|e_j| = a_0 + a_1 x_j^{-1} + \eta_j \overset{H}{\rightsquigarrow} \hat{\sigma}^2_{\varepsilon_j} = k^2 x_j^{-2}$

- Si le coefficient a_1 d'une des spécifications est significativement différent de zéro, on rejette l'hypothèse d'homoscédasticité. 0,5
- La forme à retenir en cas d'hétéroscédasticité se réfère au coefficient affecté du ratio de Student le plus élevé. 0,5

Ex 1 (10 points)

1) - $n = 20 > 15$ 2
- Il existe une constante dans le modèle
- y_t ne figure pas comme variable retardée parmi les variables explicatives.

2) $DW = \frac{\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{20} e_t^2} = \frac{171,27}{162,62} = 1,053$ 1 1 1

$d_1 < DW = 1,05 < d_2$ 1

donc la valeur de DW se situe dans la zone de doute. Puisque elle est plus proche de d_1, on suppose l'existence d'une autocorrélation des erreurs.

3) Les étapes de la méthode des quasi-différences premières

- Calculer $(y_t - \rho y_{t-1})$:

$y_t - \rho y_{t-1} = a_0(1-\rho) + a_1(x_{1t} - \rho x_{1t-1}) + a_2(x_{2t} - \rho x_{2t-1}) + (\varepsilon_t - \rho \varepsilon_{t-1})$ 1

$y_t - \rho y_{t-1} = a_0(1-\rho) + a_1(x_{1t} - \rho x_{1t-1}) + a_2(x_{2t} - \rho x_{2t-1}) + \mu_t$

- Appliquer les MCO sur ce dernier modèle 1
- Par identification:

$b_0 = a_0(1-\rho) \Rightarrow a_0 = \frac{b_0}{1-\rho}$ 1

1/2

- Les coefficients des variables explicatives transformées s'interprètent directement comme étant ceux des variables explicatives du modèle initial.

4) $\rho = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{1,053}{2} = 0,4735$ 1

Ex 2 (06 points)

1) Equation 1 : $g = 2, k = 2, g' = 2, k' = 1$ 1

$g - 1 = g - g' + k - k' \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$ elle est juste identifiée

Equation 2 : $g = 2, k = 2, g' = 2, k' = 1$

$g - 1 = g - g' + k - k' \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$ elle est juste identifiée 1

Le système est juste identifié.

2) La forme réduite :

$$\begin{cases} y_{1t} = \frac{a_1 + b_1 a_2}{1 - b_1 b_2} + \frac{c_1}{1 - b_1 b_2} x_{1t} + \frac{b_1 c_2}{1 - b_1 b_2} x_{2t} + \frac{\varepsilon_{1t} + b_1 \varepsilon_{2t}}{1 - b_1 b_2} \quad \ldots (3) \\ y_{2t} = \frac{a_2 + a_1 b_2}{1 - b_1 b_2} + \frac{b_2 c_1}{1 - b_1 b_2} x_{1t} + \frac{c_2}{1 - b_1 b_2} x_{2t} + \frac{b_2 \varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1 - b_1 b_2} \quad \ldots (4) \end{cases}$$ 1 1

avec $(1 - b_1 b_2) \neq 0$.

La forme structurelle :

$$\begin{cases} y_{1t} = a_1 + b_1 y_{2t} + c_1 x_{1t} + \varepsilon_{1t} \quad \ldots (1) \\ y_{2t} = a_2 + b_2 y_{1t} + c_2 x_{2t} + \varepsilon_{2t} \quad \ldots (2) \end{cases}$$

- Dans l'équation (3) y_{1t} est fonction de ε_{2t} par conséquent $E(y_{1t}\varepsilon_{2t}) \neq 0$, il en résulte que dans (2), l'hypothèse d'indépendance entre la variable y_{1t} et l'erreur ε_{2t} n'est pas respectée. Ainsi, les estimateurs $\hat{a}_2$, $\hat{b}_2$ et $\hat{c}_2$ obtenus par MCO sur (E2) ne sont pas optimaux. 1
- De même l'équation (4) indique que y_{2t} est fonction de ε_{1t} donc $E(y_{2t}\varepsilon_{1t}) \neq 0$, il en résulte que dans (E1), l'hypothèse d'indépendance entre y_{2t} et l'erreur ε_{1t} n'est pas respectée. Ainsi les estimateurs $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$ obtenus par les MCO sur (E1) ne sont pas optimaux.

3) Les équations (1) et (2) sont juste identifiées, on peut donc appliquer la méthode des DMC ou MCI pour l'estimation du modèle. 1

— o —

2/2

Département des Scs Economiques
L3 Economie quantitative
Module : *Econométrie II*

Année universitaire 2019/2020
22 Novembre 2020
Durée : 1h30mn

Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Examen

Exercice N°1 :(12 points)
Soit le modèle à deux variables explicatives estimé sur 16 observations :

$$y_t = -21,334 + 0,493x_{1t} + 0,0201x_{2t} + e_t$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} = 5,399, \hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = 0,131, \hat{\sigma}_{\hat{a}_2} = 0,004$$
$$R^2 = 0,717; F^* = 10,016$$

Les résidus calculés sur le modèle précédent sont représentés sur le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8
e_t	0,313	0,230	-0,735	-0,776	-0,346	0,998	0,552	0,538
t	9	10	11	12	13	14	15	16
e_t	0,625	0,883	1,023	1,012	-0,661	-0,396	-0,522	0,213

1. Dans le cas où les conditions de Durbin et Watson son vérifiées, effectuer le test d'auto-corrélation des erreurs ($d_1 = 0,98$;$d_2 = 1,54$).
2. Estimer la valeur de ρ.
3. Calculer la matrice $\Omega_{\varepsilon}^{-1}$ des Moindres Carrés Généralisés (MCG).

Exercice N°2 :(04 points)
D'après les théories relatives à l'innovation, une innovation se diffuse dans la société en suivant un processus qui touche différentes catégories de consommateurs, des plus enthousiastes jusqu'aux plus réticents face à la technologie. (Griliches, 1957) a proposé un modèle logistique pour ce processus suivant le forme :

$$Y_t = \frac{k}{1 + e^{-(a+bt)}}$$

Où : **k** : représente le seuil, **Y** : mesure la diffusion du phénomène, **t** : la période, **a** et **b** les paramètres à estimer avec **b** représentant le taux de croissance, c'est à dire la vitesse de diffusion.

1. Exprimer la forme linéaire du modèle de Griliches présenté précédemment.
2. Quelle condition doit vérifier le seuil **k** pour que l'estimation des paramètres du modèle soit possible ?

<u>Exercice N°3</u> :(04 points)
Soit le modèle d'offre de la demande suivant :

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= aY_{2t} + bX_{1t} + \varepsilon_{1t} \quad fonction\ de\ demande \qquad (1) \\ Y_{1t} &= cY_{2t} + dX_{2t} + \varepsilon_{2t} \quad fonction\ d'\ offre \qquad (2) \end{aligned}$$

Dans lequel :
- La quantité produite Y_{1t} et le prix unitaire Y_{2t} d'un certain bien agricole sont des variables endogènes.
- Le revenu X_{1t} et le facteur climatique X_{2t} sont des variables exogènes.
- Les ε_{1t} et ε_{2t} sont des résidus.

1. Préciser les conditions d'identifiabilité du modèle.
2. Exprimer la forme réduite du modèle à partir de la forme structurelle et démontrer que les estimateurs ne sont pas optimaux.
3. Préciser quelle méthode à appliquer pour estimer les coefficients du modèle équation par équation.

L3 EQ 2019/2020 23/11/2020

Corrigé type du Module Econométrie II (EMD . SN . S6) Mr MDRA

Exo N°1 : (12 points).

1°/ - $n = 16 > 15$.
- le modèle est en présence d'une constante
- y_t ne figure pas parmi les variables exogènes comme variable retardée.

Les conditions d'application du Test de DW sont vérifiées

- Le Test d'autocorrélation des erreurs : 01

t	e_t	e_{t-1}	$e_t - e_{t-1}$	$e_t \times e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
1	0,313	–	–	–	–	0,098
2	0,230	0,313	-0,083	0,072	0,007	0,053
3	-0,735	0,230	-0,965	-0,169	0,931	0,540
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	0,212	-0,522	0,735	-0,111	0,540	0,045
		la somme Σ =		3,759	6,649	7,156

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{16}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{16} e_t^2} = \frac{6,649}{7,156} = \boxed{0,929}$$

$d_1 = 0,98$, $DW < d_1$, y a présence de l'autocorrélation positive des erreurs

2°/ $$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{16} e_t \cdot e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{16} e_t^2} = \boxed{0,525}.$$

3°/ L'estimateur des MCG $\hat{a} = (X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y)$

avec :

$$\Omega_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\sigma_v^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \cdots & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} \Rightarrow \sigma_v^2 = (1-\rho^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-k-1} = \frac{7,156}{16-2-1} = \boxed{0,550}$$

$$\hat{\sigma}_v^2 = (1-\hat{\rho}^2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = (1-0,525^2)\cdot 0,55 = \boxed{0,398}$$

$$\hat{\Omega}_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 2,512 & -1,319 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1,319 & 3,205 & -1,319 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1,319 & 3,205 & -1,319 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 3,205 & -1,319 \\ & & & & -1,319 & 1 \end{pmatrix}$$

Exo N°2 : (04 points)

1°/ On utilise la transformation logarithmique :

$$y_t = \frac{k}{1+e^{-(a+bt)}} \Rightarrow \left(\frac{k}{y_t} - 1\right) = e^{-(a+bt)}$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{k}{y_t} - 1\right) = \log\left(e^{-(a+bt)}\right)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{k}{y_t} - 1\right) = -a - bt.$$

On pose $z = \log\left(\frac{k}{y_t} - 1\right)$; $\alpha = -a$; $\beta = -b$.

On aura la forme linéaire $\boxed{z = \alpha + \beta . t}$

2°/ La condition est que :

$$\frac{k}{y_t} - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{k > y_t}$$

Exo N°3 (04 points)

1°/ (Eq 1) : $g = 2$, $k = 2$, $g' = 2$, $k' = 1$, $r = 0$

$g - 1 = 1 = g - g' + k - k' + r = 1$, l'équation (1) est juste identifiée.

(Eq 2) : $g = 2$, $k = 2$, $g' = 2$, $k' = 1$, $r = 0$

$g - 1 = 1 = g - g' + k - k' + r = 1$, l'équation (2) est juste identifiée.

- Le modèle est donc juste identifié.

2°/
$$\begin{cases} y_{1t} = a y_{2t} + b X_{1t} + \varepsilon_{1t} & \cdots (1) \\ y_{1t} = c y_{2t} + d X_{2t} + \varepsilon_{2t} & \cdots (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Rightarrow (a-c) y_{2t} + bX_{1t} - dX_{2t} + \varepsilon_{1t} - \varepsilon_{2t} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{y_{2t} = \left(\frac{-b}{a-c}\right) X_{1t} + \left(\frac{d}{a-c}\right) X_{2t} + \frac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{a-c}} \cdots (3)$$

- On remplace (3) dans l'une des équations (1) ou (2)

$$\boxed{y_{1t} = \left(\frac{-bc}{a-c}\right) X_{1t} + \left(\frac{ad}{a-c}\right) X_{2t} + \frac{a\varepsilon_{2t} - c\varepsilon_{1t}}{a-c}} \cdots (4)$$

- De (3) y_{2t} est fonction de ε_{1t} par conséquent $E(y_{2t}\varepsilon_{1t}) \neq 0$

Il en résulte que dans (1), l'hypothèse d'indépendance de la variable exogène y_{2t} (par son double statut) et de l'erreur ε_{1t} n'est pas respectée.

L'application des MCO sur (1) conduit à des estimateurs qui ne sont pas optimaux.

3°/ Puisque les deux équations sont juste identifiées, on peut appliquer les deux méthodes MCI ou DMC.

Département Scs Economiques
L3 Economie quantitative
Module : *Econométrie II*

Année universitaire 2020/2021
1 Juillet 2021
Durée : 1h30mn

EXAMEN

Question :(02 points)

-Expliquer le problème d'hétéroscédasticité des erreurs dans un modèle de régression linéaire.

Exercice N°1 :(12 points)

Soit le modèle à deux variables explicatives estimé sur 20 observations :

$$y_t = -54,2906 + 0,05160x_{1t} + 0,02213x_{2t} + e_t$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} = 14,33107, \hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = 0,01111, \hat{\sigma}_{\hat{a}_2} = 0,003315$$

$$R^2 = 0,6017; F^* = 10,6136$$

Les résidus calculés sur le modèle précédent sont représentés sur le tableau suivant :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e_t	-3,71	12,46	-27,16	-25,37	-11,11	1,04	19,27	0,83	-1,90	4,41
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
e_t	29,24	11,42	27,12	-23,41	-14,44	-29,77	-2,99	38,72	39,49	31,23

1. Effectuer le test d'autocorrélation des erreurs de Durbin et Watson (DW)($d_1 = 1,10$;$d_2 = 1,54$).
2. Estimer la valeur de ρ.
3. Dans le but d'appliquer la méthode des MCG, on explicite la matrice des variances-covariances Ω_ε.
   - Donner les expressions de $E(\varepsilon_t^2)$, $E(\varepsilon_t.\varepsilon_{t+1})$, $E(\varepsilon_t.\varepsilon_{t+2})$, $E(\varepsilon_t.\varepsilon_{t+i})$.
   - Déduire l'expression de la matrice Ω_ε.

Exercice N°2 :(06 points)

Soit le modèle à équations simultanées suivant :

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= a_0 + a_1 X_{1t} + \varepsilon_{1t} && (1) \\ Y_{2t} &= Y_{1t} + Y_{3t} + X_{2t} && (2) \\ Y_{3t} &= b_0 + b_1 X_{1t} + b_2 Y_{2t} + \varepsilon_{2t} && (3) \end{aligned}$$

1. Quelles sont les variables endogènes et les variables exogènes du modèle.
2. Etudier les conditions d'identifiabilité du modèle.
3. Exprimer la forme réduite du modèle à partir de la forme structurelle et démontrer que les estimateurs des MCO ne sont pas optimaux.
4. Préciser la méthode à appliquer pour estimer les coefficients du modèle équation par équation.

Année Universitaire 2020/2021 — Corrigé Type Économétrie II — 02/07/2021 — Mr HADRA Y.

Exercice de cours (02 points)

- la variance de l'erreur n'est plus constante $E(\varepsilon_i^2) \neq \sigma_\varepsilon^2$ 0,5
- la matrice des variances covariances des erreurs Ω_ε n'est plus diagonale 0,5

$$\Omega_\varepsilon \neq \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & & & 0 \\ & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{pmatrix}$$

- la conséquence de l'hétéroscédasticité, c'est que avec les MCO, on obtient des estimateurs sans biais mais qui ne sont pas à variance minimale. 1

Exo 1 (12 points): 1- tableau des calculs 02

1°) $\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2 = 9480{,}058$ 1 ; $\sum_{t=1}^{20} e_t^2 = 9476{,}546$ 1

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{20} e_t^2} = 1{,}000 \quad 1$$

$DW = 1 < d_1 = 1{,}10$, on est en présence d'autocorrélation positive des erreurs. On rejette H_0 "$\rho = 0$" et on accepte H_1 "$\rho \neq 0$" 1

2°) $\rho = 1 - \frac{DW}{2} = 0{,}5$ 1

3°)

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ \vdots & & & \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & \cdots & & E(\varepsilon_n\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

- 3.1.

⊛ $E(\varepsilon_t\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2)$

$$E(\varepsilon_t^2) = E((\rho\varepsilon_{t-1} + v_t)^2) = \rho^2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_v^2 + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}} \quad 0{,}5$$

⊛ $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}) = E(\varepsilon_t(\rho\varepsilon_t + v_{t+1}))$
$= \rho E(\varepsilon_t^2) + E(\varepsilon_t v_{t+1})$
$= \boxed{\rho\,\sigma_\varepsilon^2}$ 0,5

⊛ $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+2}) = E(\varepsilon_t(\rho\varepsilon_{t+1} + v_{t+2}))$

$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+2}) = \rho E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}) + E(\varepsilon_t v_{t+2}) = \boxed{\rho^2\sigma_\varepsilon^2}$ 0,5

⊛ $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+i})$, de proche en proche et avec la démonstration par récurrence, on montre que $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+i}) = \boxed{\rho^i\sigma_\varepsilon^2}$. 0,5

3.2.

$$\Omega_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

avec $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$.

$$\hat\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-k-1} = \frac{9476{,}546}{20-2-1} = 557{,}444 \quad 1$$

$$\hat\Omega_\varepsilon = 557{,}444 \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5^2 & \cdots & 0{,}5^{19} \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & \cdots & 0{,}5^{18} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0{,}5^{19} & 0{,}5^{18} & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

Exo 2 (06 points)

1°) les variables endogènes y_{1t}, y_{2t}, y_{3t} ; $g = 3$ 1
les variables exogènes X_{1t}, X_{2t}. $k = 2$

2°) Eq(1) : $g' = 1$, $k' = 1$, $r = 0$
$g - 1 = 2$; $g - g' + k - k' + r = 3$; $2 < 3$ 0,5
Eq(1) est sur identifiée. 0,5
Eq(2) : $g' = 3$, $k' = 1$, $r = 1$.
$g - 1 = 2$; $g - g' + k - k' + r = 2$ Eq2 est juste identifiée 0,5
Eq(3) : $g' = 2$, $k' = 1$, $r = 0$
$g - 1 = 2$; $g - g' + k - k' + r = 2$ Eq3 est juste identifiée

3°) la forme réduite : (4) 0,5 1

$$\begin{cases} y_{1t} = a_0 + a_1 X_{1t} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \left(\frac{a_0 + b_0}{1-b_2}\right) + \left(\frac{a_1 + b_1}{1-b_2}\right)X_{1t} + \left(\frac{1}{1-b_2}\right)X_{2t} + \frac{\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-b_2} & (5) \\ y_{3t} = \left(\frac{b_0 + b_2 a_0}{1-b_2}\right) + \left(\frac{b_1 + a_1 b_2}{1-b_2}\right)X_{1t} + \left(\frac{b_2}{1-b_2}\right)X_{2t} + \frac{b_2\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t}}{1-b_2} & (6) \end{cases}$$

1

- Dans (5) y_{2t} est fonction de ε_{2t}, $E(y_{2t}\varepsilon_{2t}) \neq 0$ et dans (3) l'hypothèse d'indépendance de y_{2t} et ε_{2t} n'est pas respectée. L'application des MCO sur l'équation (3) conduit à des estimateurs qui ne sont pas optimaux 0,5

4°) - Eq(1) est suridentifiée : on applique les DMC.
- Eq(2) et (3) sont juste identifiées : on applique les DMC ou les MCI. 0,5