

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA - BEJAIA

Faculté de Technologie

Département des Mines et Géologie

ELECTRICITE ET MAGNETISME (Physique II)
Cours et Exercices Corrigés

Partie I : ELECTRICITE

Présenté par :

Dr. L. HAMMICHE

Année Universitaire : 2021/2022

CHAPITRE I : Electrostatique	1
1. Notions générales.....	1
1.1. La charge électrique et phénomène d'électrisation	1
1.1.1. Electrification par frottement.....	1
1.1.2. Electrification par contact.....	2
1.2. Interprétation - structure de la matière.....	3
1.3. Conducteurs et isolants.....	4
2. l'interaction électrique : loi de Coulomb.....	4
2.1. Définition	5
2.2. Loi de Coulomb.....	5
2.3. Analogie avec l'interaction de gravitation.....	6
2.4. Principe de superposition.....	7
3. Champ électrostatique dans le vide	8
3.1. Cas d'une charge ponctuelle	8
3.2. Cas d'un ensemble de n charges ponctuelles	9
3.3. Cas d'une distribution continue de charges.....	10
4. Potentiel électrostatique.....	13
4.1. Travail de la force électrostatique et énergie potentielle.....	13
4.2. Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle	14
4.3. Potentiel électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles.....	14
4.4. Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges	14
5. Relation entre le champ et le potentiel	15
5.1. Circulation du vecteur champ électrique	15
5.1.1. définition	15
5.1.2. Circulation du champ électrique créé par une charge ponctuelle	15
5.2. Relation entre le champ et le potentiel.....	16
5.3. Application.....	17
6. Topographie de l'espace électrique	19
6.1. Lignes de champ	19
6.2. Surfaces équipotentiels	19
7. Energie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles.....	20
7.1. Cas de deux charges ponctuelles.....	20
7.2. Généralisation	21
8. Théorème de Gauss.....	22

8.1. Flux du champ électrique	22
8.1.1. Notion d'angle solide.....	22
8.1.2. Flux du champ électrique d'une charge ponctuelle à travers une surface ouverte.....	23
8.1.3. Flux du champ électrique d'une charge à travers une surface fermée.....	24
8.2. Théorème de Gauss.....	25
8.3. Forme locale du théorème de Gauss.....	26
CHAPITRE II : Conducteurs en équilibre	29
1. Equilibre électrostatique	29
1.1. Définitions	29
1.2. Propriétés des conducteurs en équilibre	29
1.3. Champ électrique au voisinage d'un conducteur : Théorème de Coulomb.....	30
1.4. Pression électrostatique.....	30
1.5. Pouvoir des pointes.....	31
1.6. Capacité propre d'un conducteur isolé.....	31
1.7. Energie potentielle d'un conducteur en équilibre	32
2. Phénomènes d'influence.....	32
2.1. Théorème des éléments correspondants.....	32
2.2. Phénomène d'influence électrostatique.....	33
2.2.1. Influence partielle.....	33
2.2.2. Influence totale	34
2.3. Notion d'écran électrostatique : cage de Faraday	34
3. Condensateurs.....	34
3.1. Définition.....	34
3.2. Capacité d'un condensateur.....	35
3.2.1 Définition.....	35
3.2.2. Calcul de la capacité d'un condensateur.....	35
3.3 Energie électrique d'un condensateur	37
3.4. Association de condensateurs.....	37
CHAPITRE III : Electrocinétique	40
1. Le courant électrique	40
1.1 Origine du courant électrique	40
1.2 Intensité du courant électrique.....	40
1.3. Densité de courant électrique.....	41
1.4. Mécanisme de passage du courant.....	41

2. Loi d'Ohm	42
2.1. Loi d'Ohm macroscopique : résistance	42
2.2. loi d'Ohm microscopique : Conductivité et résistivité	42
2.3. Influence de la température.....	43
2.4. Association de résistances.....	43
3. Loi de Joule	44
4. Circuits électriques en courant continu	45
4.1. Générateur et force électromotrice d'un générateur	45
4.2. Différence de potentiel aux bornes d'un générateur.....	46
4.3. Bilan énergétique	46
5. Récepteur et force contre-électromotrice	47
5.1. Définitions	47
5.2. Bilan énergétique et loi d'Ohm pour un récepteur.....	48
6. Analyse d'un réseau électrique - lois de Kirchhoff.....	48
6.1. Définitions	48
6.2. Lois de Kirchhoff	49
6.2.1. Lois des nœuds	49
6.2.2. Loi des mailles	49
6.3. Circuit comportant un récepteur de force contre-électromotrice (fcem)	49
Bibliographique	51

AVANT PROPOS

Ce cours d'électricité s'adresse particulièrement aux étudiants de première année qui préparent une licence dans le domaine des sciences et technologies et il est conforme au programme officiel du module : Physique 2.

Durant des décennies, d'innombrables rectifications sont apportées à la formulation du programme officiel du cours d'électricité, mais son contenu global reste inchangé.

Le contenu de ce cours est un outil indispensable et incontournable pour toutes les spécialités du domaine technologique.

En général, l'étudiant a déjà pris connaissance des lois exposées dans ce cours durant ses études secondaires. Toutefois l'aide d'un outil mathématique plus performant, tel que l'analyse vectorielle, lui permettra d'approfondir et de mieux assimiler son contenu.

Durant des années, nous nous sommes rendus compte des difficultés rencontrées par l'étudiant dans l'assimilation de ce cours et nous avons constamment tenu compte en essayant d'être de plus en plus simplistes et explicites notamment en introduisant le maximum d'exemples de calcul.

CHAPITRE I : Electrostatique

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques (immobiles) et leurs interactions (forces).

1. Notions générales

1.1. La charge électrique et phénomène d'électrisation

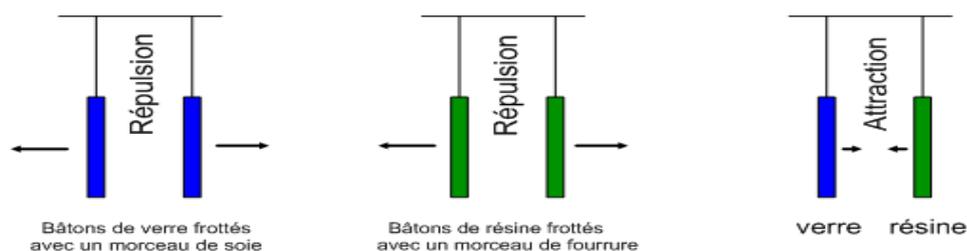
Tous le monde sait que lorsqu'on frotte un stylo ou peigne aux cheveux il attire des petits morceaux de papier. C'est le cas aussi pour certaines substances, comme l'ambre jaune quand on les frotte avec un drap sec, il acquière cette propriété surprenante d'attirer des particules légères comme des cendres, de petits bouts de papier, des poussières ...etc. Notons que les origines de l'électrostatique remontent à une époque très lointaine de l'humanité. C'est ainsi que Thalès de Milet (-625, -547), célèbre mathématicien dans l'histoire, découvre l'électrisation en constatant qu'un morceau d'ambre jaune frotté avec une peau de chat attire des morceaux de paille.

D'une manière générale l'électricité statique est obtenue par frottement ou par contact.

1.1.1. Electrification par frottement

Réalisons l'expérience suivante :

Frottons deux légers bâtons de verre avec un morceau de soie et deux légers bâtons de résine avec un morceau de fourrure. On remarque que les deux bâtons de verre se repoussent, et c'est le même comportement pour la résine. A présent, si nous rapprochons la résine au verre, on remarque qu'ils s'attirent.



Figures I.1 Répulsion et attraction entre corps électrisés

Les expériences précédentes nous amènent à conclure que ces matériaux ont acquis une nouvelle propriété appelée électricité (ou charge électrique) qui se manifeste par une interaction dite électrique et différente de l'interaction de gravitation. Cette interaction peut être attractive ou bien répulsive et ceci permet de suggérer l'existence de deux types d'électricité (charges électriques) qu'on définit de la manière suivante :

- Les corps électrisés qui se comportent comme le verre sont dits : chargés positivement ou porteurs d'électricité (charges) positive appelée aussi électricité vitreuse. Ces charges sont symbolisées par un signe (+).
- Les corps électrisés qui se comportent comme la résine sont dits : chargés négativement ou porteurs d'électricité (charges) négative appelée aussi électricité résineuse. Ce type d'électricité est représenté par le signe (-)

- Deux corps porteurs d'électricité (charges) de mêmes noms se repoussent

- Deux corps porteurs d'électricité (charges) de noms différents se repoussent

1.1.2. Electrification par contact

Une expérience simple peut être effectuée à l'aide de deux boules métalliques suspendues par des fils de nylon. La boule A étant préalablement électrisée par frottement ne réagit pas avec la boule B non électrisée (a). Si maintenant on les met en contact puis on les relâche, on constate que les deux boules se repoussent. On conclue que la boule B est électrisée, donc a pris une charge électrique qui ne peut venir que de la boule A. Ainsi, il s'est produit une électrisation de B par contact avec A.

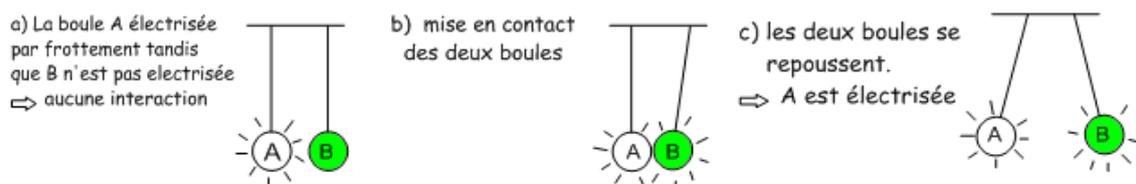


Figure I.2 Electrification par contact

Il existe un mécanisme très simple qui permet aussi de mettre en évidence ce phénomène : C'est l'électroscope à feuille. Il est constitué d'une tige métallique en liaison avec un plateau métallique (ou une boule) et muni à son extrémité inférieure de deux feuilles métalliques (souvent en or) très minces et légères, susceptibles de s'écarter l'une de l'autre sous l'action de forces répulsives. L'ensemble est placé dans une bouteille de verre.



Figure I.3 Electroscope

Propriétés :

- La charge d'un système est une grandeur extensive, c'est à dire qu'elle est la somme algébrique de toutes les charges qui le constituent.
- Du point de vue électrique, dans la nature, il existe 3 types de corps:
 - Corps électriquement neutre: le nombre de charges positives est égal au nombre de charges négatives.

- Corps électriquement positif: le nombre de charges positives est supérieur au nombre de charges négatives.
- Corps électriquement négatif: le nombre de charges positives est inférieur au nombre de charges négatives.
- La charge est une grandeur conservative. Dans un système isolé, il ne peut pas y avoir de création ou de destruction de charges. L'apparition de charges dans ce système ne peut être due qu'à l'extérieur. C'est le principe de conservation de la charge.

1.2. Interprétation - structure de la matière

Les propriétés électriques de la matière trouvent leur interprétation au niveau de l'atome. La matière est constituée, comme on le sait, de particules appelées atomes. Chaque atome neutre noté A_ZX est constitué d'un noyau (découvert en 1911 par Ernest Rutherford of Nelson 1871-1937), autour duquel gravite un nuage formé de Z électrons. Ces électrons se repoussent entre eux mais restent positionnés autour du noyau. Le noyau est constitué de Z protons, qui portent des charges positives, et de $N=A-Z$ neutrons qui sont dépourvus de charges (découverts en 1932 par James Chadwick 1891-1935). L'ensemble des particules qui forment le noyau s'appelle nucléons. Les électrons et les protons portent la même charge électrique en valeur absolue qu'on note par e . Cette charge électrique est appelée la charge élémentaire ou quanta de la charge électrique dont la valeur est:

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ [A.s = C]}$$

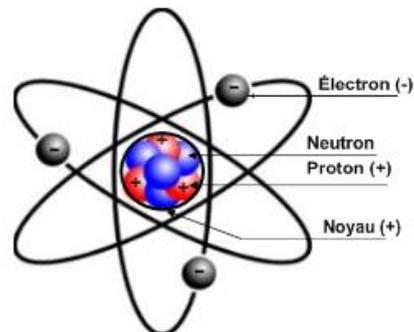
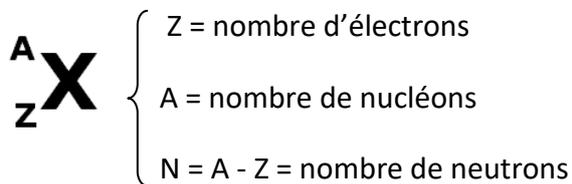


Figure I.4 Structure de l'atome

La force électrique qui s'exerce entre les protons, chargés positivement, et les électrons, chargés négativement, est responsable de la cohésion des atomes et des molécules. La charge totale des atomes non ionisés (c'est-à-dire qui n'ont ni perdu ni gagné d'électrons) est nulle.

Une charge électrique ne peut prendre n'importe quelle valeur. En effet chaque charge électrique est toujours un multiple entier de la charge élémentaire :

$$q = \pm n \cdot e \text{ [A.s = C]},$$

Ceci traduit le principe fondamental de la quantification de la charge électrique.

En réalité, l'étude poussée de la physique de hautes énergies a prouvé que les protons et les neutrons sont eux-mêmes constitués d'autres particules élémentaires appelées quarks portant une charge électrique fractionnaire. Cependant, et jusqu'à nos jours les chercheurs n'ont pas pu isoler ces particules qui portent une partie de la charge élémentaire. Citons deux types de quarks : $u = +\frac{2}{3} e$, $d = -\frac{1}{3} e$

Les électrons de l'atome sont constamment attirés par le noyau, mais les plus éloignés de ce dernier sont moins attirés et peuvent être arrachés à l'atome qui devient un ion positif. Inversement un atome neutre peut dans certaines conditions capturer un ou plusieurs électrons et devient un ion négatif. C'est le phénomène d'ionisation, qui s'explique par le transfert d'électrons.

Ainsi, la structure de la matière nous permet d'expliquer le phénomène d'électrisation des expériences précédentes. Ceci a lieu par arrachement mécanique des électrons quand il y'a frottement ou bien par simple passage de ces derniers d'un matériau à un autre quand il y'a contact.

Exemple: Calculer la charge électrique contenue dans 1mm^3 de cuivre en admettant que chaque atome de Cu contient un électron libre.

Données :

nombre d'Avogadro $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, masse volumique du cuivre $8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $Z=29$

1.3. Conducteurs et isolants

- Un matériau est dit **conducteur** si, lorsqu'il est électrisé, les porteurs de charges non compensés peuvent se déplacer librement dans tout le volume occupé par celui-ci.

- Un matériau est dit **isolant** (ou diélectrique) si, lorsqu'il est électrisé, les porteurs de charges non compensés ne peuvent se déplacer librement et restent localisés.

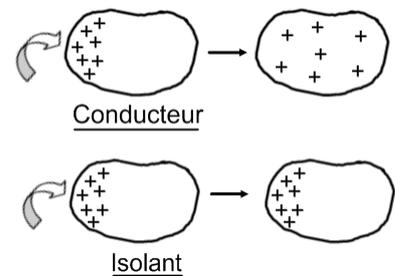


Figure I.5 : conducteur et isolant

Remarque : Si l'on prend une baguette métallique et on la frotte avec un chiffon, celle-ci n'attire pas les bouts de papier.

Pourquoi ? Simplement ceci est lié au fait que la baguette (conductrice), lorsqu'elle est électrisée, les charges acquises avec le frottement sont transférées dans le corps à travers la main et si l'on veut réussir l'expérience il faut électriser suffisamment la baguette et la tenir avec un isolant

2. l'interaction électrique : loi de Coulomb

Tous les processus physiques, chimiques ou biologiques connus peuvent être expliqués à l'aide de seulement quatre interactions (forces) fondamentales :

- **l'interaction gravitationnelle**, responsable de la pesanteur, assure la cohésion à grande échelle de l'Univers.
- **l'interaction électromagnétique**, responsable de l'électricité, du magnétisme, de la lumière et elle assure la cohésion de l'atome (noyau-électrons-quark).
- **l'interaction forte**, responsable de la cohésion proton-neutron des noyaux atomiques.

- **l'interaction faible**, responsable de cohésion des quarks et de la radioactivité β , qui permet au Soleil de briller.

Notons que l'utilisation du mot force est presque un abus de langage puisque celle-ci n'existe jamais toute seule et ce n'est qu'une partie d'une interaction.

Avant d'entamer l'étude de l'interaction électrique, nous allons rappeler la loi qui régit l'interaction gravitationnelle qui lui présente quelques similitudes.

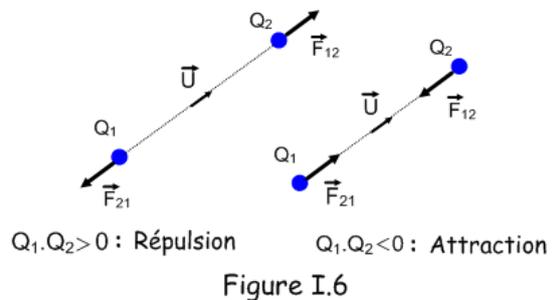
2.1. Définition

Une charge électrique est dite ponctuelle si les dimensions du corps qui la porte sont négligeables devant les distances considérées dans le problème.

2.2. Loi de Coulomb

Soit deux charges électriques ponctuelles Q_1 et Q_2 placées dans le vide à une distance r l'une de l'autre, au repos (ou en mouvement lent). Ces charges s'attirent ou se repoussent mutuellement avec une force \vec{F} tel que:

- ✓ F est radiale (dirigée suivant la droite joignant les 2 charges)
- ✓ Proportionnelle à Q_1
- ✓ Proportionnelle à Q_2
- ✓ Inversement proportionnelle à r^2



dont l'expression est donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \vec{u} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^3} \vec{r} = -\vec{F}_{21}$$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force \vec{F}_{21} exercée par Q_2 sur la charge Q_1 est égale et opposée à \vec{F}_{12} : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Son module est alors : $F_{12} = F_{21} = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$

Avec : \vec{u} - vecteur unitaire porté par la droite joignant les deux charges.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}\text{)}$$

Où ϵ_0 est la permittivité du vide (conste diélectrique), elle se mesure en farads par coulomb (F/C). Dans un milieu matériel autre que le vide, on a : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$ avec $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ où ϵ_r est la permittivité relative du milieu et ϵ_0 permittivité absolue du vide ($\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$).

Notons que, contrairement au cas de la gravitation universelle, la force Coulombienne n'est pas forcément une attraction et elle dépend du signe des deux charges tel que :

- si $Q_1 \cdot Q_2 > 0$ - la force est répulsive
- si $Q_1 \cdot Q_2 < 0$ - la force est attractive.

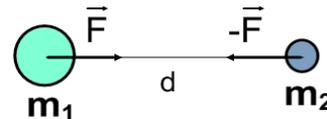
Remarques :

- La loi de Coulomb n'est valable que pour les charges immobiles ou en mouvement lent.
- La force Coulombienne obéit au principe de l'action et réaction.
- Cette loi a exactement les mêmes propriétés vectorielles que la loi de gravitation universelle.

2.3. Analogie avec l'interaction de gravitation

Deux corps de masse m_1 et m_2 , distants de d , s'attirent mutuellement par une force radiale dont le module est :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$



Où G est la constante de gravitation universelle donnée par $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$.

L'interaction de gravitation a la même formulation mathématique que la force électrostatique : elle est portée par la droite qui joint les masses m_1 et m_2 et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les deux masses mais elle est toujours attractive.

D'après le cours de mécanique du point, la force de gravitation joue un rôle fondamental dans la mécanique des objets macroscopiques et dans la dynamique céleste. Cependant, à l'échelle atomique et subatomique, la force de gravitation est **négligeable**.

Exemple 1 :

Comparez la force de gravitation qui s'exerce entre l'électron de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et le proton de masse $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ d'un atome d'hydrogène à la force électrostatique s'exerçant entre eux.

Solution :

Supposons que la distance entre les deux particules est r , alors

$$F_e = K \cdot \frac{e^2}{r^2} : \text{force électrostatique}, \quad F_G = G \cdot \frac{m_e m_p}{r^2} : \text{force gravitationnelle}$$

$$\text{Le rapport des deux forces nous donne : } \frac{F_e}{F_G} = \frac{K \cdot \frac{e^2}{r^2}}{G \cdot \frac{m_e m_p}{r^2}} = \frac{K \cdot e^2}{G \cdot m_e m_p} = 2,25 \cdot 10^{39}$$

$\Rightarrow F_e = 2,25 \cdot 10^{42} \cdot F_G$. On voit que la répulsion électrique est extrêmement élevée devant la force de gravitation de deux particules.

Exemple 2 :

Calculer la force de répulsion électrique entre deux charges de 1 C à 1 Km l'une de l'autre. Quelle masse subirait la même force dans le champ de gravitation ?

$$\text{Solution : } F_e = K \cdot \frac{Q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{(10^3)^2} = 9 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Si g est l'accélération de la pesanteur, la masse m qui subirait la même force serait tel que :

$$F_e = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{F_e}{g} \approx 10^3 \text{ Kg}$$

Cette force est l'équivalent du poids d'une masse d'une tonne. Une charge de 1 C est donc énorme.

2.4. Principe de superposition

Considérons n charges ponctuelles q_1, q_2, \dots, q_n dans le voisinage d'une charge Q .

Quelle est la force F que subit la charge Q placée en présence des charges q_1 et q_2 ?

La loi de Coulomb permet de calculer la force \vec{F}_1 subie par la charge Q lorsqu'elle est uniquement en présence de q_1 . On peut de la même manière calculer la force \vec{F}_2 subie par Q lorsque seule q_2 est en sa présence.

L'expérience montre que la force \vec{F} subie par Q lorsqu'elle est en présence des deux charges q_1 et q_2 est la somme vectorielle des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . Ce résultat est vérifié quel que soit le nombre de charges présentes. Autrement dit, un ensemble de n charges q_i situées à la distance r_i d'une charge Q qui exerceraient séparément des forces \vec{F}_i sur celle-ci :

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$$

peut être remplacée par une seule force qui est la résultante de celles-ci dont l'expression est :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$$

Ceci exprime le principe de superposition. Ce principe étant déduit des observations expérimentales (sans démonstration) peut s'énoncer ainsi :

La force avec laquelle interagissent deux charges électriques n'est pas affectée par la présence d'une troisième charge.

Application :

Soient 4 charges ponctuelles $Q_1 = 1\text{C}$, $Q_2 = 2Q_1$, $Q_3 = -3Q_1$ et $Q_4 = 4Q_1$ se trouvant aux sommets d'un rectangle de cotés $a = 4 \text{ m}$ et $b = 3 \text{ m}$.

Trouvez la direction et la grandeur de la force exercée sur la charge Q_1 par les 3 charges;

Pour résoudre les exercices de ce type, on doit suivre les étapes suivantes:

- On mentionne d'abord le signe de chaque charge.
- On trace les vecteurs forces en respectant la loi de Coulomb.
- On calcule le module de chaque force.
- On choisit un repère (xOy).

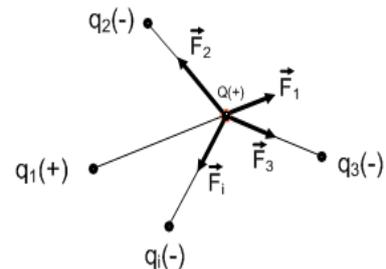


Figure I.7

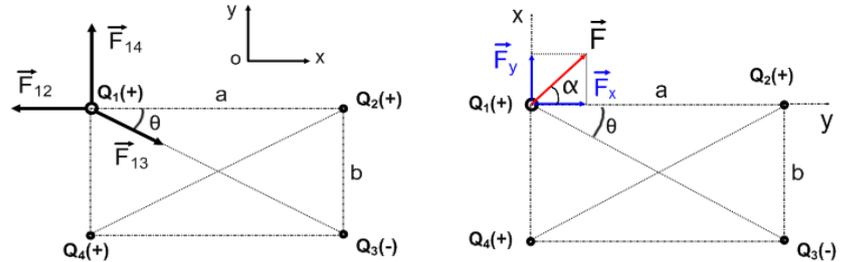
- On calcule les projections de cette force (force résultante) sur les axes Ox et Oy.
- On calcule le module de la force résultante.

Les modules des forces :

$$F_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{a^2} = \frac{9}{16} \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$F_{13} = k \frac{Q_1 Q_3}{a^2 + b^2} = \frac{27}{25} \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$F_{14} = k \frac{Q_1 Q_4}{b^2} = 4 \cdot 10^9 \text{ N}$$



Figures I.8

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$

$$F_x = F_{13} \cos\theta - F_{12} = \left(\frac{27}{25} \frac{4}{\sqrt{25}} - \frac{9}{16} \right) 10^9 \text{ N} = 0,864 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$F_y = F_{14} - F_{13} \sin\theta = \left(4 - \frac{27}{25} \frac{3}{5} \right) 10^9 \text{ N} = 3,352 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Calcul de la force résultante ainsi que sa direction:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10^{10} \sqrt{8,64^2 + 33,52^2} = 34,61 \cdot 10^{10} \text{ N}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{F_x}{F_y} = 3,87 \quad \text{Soit } \alpha = 75,5^\circ$$

3. Champ électrostatique dans le vide

3.1. Cas d'une charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle immobile Q dans le vide. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que toute autre charge ponctuelle q placée dans le voisinage de Q à une distance r subit une force d'expression :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{u} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u} \right) q$$

La quantité entre parenthèses $\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u} \right)$ qui ne dépend que de Q (non de q) peut ainsi caractériser l'état électrique de chaque point M de l'espace aux alentours de la charge Q. On l'appelle champ électrique et on le note :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Ainsi on peut réécrire l'expression de la force par :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

qui est la force subie par la charge q en un point où règne un champ électrique d'intensité E.

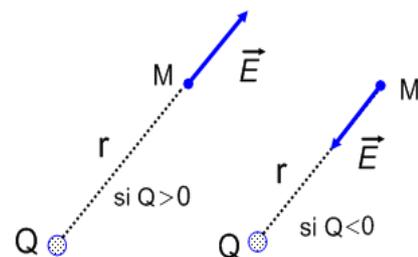


Figure I.9 : Champ créé par une charge ponctuelle

Remarque : D'après les expressions précédentes, il en découle que le champ électrique en un point est identique à la force qui s'exerce sur une charge positive unité placée en ce point.

$$[F] = N, [q] = C \Rightarrow [E] = \frac{N}{C} \text{ ou } \frac{V}{m}$$

Propriétés :

- \vec{E} est porté par la droite joignant la charge et le point M.
- \vec{E} est dirigé : vers la charge si Q est négative, vers l'extérieur si Q est positive.
- \vec{E} a une portée infinie.
- \vec{E} n'est pas défini en $r=0$ (car dans la pratique il n'existe pas de charge ponctuelle).

3.2. Cas d'un ensemble de n charges ponctuelles

Soient n particules de charge Q_i , situées aux points P_i . Quel est le champ créé par ces charges en un point M de l'espace?

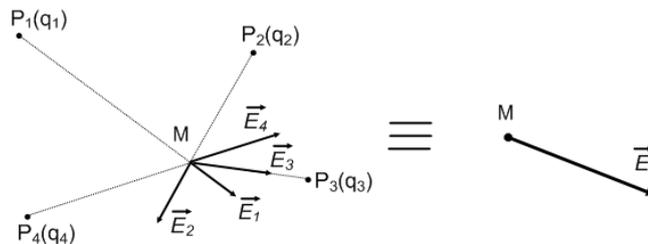


Figure I.10 : Champ créé par un ensemble de charges ponctuelles

Plaçons une charge Q au point M et calculons la force $\vec{F}(Q)$ qui agirait sur elle. D'après le principe de superposition on aura :

$$\vec{F}(Q) = \sum_{i=1}^n \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i = Q \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Or on sait que la force exercée en un point sur une charge est le produit de cette charge par le vecteur champ qui règne en ce point : $\vec{F}(Q) = Q \cdot \vec{E}(M)$. On déduit alors l'expression du champ créé par un ensemble discret de charges.

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

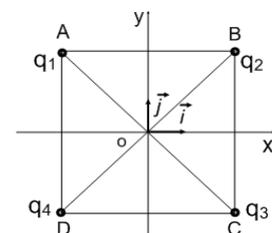
Ceci exprime encore une fois le principe de superposition des effets électrostatiques.

Exemple : On place quatre charges ponctuelles aux sommets d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O, origine d'un repère orthonormé

Oxy de vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} .

On donne : $q_1 = q = 10^{-8}$ C, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$, $q_4 = -q$.

Déterminer le champ électrique en O $\vec{E}(O)$.



$$\vec{E}(o) = \vec{E}(q_1) + \vec{E}(q_2) + \vec{E}(q_3) + \vec{E}(q_4)$$

$$\vec{E}(q_i) = k \frac{q_i}{r_i} \vec{u}_i$$

$$\vec{E}(q_1) = k \frac{|q_1|}{OA^3} \vec{OA} = k \frac{q}{OA^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E}(q_2) = -k \frac{|q_2|}{OB^3} \vec{OB} = k \frac{2q}{OB^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E}(q_3) = -k \frac{|q_3|}{OC^3} \vec{OC} = k \frac{2q}{OC^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{E}(q_4) = k \frac{|q_4|}{OD^3} \vec{OD} = k \frac{q}{OD^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right)$$

On a $OA = OC = OB = OD = a\sqrt{2}/2$, et en faisant la somme on obtient :

$$\vec{E}(o) = k \frac{q}{a^2} (2\sqrt{2}) \vec{j}$$

A.N.: $\vec{E}(o) = 180\sqrt{2} \vec{j}$ (V/m)

3.3. Cas d'une distribution continue de charges

Dans la pratique l'expression du paragraphe précédent est rarement utilisée, puisque dans la plupart des cas nous étudions des matériaux qui contiennent un nombre gigantesque de particules (charges). Nous dirons que ces matériaux forment des distributions continues de charges.

Ainsi, pour calculer le champ créé en un point M par une distribution continue de charges, on calcule le champ créé en M par un élément de charge dq (dq est considérée comme une charge ponctuelle) puis on fait la somme sur tout le matériau.

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{u}$$

La somme étant presque infinie, on la remplace alors par une intégrale, soit :

$$\vec{E}(M) = \int_{charge} d\vec{E} = \int_{charge} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{u}$$

La charge étant répartie dans l'espace occupé par le matériau, et la distribution est faite soit sur un volume, une surface ou une ligne. Pour les différencier on définit la densité spatiale de charges. Ainsi l'expression du vecteur champ électrique prend la forme spécifique pour chaque cas :

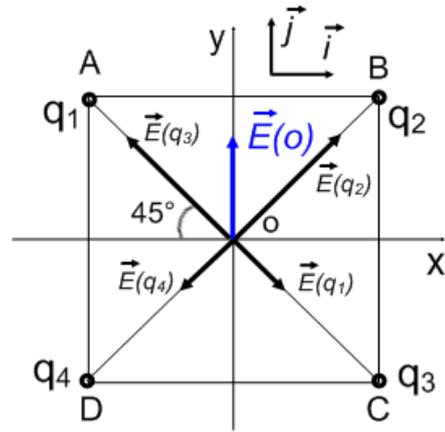


Figure I.11

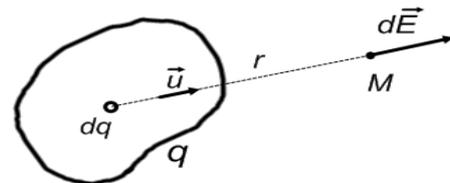


Figure I.12

a) Distribution volumique : $\rho = \frac{dq}{dv}$: densité volumique de charge en C/m³

$$\vec{E}(M) = \iiint_{\text{volume}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r^2} \vec{u} dv$$

b) Distribution surfacique : $\sigma = \frac{dq}{ds}$: densité surfacique de charge en C/m²

$$\vec{E}(M) = \iint_{\text{surface}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} \vec{u} ds$$

b) Distribution linéique : $\lambda = \frac{dq}{dl}$: densité linéique de charge en C/m

$$\vec{E}(M) = \int_{\text{longueur}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \vec{u} dl$$

Exemple : Champ créé par un segment chargé

Considérons un segment AB de longueur 2l coïncidant avec l'axe Oy uniformément chargé avec une densité linéique λ positive constante. Calculons directement le champ créé en tout point M de la médiatrice de AB. La distance OM sera notée a.

Prenons un élément de fil de longueur dl centré en P à la distance l de O. Celui-ci porte une charge $dq = \lambda$ et crée au point M un champ $d\vec{E}$ tel que :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{PM^3} \cdot \overrightarrow{PM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Avec $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ vecteur unitaire.

sachant que $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$. Le champ résultant s'obtient en intégrant l'expression précédente

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \vec{u} = \int_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \\ &= \int_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \cos \theta \vec{i} - \int_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \sin \theta \vec{j} \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int_l d\vec{E} = \int_l dE_x \vec{i} + \int_l dE_y \vec{j} = \left(\int_l dE_x \right) \vec{i} + \left(\int_l dE_y \right) \vec{j} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} \\ &= \vec{E}_x + \vec{E}_y \end{aligned}$$

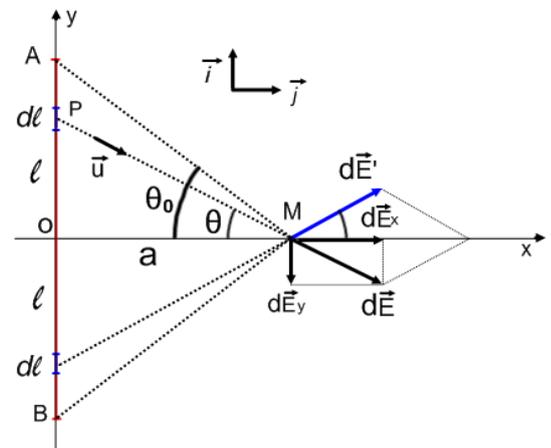


Figure I.13

Avec :
$$E_x = \int_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \cos \theta \quad \text{et} \quad E_y = - \int_l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \sin \theta$$

Si l'on opère un changement de variable, le calcul se ramène à une simple intégrale.

D'après le schéma on a : $l = y, dl = dy, r = \frac{a}{\cos \theta},$

$$l = y = a \tan \theta \Rightarrow dl = dy = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Sachant que pour décrire tout le segment : $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ ce qui correspond à $-l \leq y \leq +l,$ on obtient après réarrangement :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{a} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \sin \theta_0 \\ E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{a} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} -\sin \theta d\theta = 0 \end{array} \right.$$

Si on remplace $\sin \theta_0$ par son expression en fonction des données du problème

$\sin \theta_0 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}},$ On obtient :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}} \vec{i}$$

Remarque : Le résultat $\vec{E}_y = \vec{0},$ autrement dit le champ total est porté par l'axe OX, était prévisible à cause de la symétrie du problème. En effet, à chaque élément dl à la distance l au-dessus de O, correspond un élément dl au-dessous de O à la même distance. L'addition vectorielle des champs créés par des éléments symétriques deux à deux donne une résultante dont la composante parallèle au fil est nulle. Seule la composante parallèle à OM et perpendiculaire au fil est différente de zéro.

Cas d'un fil infini uniformément chargé :

Il suffit de changer les bornes d'intégration $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ par $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{i}$$

Exemple 2: Champ créé par un disque chargé

Calculez le champ électrostatique créé par un disque conducteur de rayon R chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$ en un point M situé sur son axe à une distance z. En déduire le champ créé par un plan infini uniformément chargé à distance z.

Un élément de surface dS centré en P crée en M un champ

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{\|\vec{PM}\|^2} \vec{u}$$

Par raisons de symétrie, la seule composante non nulle de ce champ est $dE_z.$

$$dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$$

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{k\sigma r dr d\theta}{r^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$E_z = k\sigma z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = 2\pi k\sigma z \cdot \frac{1}{2} \int_0^R (r^2 + z^2)^{-3/2} \cdot d(r^2 + z^2)$$

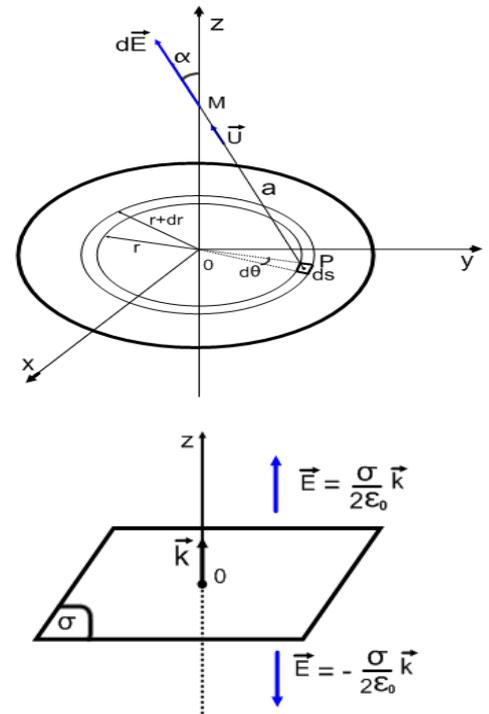
$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{k}$$

Pour un plan infini il suffit de faire tendre R vers l'infini, alors deux cas se présentent

- Si $z > 0$: $\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$
- Si $z < 0$: $\vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$

On voit que le vecteur champ est porté par l'axe OZ et sa valeur est indépendante de z .

Remarquons la discontinuité de \vec{E} à la traversée du plan chargé.



Figures I.14

4. Potentiel électrostatique

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le calcul du champ électrique peut s'avérer très lourd et ceci en raison de sa nature vectorielle. Dans ce qui suit, nous allons essayer d'introduire une nouvelle grandeur avec laquelle on pourra caractériser l'état électrique d'un milieu, mais cette fois avec un champ scalaire qu'on appellera : potentiel électrostatique. Plus loin nous établirons le lien entre les deux champs.

4.1. Travail de la force électrostatique et énergie potentielle

Soit une charge Q fixe. Calculons le travail qu'on doit fournir pour amener une autre charge q d'un point A à un point B en suivant le chemin (C) .

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \text{avec} \quad \vec{F} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

$$\text{Soit } W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{u} \cdot d\vec{l}}{r^2} \quad \text{et puisque } \vec{u} \cdot d\vec{l} = dr$$

$$W_{A \rightarrow B} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

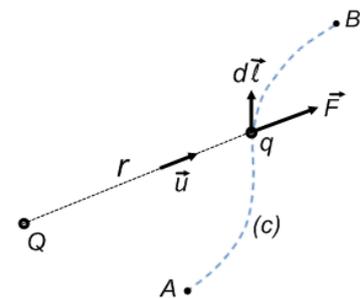


Figure I.15

On remarque que $W_{A \rightarrow B}$ ne dépend pas du chemin suivi, autrement dit la force \vec{F} est conservative.

Le travail de \vec{F} peut alors s'écrire comme une variation d'énergie potentielle :

$W = -\Delta U$ ou bien $W = U_A - U_B$. Avec :

$$U = U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r} + Cte$$

C'est l'énergie potentielle de la charge q en présence de la charge Q au repos située à une distance r .

4.2. Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle Q immobile. Toute autre charge q placée au voisinage de Q possède une énergie potentielle $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r} + Cte$. Chaque point M de l'espace dans le voisinage de Q peut être caractérisé par une grandeur scalaire V appelée : potentiel électrostatique défini par :

$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C$ - avec C est une constante. C'est un champ de scalaires induit par la charge Q .

L'énergie potentielle de la charge q dans le champ de Q s'écrit alors : $U(r) = q V(r)$

On peut ainsi dire que le potentiel créé en un point de l'espace est égal à l'énergie potentielle d'une charge positive unité placée en ce point. Unités : J/C (Joule/Coulomb) = V (Volt)

Notons que le potentiel électrostatique est toujours défini à une constante près que l'on peut choisir arbitrairement. On adopte généralement la convention que V est nul à l'infini. On a alors $K=0$.

Cette convention peut être inadaptée lorsque la distribution de charges n'est pas bornée (c.-à-d. s'il y a des charges jusqu'à l'infini), par exemple pour un plan infini uniformément chargé. Notons aussi que ce choix n'est pas le seul possible et suivant le type de situation, on prend la constante qui nous permet de simplifier les calculs.

4.3. Potentiel électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

En utilisant le principe de superposition, le potentiel électrique en un point M généré par n charges est la somme des potentiels créés par chacune des charges :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} + C$$

4.4. Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

Pour une distribution de charges continue, il faut suivre la même procédure que pour le champ électrostatique. Pour déterminer le potentiel électrostatique en un point, il faut sommer le potentiel créé par toutes les contributions élémentaires, c'est-à-dire intégrer sur l'ensemble de la distribution de charges. Si l'élément de charge dq crée

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \text{ il s'en suit : } V(M) = \int_{\text{distribution charge}} dV$$

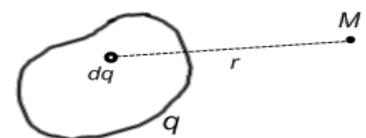


Figure I.16

Suivant le type de distribution de charge : volumique, surfacique ou linéique (figure I.16), le potentiel électrostatique en un point de l'espace s'écrit:

$$\text{Distribution linéique} \Rightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{longueur}} \frac{\lambda dl}{r} + K$$

$$\text{Distribution surfacique} \Rightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{surface}} \frac{\sigma dS}{r} + K$$

$$\text{Distribution volumique} \Rightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{volume}} \frac{\rho dV}{r} + K$$

5. Relation entre le champ et le potentiel

Les propriétés électrostatiques de l'espace peuvent être représentées soit par un champ de vecteurs $\vec{E}(x, y, z)$ soit par un champ de scalaires $V(x, y, z)$ qui sont tout les deux l'expression d'un même phénomène physique. Cherchons alors une relation entre ces deux grandeurs.

5.1. Circulation du vecteur champ électrique

5.1.1. définition

La circulation Γ d'un champ de vecteurs \vec{V} le long d'une courbe (C) est le scalaire

$$\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad \text{Avec } d\vec{l} : \text{vecteur déplacement élémentaire.}$$

Lorsque le circuit est fermé elle s'écrit : $\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$

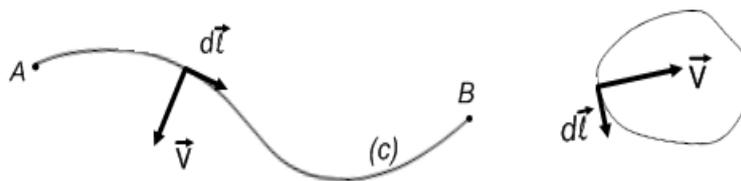


Figure I.17

5.1.2. Circulation du champ électrique créé par une charge ponctuelle

Le champ créé au point M par la charge q fixée à l'origine des axes est donné en coordonnées sphériques par :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

En coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire est :

$$d\vec{l} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

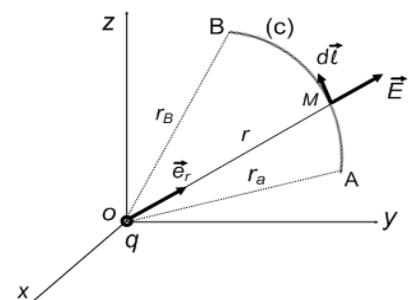


Figure I.18

On a $d\Gamma = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(-\frac{1}{r}\right)$

La circulation du champ électrique le long de (c) est donnée par :

$$\Gamma = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B d\left(-\frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \quad \text{puisque } \vec{e}_r \cdot d\vec{l} = dr$$

On voit que la circulation Γ est indépendante du chemin suivi ; on dit qu'elle est conservative.

5.2. Relation entre le champ et le potentiel

On a $d\Gamma = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dr = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\right)$

Or $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = V$, On déduit que : $d\Gamma = \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$ Soit : $dV = -d\Gamma = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Relation très importante entre le champ et le potentiel qui signifie que pour un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ dans une région où règne un champ \vec{E} le potentiel varie de dV .

On sait qu'en coordonnées cartésiennes : $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ et $d\vec{l}(dx, dy, dz)$, soit :

$$dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz.$$

D'autre part, la différentielle totale de la fonction $V(x, y, z)$ s'écrit :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

On obtient par identification :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Relations qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Relation qui signifie que Le champ électrostatique \vec{E} dérive du potentiel scalaire V .

En chaque point de l'espace, le gradient du potentiel $\overrightarrow{\nabla}V$ indique la direction dans laquelle V croît le plus rapidement. Ainsi en chaque point de l'espace, \vec{E} est dirigé dans la direction de la plus forte décroissance du potentiel. En d'autres termes, le champ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Ainsi, la connaissance du potentiel permet d'accéder à la connaissance du champ et inversement. Mais en général, il est plus simple de déterminer le potentiel qui est une fonction scalaire et ensuite, de calculer les composantes du champ par dérivation.

Remarque : Relation entre le champ et le potentiel en coordonnées :

- Cylindriques : $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z\right)$

- Sphériques : $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi\right)$

5.3. Application : Le dipôle électrique

Définitions :

- On appelle dipôle électrique l'ensemble de 2 charges électriques ponctuelles égales et opposées (+q et -q) séparées par une distance fixe AB=a

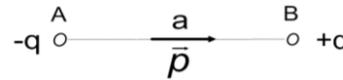
- On appelle moment du dipôle (moment dipolaire)

la grandeur vectorielle : $\vec{p} = q \cdot \vec{AB} = q \cdot \vec{a}$

Le vecteur moment dipolaire est une grandeur caractéristique

du dipôle et il est toujours dirigée de la charge négative (-) vers la charge positive (+).

Exemple : Molécules HCl , CO , H₂O , CO₂



Potentiel créé par un dipôle à grande distance :

Soit un dipôle constitué de 2 charges (+q et -q) séparées par une distance a. Calculons le potentiel électrostatique créé par ce dipôle en un point M éloigné de l'espace. On a :

$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{a} \\ OM = r \\ (\vec{OM}, \vec{OB}) = \theta \end{cases}$$

$$V(M) = V(-q) + V(q) = -\frac{kq}{r_2} + \frac{kq}{r_1} + C,$$

Si $V(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0$ soit $V(M) = kq \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$

Lorsque le point M est très éloigné du dipôle ($r \gg a$)

on peut faire les approximations suivantes:

$$r_2 - r_1 = a \cos \theta \quad \text{et} \quad r_2 \cdot r_1 = r^2$$

On obtient finalement:

$$V(M) = V(r, \theta) = K \frac{q a \cos \theta}{r^2} = K \frac{p \cos \theta}{r^2} = K \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

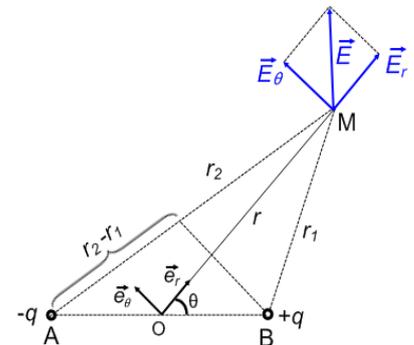


Figure I.19 : Le dipôle électrique

Champ créé par un dipôle à grande distance :

Pour calculer le champ électrostatique, il nous suffit maintenant d'utiliser la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \text{ en coordonnées polaires } \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta\right) = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(K \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{2Kp \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K \frac{p \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{Kp \sin \theta}{r^3} \end{pmatrix}$$

Le module de ce champ sera : $\|\vec{E}\| = \frac{Kp}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$

On remarque que le potentiel et le champ d'un dipôle décroissent plus vite (en $1/r^3$) que dans le cas d'une seule charge ponctuelle (en $1/r^2$).

Exemple : Potentiel créé par un disque uniformément chargé avec une densité superficielle $\sigma > 0$ en un point de son axe.

Soit un disque de centre O, de rayon R, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$ (figure 12). Calculer le potentiel $V(M)$ créé par cette distribution de charges en un point M de l'axe zz' du disque. En déduire l'expression du champ $\vec{E}(M)$.

Solution :

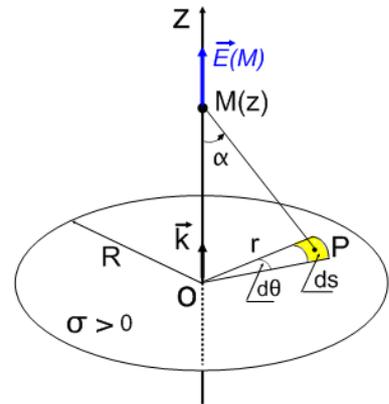
Prenons l'élément de surface dS compris entre deux rayons r décalés d'un angle $d\theta$. Cet élément porte la charge $dq = \sigma dS$ et crée au point M un potentiel qui s'écrit :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|}$$

Sachant que : $dS = r dr d\theta$ et $\|\vec{PM}\| = \sqrt{r^2 + z^2}$

Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}}$$



Figures I.20

Le potentiel $V(M)$ sera obtenu par intégration sur toute la surface du disque :

$$V(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [(r^2 + z^2)^{1/2}]_{r=0}^{r=R}$$

Soit

$$V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [(R^2 + z^2)^{1/2} - |z|] = V(z)$$

On remarque que $V(z) = V(-z)$

Du potentiel on déduit l'expression du champ électrique tel que $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dz} \vec{k}$

Soit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k}$$

On peut maintenant tracer les courbes de variation du potentiel et du champ en fonction de z

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + R^2} - z] \quad \text{si } z > 0$$

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \quad \text{si } z = 0$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{z^2 + R^2} + z] \quad \text{si } z < 0$$

La fonction $V(z)$ est continue en traversant la surface

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad \text{si } z > 0$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{si } z \rightarrow 0^+ \quad \text{et} \quad E(z) \rightarrow 0 \quad \text{si } z \rightarrow +\infty$$

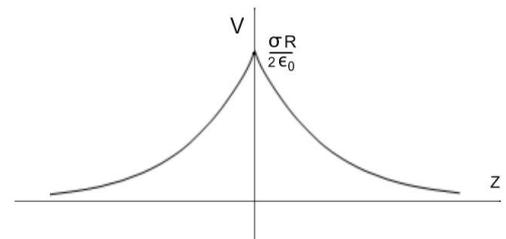


Fig.I.21 : Courbe de variation $V(z)$

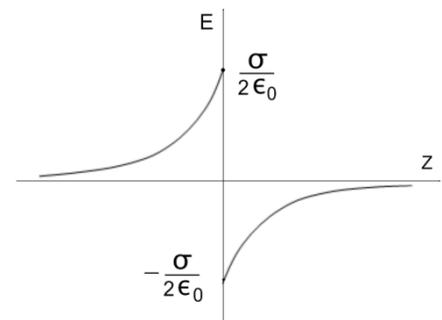


Fig.I.22 : Courbe de variation $E(z)$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad \text{si } z < 0$$

$$E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{si } z \rightarrow 0^- \quad \text{et } E(z) \rightarrow 0 \quad \text{si } z \rightarrow -\infty$$

Pour un plan infini, il suffit de faire tendre R vers l'infini.

Pour $z > 0$, si $R \rightarrow \infty$: $E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = cste$ et puisque $dV = -Edz$

$$\Rightarrow V(z) = \int -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz + cte$$

$V(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + cte$ qui est une fonction de z.

De même pour $z < 0$, on obtient $E(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = cste$ et $V(z) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + cte$

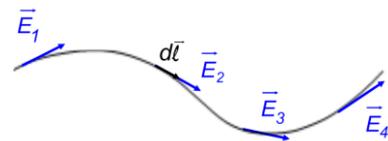
6. Topographie de l'espace électrique

6.1. Lignes de champ

Une ligne de champ est une courbe imaginaire telle qu'en chacun de ses points le champ électrique est y tangent.

Pour tracer convenablement les lignes de champ certaines règles s'imposent:

- Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.
- Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge $-3q$ produit 3 fois plus de lignes qu'en absorbe une charge $+q$).
- Les lignes de champ ne se croisent pas.



Considérons un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ le long d'une ligne de champ électrostatique.

Le fait que le champ \vec{E} soit tangent en tout point de la courbe se traduit par : $\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$. La résolution de cette équation nous permet d'obtenir les équations des lignes de champ, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} : \quad \text{en coordonnées cartésiennes} \\ \frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z} : \quad \text{en coordonnées cylindriques} \\ \frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi} : \quad \text{en coordonnées sphériques} \end{array} \right.$$

6.2. Surfaces équipotentielles

C'est l'ensemble des points de l'espace pour lesquels le potentiel V est constant. Par exemple pour une charge ponctuelle q, $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C = cste$. La résolution nous donne : $r = cste$ qui correspond à des sphères concentriques centrées en q.

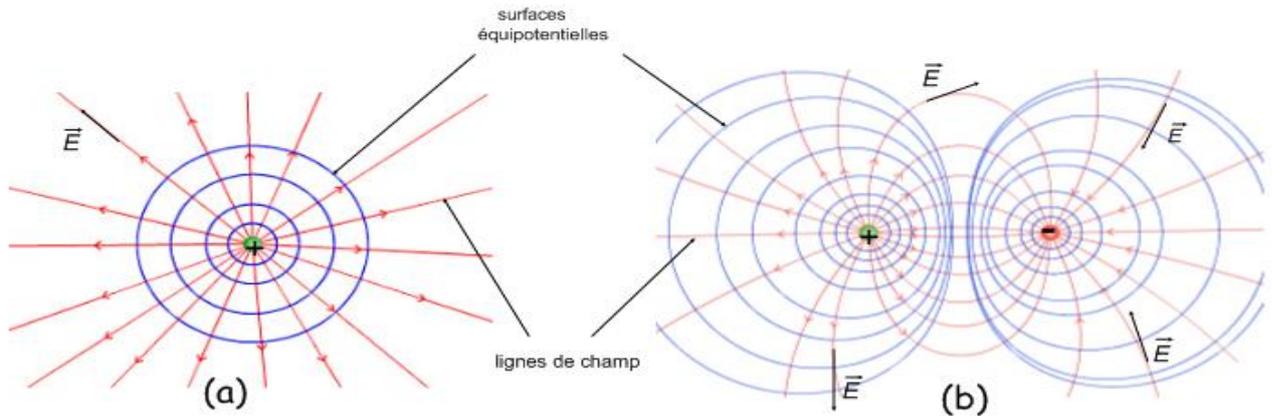


Figure I.23: Lignes de champ et surfaces équipotentielles
 a) d'une charge ponctuelle positive
 b) de deux charges ponctuelles opposées.

Propriétés :

- Le potentiel est décroissant le long d'une ligne de champ.

Pour un déplacement effectué dans le sens de la ligne de champ

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\|\vec{E}\| \|d\vec{l}\| < 0$$

$dV < 0 \Rightarrow V$ est décroissant

- Les lignes de champ sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

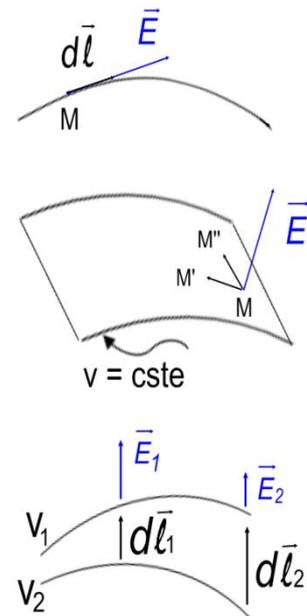
On a $dV = 0$ si $V = cste$.

Alors un déplacement quelconque $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$ ou $\overrightarrow{MM''}$ nous donne $dV = -\vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$

- Les surfaces équipotentielles se resserrent lorsqu'on passe d'une région où le champ est faible à une région de champ intense.

$$\left. \begin{aligned} dV &= -\vec{E}_1 d\vec{l}_1 \\ &= -\vec{E}_2 d\vec{l}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_1 dl_1 = E_2 dl_2 = cste$$

Soit, si $E_1 > E_2$ alors $dl_1 < dl_2$



7. Energie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles

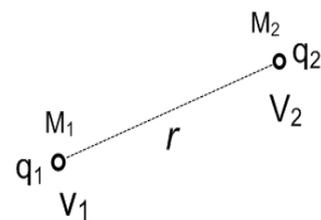
7.1. Cas de deux charges ponctuelles

Soit q_1 une charge placée en M_1 sous l'action d'un potentiel V_1 créé par la charge q_2 placée au point M_2 de la figure ci-contre.

L'énergie potentielle de q_1 est :

$$U_P = q_1 V_1 = q_1 \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = q_2 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = q_2 V_2$$

Avec $V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$: potentiel créé par q_1 en M_2 .



C'est aussi l'énergie potentielle de la charge q_2 .

Nous choisissons donc d'écrire cette expression sous forme :

$$U_P = q_1 V_1 = q_2 V_2 = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

On dira que c'est l'énergie potentielle électrique du système formé par les deux charges q_1 et q_2 .

7. 2. Généralisation

1) Distribution discrète :

Le cas précédent peut aisément se généraliser à une distribution discrète de n charges. Ainsi, si on choisit une charge q_i située au point M_i sous l'action du potentiel V_i créé par toutes les autres charges (sauf q_i), son énergie potentielle est : $U_{P_i} = q_i V_i$.

Pour l'ensemble des charges, l'énergie potentielle électrostatique sera : $U_P = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$

2) Distribution continue :

On isole une charge élémentaire dq autour d'un point P quelconque de la distribution et si on désigne par $V(P)$ le potentiel en ce point, l'énergie potentielle de la charge dq sera :

$$dU_P = \frac{1}{2} V(P) dq$$

En effectuant la sommation sur toute la distribution on obtient :

$$U_P = \frac{1}{2} \int_{charge} V(P) dq$$

L'intégrale sera simple, double ou triple suivant que la distribution de charge est linéique, surfacique ou volumique, respectivement.

7.3. Application : Dipôle électrique placé dans un champ électrique

Prenons le dipôle étudié précédemment et plaçons le dans un champ électrique uniforme \vec{E}_0 .

Les charge $(-q)$ et $(+q)$ sont soumises respectivement aux forces $\vec{F}_A = -q\vec{E}_0$ et $\vec{F}_B = +q\vec{E}_0$ et leur résultante $\vec{F}_A + \vec{F}_B$ est nulle. Leurs actions se réduisent à un couple de forces dont le moment par rapport à O est :

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{F}_A)_{/O} + \vec{M}(\vec{F}_B)_{/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B$$

$$\text{Soit } \vec{M} = -\vec{OA} \wedge (q\vec{E}_0) + \vec{OB} \wedge (q\vec{E}_0) = (-\vec{OA} + \vec{OB}) \wedge q\vec{E}_0 \\ = q \cdot \vec{AB} \wedge \vec{E}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

On voit que le couple de forces tend à aligner le dipôle parallèlement au champ de sorte que $\vec{M} = \vec{0}$.

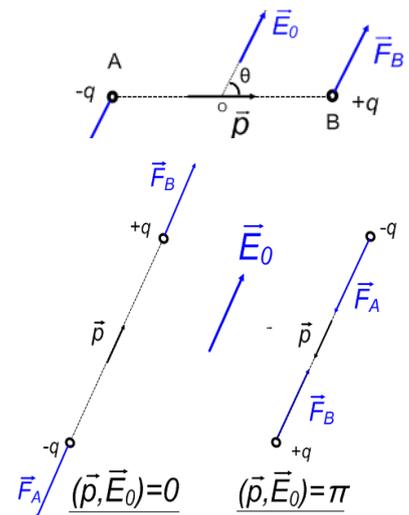


Figure I.24 : Equilibre du dipôle

Soit $(\vec{p}, \vec{E}_0) = 0$ ou $(\vec{p}, \vec{E}_0) = \pi$ qui correspondent à des positions d'équilibre.

Energie potentielle du dipôle dans le champ \vec{E}_0 :

$$\text{On a } U_P = \sum U_{P_i} = -qV_A + qV_B = q(V_B - V_A)$$

C'est l'expression de l'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il est placé dans le champ \vec{E}_0 qui lui-même dérive d'un potentiel V (soit V_A en A et V_B en B).

Or on a $dV = -\vec{E}_0 \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_A^B dV = \int_A^B -\vec{E}_0 \cdot d\vec{l}$ et puisque $\vec{E}_0 = \overrightarrow{cste}$, on obtient par intégration :

$$V_B - V_A = -\vec{E}_0 \int_A^B d\vec{l} = -\vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Ce qui nous donne $U_p = -q\vec{E}_0 \cdot \overrightarrow{AB} = -\vec{E}_0 \cdot \vec{p} = -E_0 \cdot p \cdot \cos \theta$ Avec $\theta = (\vec{E}_0, \vec{p})$

Cette expression représente l'énergie d'interaction du dipôle associée au champ \vec{E}_0 et n'a rien à voir avec l'énergie interne du dipôle (énergie nécessaire pour amener une charge de l'infini à une distance r de l'autre). Nous retrouvons les positions d'équilibre :

- Pour $(\vec{E}_0, \vec{p}) = 0$ (\vec{p} a le même sens que \vec{E}_0) et $U_p = -E_0 \cdot p$

L'énergie potentielle est minimale et l'équilibre est dit stable.

- Pour $(\vec{E}_0, \vec{p}) = \pi$ (\vec{p} est antiparallèle à \vec{E}_0) et $U_p = E_0 \cdot p$

L'énergie potentielle est maximale et l'équilibre est dit instable.

En conclusion, un dipôle placé dans un champ électrique est soumis à un couple de forces qui l'amène à une position d'équilibre souvent stable, autrement dit, si cet équilibre est instable il suffit de l'écartier légèrement de cette position pour que le dipôle tourne vers sa position d'équilibre stable.

8. Théorème de Gauss

8.1. Flux du champ électrique

8.1.1. Notion d'angle solide

Avant d'aborder la notion d'angle solide, nous allons d'abord rappeler qu'une surface est représentée par un vecteur $d\vec{S}$ perpendiculaire à cette surface et dont le module est égal à l'aire de cette surface tel

que $d\vec{S} = dS \vec{u}$, avec \vec{u} vecteur unitaire perpendiculaire à cette surface dS .

La notion d'angle solide est une extension dans l'espace de l'angle défini dans le plan. Comme exemple on peut citer le cône de lumière construit par l'ensemble des rayons lumineux d'une torche.

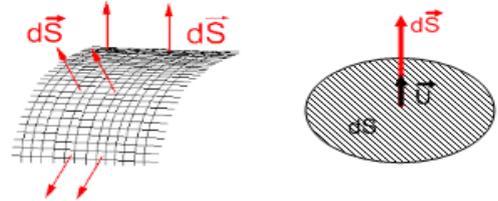


Figure I.25 : Vecteur surface

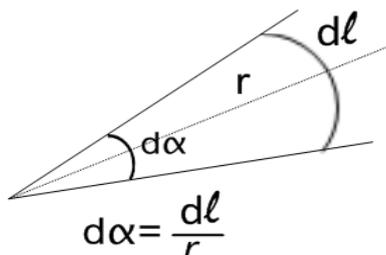


Figure I.26 : Angle plan

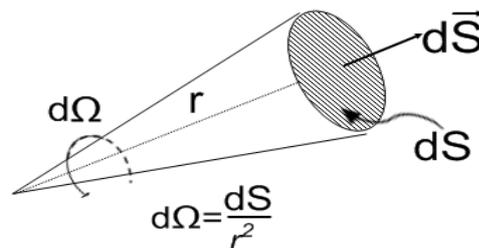


Figure I.27 : Angle solide

Définition : L'angle solide élémentaire $d\Omega$ délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire dS situé à une distance r de son sommet vaut : $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$ soit

$$\Omega = \iint_S \frac{dS}{r^2}$$

Ω : toujours positif et indépendant de r , son unité est le Stéradian (Sr)

L'espace complet (sphère complète de surface $4\pi r^2$) est vu sous l'angle 4π stéradians et le demi espace sous 2π Sr.

En général, le cône peut intercepter une surface quelconque dS représentée par $d\vec{S} = \vec{n}dS$ faisant un angle θ avec la génératrice de vecteur unitaire \vec{u} . Dans ce cas, l'angle solide élémentaire est :

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cdot \vec{n} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. L'angle solide élémentaire s'écrit alors $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Ainsi, l'angle solide délimité par un cône de révolution, d'angle au sommet α vaut :

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\alpha \sin\theta d\theta = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

Ainsi pour l'espace complet : $\alpha = \pi$ alors $\Omega = 4\pi$ Sr et pour le demi espace ($\alpha = \pi/2$), $\Omega = 2\pi$ Sr.

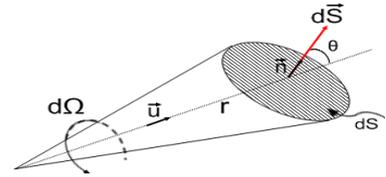


Figure I.28

8.1.2. Flux du champ électrique d'une charge ponctuelle à travers une surface ouverte

Considérons une surface orientée (S) et un élément de celle-ci représenté par le vecteur $d\vec{S}$ au voisinage d'un point M où règne le champ électrique $\vec{E}(M)$.

On appelle flux du champ \vec{E} à travers l'élément dS la

$$\text{grandeur : } d\Phi = \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Le flux à travers toute la surface est : $\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

L'unité du flux est le Weber (Wb). $1\text{Wb} = 1\text{V}\cdot\text{m} = 1\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

Si le champ est créé par la charge ponctuelle positive q ,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$$\text{Alors } d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Avec $d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n} \cdot dS}{r^2}$: angle solide sous lequel dS est vue de la charge q .

Le flux total envoyé par q à travers toute la surface (S) est :

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

Ω : est l'angle solide sous lequel la surface (S) est vue du point où se trouve la charge q .

On remarque que Φ dépend de Ω et non de r .

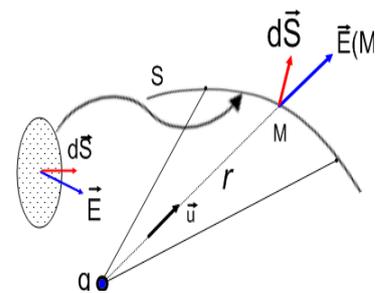


Figure I.29

8.1.3. Flux du champ électrique d'une charge à travers une surface fermée

Considérons une surface fermée au voisinage de laquelle se trouve une charge ponctuelle q . Cette charge envoie des lignes de champ qui traversent cette surface, autrement dit, on a un flux du champ à travers cette surface. Deux cas peuvent se présenter :

a) La charge se trouve à l'extérieur de (S) :

Un cône de sommet q et d'ouverture $d\Omega$ coupe la surface sur 4 éléments dS_1 , dS_2 , dS_3 et dS_4 et le flux élémentaire de \vec{E} s'écrit :

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 + d\Phi_3 + d\Phi_4$$

$$\text{Et puisque } d\Phi_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r_i^2} \cdot \vec{n}_i dS_i$$

Avec r_i : distance de la charge q au centre de l'élément dS_i .

$$\text{On a } \frac{\vec{u}}{r_1^2} \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \frac{\vec{u}}{r_3^2} \cdot \vec{n}_3 dS_3 = -d\Omega$$

$$\text{et } \frac{\vec{u}}{r_2^2} \cdot \vec{n}_2 dS_2 = \frac{\vec{u}}{r_4^2} \cdot \vec{n}_4 dS_4 = +d\Omega.$$

$$\text{Il s'en suit : } d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (-d\Omega + d\Omega - d\Omega + d\Omega) = 0 \Rightarrow \Phi = 0$$

Ainsi le flux envoyé par une charge extérieure à travers une surface fermée est nul.

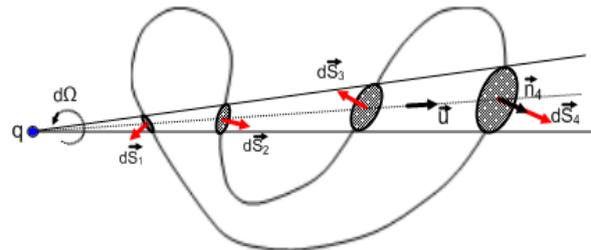


Figure I.30

b) La charge se trouve à l'intérieur de (S) :

En raisonnant de la même manière que précédemment on retrouve :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (+d\Omega - d\Omega + d\Omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Par intégration :

$$\Phi = \iint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

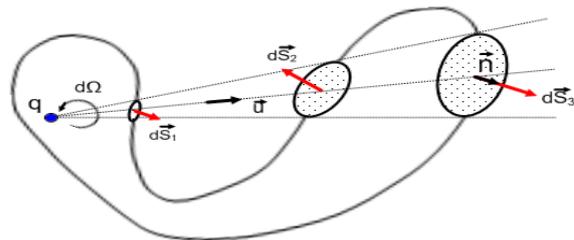


Figure I.31

Avec Ω angle solide sous lequel de la charge q on voit toute la surface fermée (S), c'est-à-dire tout l'espace. Or pour tout l'espace $\Omega = 4\pi$, il vient : $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$. Expression indépendante de S.

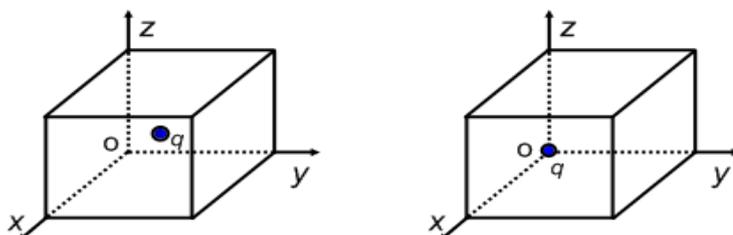
Le théorème de superposition nous permet de généraliser ceci à un ensemble de charges quelconque : $\Phi = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$.

Exemple :

Calculer le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers chaque face d'un cube lorsque

- La charge est placée au centre du cube
- La charge est placée à l'un des sommets du cube.

Corrigé :



Le flux du champ créé par un charge q placé à l'intérieur d'une surface fermée est donné par

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

1) Si cette charge est placée au centre d'un cube, on voit depuis ce centre le cube (tout l'espace) sous un angle $\Omega = 4\pi$. Par conséquent, chacune de ses 6 faces est vue sous un angle solide $\Omega_f = \frac{4\pi}{6}$. Ainsi, on déduit le flux du champ électrique à travers chacune des faces :

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{6} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

2) Lorsque la charge est placée en l'un des sommets du cube, le trièdre (Oxyz) dans lequel se trouve le cube forme 1/8 de l'espace. Le cube est alors vu depuis le sommet O sous un angle solide $\Omega' = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Les faces se trouvant dans les plans (xoy), (xoz) et (yoz) sont vues depuis O sous un angle solide nul. Elles sont donc traversées par un flux nul. Les 3 autres faces, par raison de

symétrie, sont vues depuis O sous un angle solide $\Omega_{f'} = \frac{\Omega'}{3} = \frac{\pi}{6}$. Ces trois faces reçoivent par conséquent chacune un flux

$$\Phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{6} = \frac{q}{24\epsilon_0}$$

8.2. Théorème de Gauss

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque (appelée : surface de Gauss) est égal au rapport de la somme des charges qui s'y trouvent sur la permittivité ϵ_0 du vide.

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Notons que la surface imaginaire dite "surface de Gauss" peut aussi être une surface réelle (sphère, cylindre, cube, ...).

Remarques :

- Le théorème de Gauss est un outil très simple et performant pour le calcul du champ électrique créé surtout par une distribution continue de charges, si on le compare à la méthode directe. Toutefois, son application nécessite certaines précautions et un certains nombres d'étapes à suivre :

- ✓ Trouver une symétrie de la distribution de charges.
- ✓ Choisir la surface de Gauss.
- ✓ Calculer le flux du champ à travers cette surface fermée.
- ✓ Appliquer le théorème pour en déduire le champ.

- Le choix de la surface de Gauss est d'une importance capitale car, ce n'est pas toutes les surfaces qui conviennent.

8.3. Forme locale du théorème de Gauss

- **Relation de Green-Ostrogradsky :**

On a $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$: flux de \vec{E} à travers (S), et si V est le volume délimité par cette surface,

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \, dV \quad : \text{ Relation de Green – Ostrogradsky}$$

- **Forme locale du théorème de Gauss :**

On a $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \, dV = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$

Pour une distribution volumique de charge :

$$\sum q_i = \iiint_V \rho \, dV \Rightarrow \iiint_V \text{div} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

Avec ρ : densité volumique de charges. En remplaçant, il vient :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ou bien :} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **Equation de Poisson :**

En combinant les relations : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ Soit :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Soit :}$$

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad : \quad \text{Equation de Poisson}$$

Exemple 1 : Champ créé par un fil rectiligne infini chargé

La distribution de charge est invariante par rotation autour du fil et par translation parallèle au fil : le potentiel et le champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées cylindriques θ et z :

$$V = V(r) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$$

Le champ électrique est donc radial.

Pour calculer le champ en M, nous prenons comme surface de Gauss (Σ) un cylindre de révolution autour du fil, de rayon r et de hauteur h . Le flux à travers le cylindre (Σ) est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0}$$

Puisque sur les 2 bases du cylindre $\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ et $\sum_i Q_i = \lambda \cdot h$

$$\text{Donc} \quad \Phi = E \iint_{S_L} dS = E \cdot S_L = E \cdot 2\pi r h$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc : $2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$, soit :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{E} = E_r \cdot \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

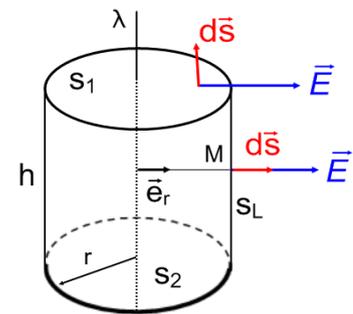


Figure I.32

Exemple 2 : Champ créé par un plan infini

La distribution est invariante par translation quelconque parallèle au plan et V ne dépend donc que de la distance z au plan. Par conséquent, le champ est perpendiculaire au plan (π). Tant que le calcul est fait en un point M tel que (π) puisse être considéré comme infini, \vec{E} est uniforme de part de d'autre de π , seul son sens change.

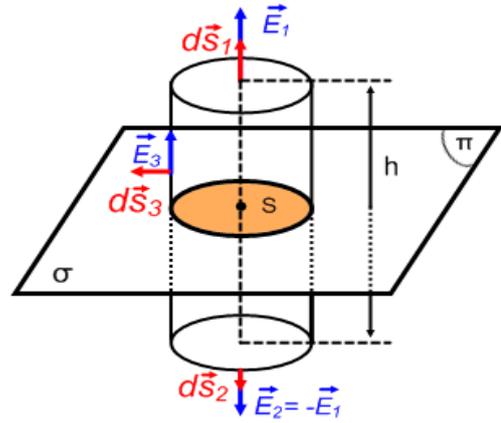


Figure I.33

Prenons pour surface de Gauss un cylindre perpendiculaire au plan, de hauteur h et de surface de base S , de surface latérale S_L , symétrique par rapport à (π), on a :

$$\Phi = \sum_i \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_{base1}} E_1 \cdot dS_1 + \iint_{S_{base2}} E_2 \cdot dS_2 + \iint_{S_L} E_3 \cdot dS_3 = E_1 S + E_2 S$$

Puisque $E_1 = E_2 = E$ et $\sum Q_i = \sigma S$, alors

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Exemple 3: Champ créé par une sphère chargée en volume

Soit une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée en volume avec une densité ρ positive. Calculer le champ puis déduire le potentiel créé à l'intérieur et à l'extérieur de cette sphère.

1) Calcul du champ :

La distribution présente une symétrie sphérique donc le champ en un point quelconque M de l'espace est radial et ne dépend que de la distance $OM = r$.

Comme surface de Gauss (Σ) choisissons une sphère de rayon r concentrique à la sphère chargée.

On a alors $\vec{E}(M) = E(M) \cdot \vec{e}_r$ Avec \vec{e}_r vecteur unitaire associé aux coordonnées sphériques.

Appliquons Le théorème de Gauss à cette surface.

$$\Phi = \oiint \vec{E} d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{s} = E \iint_{\Sigma} ds = E \cdot S_{\Sigma} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Sachant que $S_{\Sigma} = 4\pi r^2$ on aura

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum Q_{int}$$

1^{er} cas : $r < R$, M se trouve à l'intérieur de la sphère (S)

$$\sum Q_{int} = \int_Q dq = \iiint_V \rho dV = \rho V_{\Sigma} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

En remplaçant, on obtient :

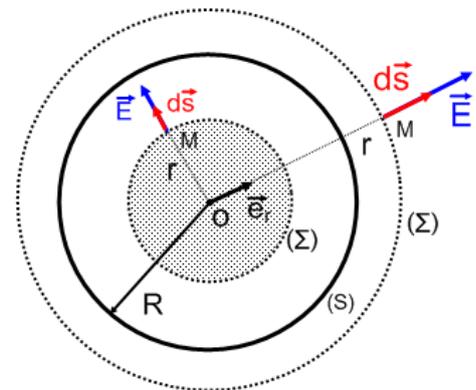


Figure I.34

$$E = E_{int} = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \text{ ou bien } \vec{E}_{int} = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = E_{int}(r) \vec{e}_r$$

2^{ème} cas : $r > R$, M se trouve à l'extérieur de la sphère (S)

$$\Sigma Q_{int} = \int_Q dq = \iiint_V \rho dV = \rho V_S = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{Ici les charges ne se trouvent que dans la sphère S})$$

En remplaçant, on obtient :

$$E = E_{ext} = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \text{ ou bien } \vec{E}_{int} = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = E_{ext}(r) \vec{e}_r$$

Remarque : $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ On peut alors écrire $\vec{E}_{int} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ qui est équivalent au champ créé par une charge ponctuelle Q concentrée au centre de la sphère.

2) Calcul du potentiel :

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ et $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ exprimé en coordonnées sphériques

$$\text{Soit } E(r)\vec{e}_r = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi\right) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r \Rightarrow V = -\int E(r) dr$$

1^{er} cas : $r < R$

$$V = V_{int}(r) = -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_1 \quad \text{avec } C_1 \text{ constante à déterminer.}$$

2^{ème} cas : $r > R$

$$V = V_{ext}(r) = -\int \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2 \quad \text{avec } C_2 \text{ constante à déterminer.}$$

On détermine C_1 et C_2 par les conditions aux limites.

S'il n'y a pas de charges à l'infini $V_{ext}(r \rightarrow \infty) = 0$ soit

$$V_{ext}(r) = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le potentiel étant continu à la traversée de la sphère chargée : $V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R)$,

$$-\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + C_1 = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{R} \Rightarrow C_1 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \text{ soit}$$

$$V_{int}(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Les courbes de variation de $V(r)$ et $E(r)$ sont représentées dans les figures ci-dessous.

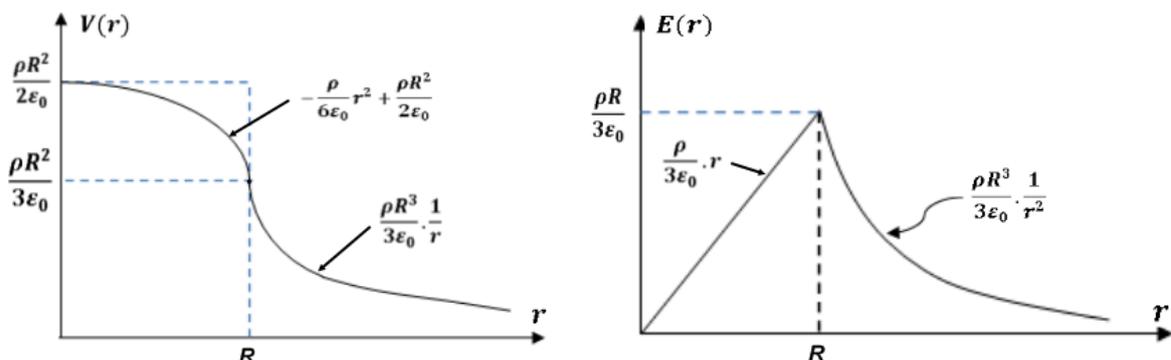


Figure I.35 : Courbes de variation $V(r)$ et $E(r)$ d'une sphère chargée en volume

CHAPITRE II : Conducteurs en équilibre

1. Equilibre électrostatique

1.1. Définitions

- Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel les charges libres peuvent se déplacer. Ces charges sont des électrons dans le cas des métaux et des ions dans le cas des électrolytes.

- Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes ses charges sont immobiles.

En réalité c'est simplement la vitesse moyenne des électrons libres (pour les métaux) par rapport au réseau d'ions qui est nulle. Donc cette définition est associée à un comportement à l'échelle macroscopique du système d'électrons. Tout se passe comme si les électrons n'étaient soumis à aucune force macroscopique. Bien entendu, à l'échelle microscopique les électrons demeurent mobiles et entrent perpétuellement en collision.

1.2. Propriétés des conducteurs en équilibre

1) Le champ électrostatique total à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul. Autrement dit, puisque $\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

2) Le champ à la surface d'un conducteur en équilibre est perpendiculaire à cette surface. Si ce n'est pas le cas, il y aurait une composante tangentielle qui déplacerait les charges de surface, ce qui ferait que le conducteur ne soit plus en équilibre électrostatique.

3) Le volume d'un conducteur en équilibre constitue un espace équipotentiel car le champ y est nul et comme $dV = -\vec{E}d\vec{l} = 0$ donc $V = cste$.

La surface externe de ce conducteur est aussi équipotentielle, mais cette fois à cause du fait que le champ est perpendiculaire à cette surface : $\vec{E} \perp (S) \Rightarrow dV = -\vec{E}d\vec{l} = 0$, soit $V = cste$ et V est appelé : potentiel du conducteur.

4) La charge électrique est nulle à l'intérieur d'un conducteur.

Si un conducteur est chargé, où se trouvent donc les charges non compensées? Supposons qu'elles soient distribuées avec une densité volumique ρ . Prenons un volume quelconque V situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique. En vertu de l'équation de Poisson

on a : $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, et puisque $V = cste$, donc $\Delta V = 0$, soit $\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$.

Cela signifie que $\rho = 0$ (autant de charges + que de charges -) et donc, qu'à l'équilibre, aucune charge non compensée ne peut se trouver dans le volume occupé par le conducteur. Toutes les charges non compensées se trouvent donc nécessairement localisées à la surface du conducteur.

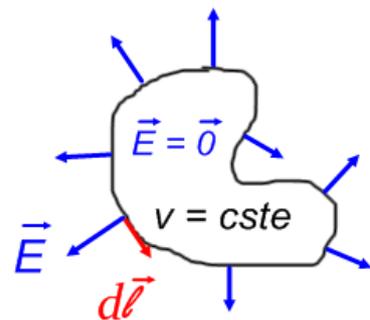


Figure II.1 : Champ et potentiel d'un conducteur plein

Cas d'un conducteur creux :

Les propriétés d'un conducteur plein sont aussi valables pour un conducteur creux et les charges sont localisées seulement sur la surface externe du conducteur.

$$\vec{E} = \vec{0}, \rho = 0 \text{ et } V = cste$$

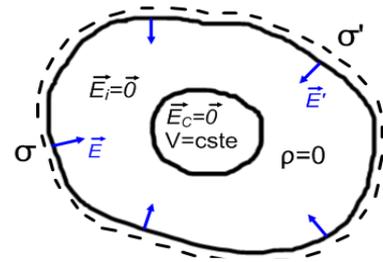


Figure II.2 : conducteur creux

1.3. Champ électrique au voisinage d'un conducteur : Théorème de Coulomb

En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur, le champ électrostatique \vec{E} est normal à S.

Considérons une petite surface dS_1 parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée Σ qui est un cylindre de bases :

- dS_1 entourant le point M.
- dS_2 suffisamment profonde pour que l'on puisse considérer que le champ y est nul.

Si S_L est sa surface latérale, en appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée (Σ), on obtient :

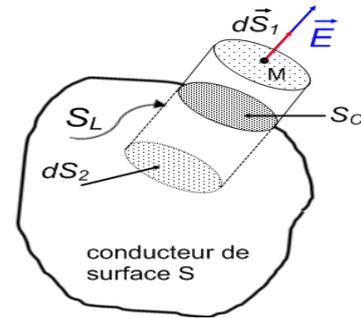


Figure II.3

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_1 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Comme $Q_{int} = \sigma \cdot S_c$, avec S_c surface réel du conducteur et $S_c = S_1$, on obtient :

$$E \cdot S_1 = \frac{\sigma \cdot S_c}{\epsilon_0} \text{ Soit } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ ou bien } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} : \text{ C'est le théorème de Coulomb.}$$

Le champ électrostatique au voisinage immédiat d'un conducteur de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}. \text{ Avec } \vec{n} \text{ vecteur unitaire de la normale à la surface et dirigé vers l'extérieur.}$$

Remarque :

Le champ étant continu, l'interface du conducteur constituée de quelque couches atomiques est le siège d'un champ électrique croissant (en partant de l'intérieur du conducteur) :

$$E \in \left[0 ; \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right] \text{ dont la valeur moyenne vaut : } E_{moy} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

1.4. Pression électrostatique

L'expérience montre que lorsqu'on apporte des charges électriques à une bulle de savon, celle-ci se dilate quelque soit le signe de cette charge, autrement dit, la bulle subit une pression. Cette pression dite : électrostatique est due au fait que les charges à sa surface se repoussent.

Un élément de surface dS portant la charge $dq = \sigma dS$ de cette bulle ou d'un conducteur d'une manière générale subit de la part les autres charges la force

$$d\vec{F} = dq \cdot \vec{E}_{moy} = \sigma dS \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

Soit $d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S}$. Cette force est normale à la surface et dirigée vers l'extérieur quelque soit le signe de la charge. On déduit :

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{S}} = P_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

C'est la pression électrostatique d'un conducteur.

Elle est en général faible pour arracher les charges de la surface de ce conducteur, mais suffisante pour déformer une bulle.

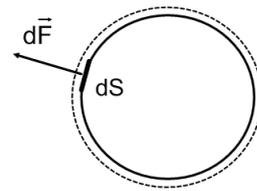


Figure II.4

1.5. Pouvoir des pointes

L'expérience a montré qu'à proximité d'une pointe, le champ électrostatique est toujours très intense. En vertu du théorème de Coulomb, cela signifie que la densité surfacique de charges est très élevée sur les parties à faibles rayons de courbure. Soit un conducteur chargé constitué de deux sphères de rayons R_1 et R_2 ($R_1 \gg R_2$) reliées par un fil et suffisamment éloignées l'une de l'autre pour considérer que chaque sphère est isolée mais qu'elle partage le même potentiel V . Cela implique alors :

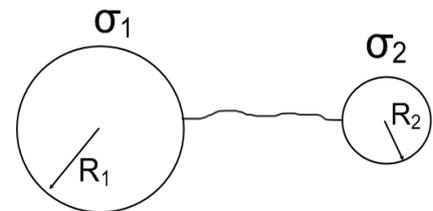


Figure II.5

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \quad \text{Soit : } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Comme $R_1 \gg R_2$ alors $\sigma_2 \gg \sigma_1$. Cela signifie que les charges seront concentrées sur des sphères de petits rayons (de petits rayons de courbures pour les pointes).

Applications : Sans rentrer dans les détails de son fonctionnement le paratonnerre est l'une des meilleures applications de ce phénomène. On le place sur des édifices (bâtiments, tours etc.) pour les protéger contre la foudre qui est une décharge électrique. On peut citer des exemples très connus tel que la tour Eiffel de Paris (324m) et la tour Ostankino de Moscou (540 m) dont l'extrémité se trouve pratiquement dans les nuages, ce qui facilite l'évacuation vers le sol des charges qui y sont accumulées. Notons que cette tour permet de protéger contre la foudre, pratiquement toute la ville.

1.6. Capacité propre d'un conducteur isolé

Si on prend un conducteur isolé dans l'espace et on lui communique la charge Q_i , son potentiel sera alors V_i ($i=1,2,3,\dots,n$). L'expérience montre que :

$$\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \dots = \frac{Q_n}{V_n} = cste$$

On constate que, d'une manière générale, tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par Q et V) est tel que le rapport Q/V reste constant (cela résulte de la linéarité de Q et V en fonction de σ). Cette constante C toujours positive est appelée capacité du conducteur et son expression est : $C = \frac{Q}{V}$. L'unité de la capacité est le Farad ($1F = \frac{1C}{1V}$).

Remarques :

- La capacité d'un conducteur caractérise l'aptitude d'un conducteur d'emmagasiner des charges et ne dépend que des caractéristiques géométriques et du matériau dont est fait ce conducteur.
- Le Farad est une très grande unité. En général, la capacité est exprimée en nF ou pF.

Exemple : Capacité d'un conducteur sphérique de rayon R .

Le potentiel en un point quelconque situé à la distance r du centre est : $V = K \frac{Q}{r}$.

En un point de la surface : $V = K \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$

Pour avoir $C = 1F$, il faut une sphère de rayon $R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 m \Rightarrow 1F$ est énorme.

1.7. Energie potentielle d'un conducteur en équilibre

On a vu que l'énergie potentielle d'une distribution de charge est donnée par :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{charge} V \cdot dq$$

Pour un conducteur $dq = \sigma dS$ et le potentiel V est constant, il s'en suit :

$$U_p = \frac{1}{2} V \iint_S \sigma dS = \frac{1}{2} QV$$

Soit :

$$U_p = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

C'est l'énergie nécessaire pour amener un conducteur de capacité C au potentiel V .

Remarque :

Pour n conducteurs en équilibre chargés avec q_i , soit de potentiels V_i , l'énergie totale est :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

2. Phénomènes d'influence

2.1. Théorème des éléments correspondants

Soit deux conducteurs (A) et (B), placés l'un à côté de l'autre et portant des densités surfaciques σ_1 et σ_2 à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (A) à (B). Soit un petit contour fermé C_1 situé sur la surface de (A) tel que l'ensemble des lignes de champ issues

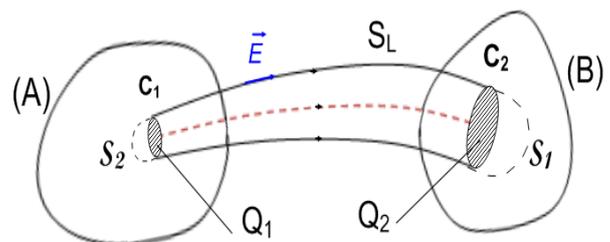


Figure II.6 : éléments correspondants

de (A) et s'appuyant sur C_1 rejoignent (B) et y dessinent un contour fermé C_2 . L'ensemble de ces lignes de champ constitue un tube de flux. Le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale S_L est nul ($\vec{E} \perp d\vec{S}_L$).

Soit la surface fermée produite ($\Sigma = S_{Gauss} = S_1 + S_2 + S_L$) où S_1 est une surface qui s'appuie sur C_1 et plonge à l'intérieur de (A) et S_2 une surface similaire pour (B).

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0}$$

où Q_1 est la charge totale contenue sur la surface de (A) embrassée par C_1 tandis que Q_2 est la charge contenue sur la surface correspondante de (B).

Il s'ensuit que $Q_1 = -Q_2$

Théorème :

Les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont égales et opposées.

2.2. Phénomène d'influence électrostatique

2.2.1. Influence partielle

Nous avons jusqu'à présent abordé les conducteurs chargés isolés dans l'espace. Intéressons nous maintenant à leur comportement lorsqu'on les place dans un champ électrique.

Considérons un conducteur neutre ($Q=0$) isolé placé dans une région où il existe un champ uniforme \vec{E} .

Les charges libres vont se déplacer : déplacement de charges positives dans la direction de \vec{E} et de charges négatives (électrons) dans la direction opposée.

Ceci s'accompagnera de la création d'un champ $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_{+q} + \vec{\epsilon}_{-q}$

qui vient s'ajouter à \vec{E} à l'intérieur du conducteur. Le déplacement des charges ne cessera que lorsque $\vec{\epsilon}$ compense complètement le champ extérieur \vec{E} tel que : $\vec{E}_{int} = \vec{E} + \vec{\epsilon} = \vec{0}$

On obtient à nouveau un conducteur en équilibre mais dans un état polarisé (création de pôles + et -), se traduisant par une distribution surfacique σ non uniforme (mais avec $Q=0$).

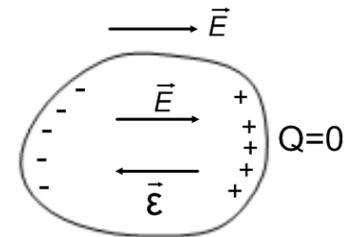
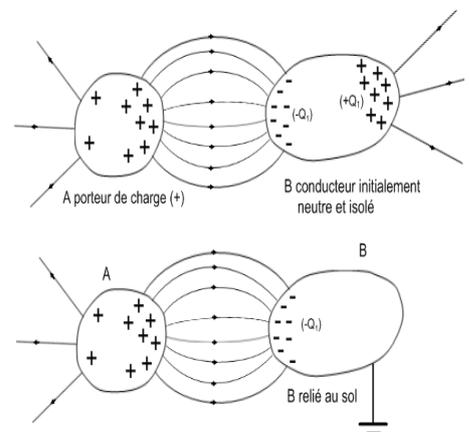


Figure II.7 :

Dans le cas où le champ extérieur est créé par un conducteur A portant une charge Q_A avec une densité σ_1 , sur notre conducteur neutre (B) apparaît une densité surfacique σ_2 non uniforme. En retour, les charges de B vont modifier la distribution des charges de A qui vont se concentrer du côté du conducteur B. A l'équilibre, les densités σ_1 et σ_2 dépendent l'une de l'autre. Cette action est appelée : influence électrostatique. En vertu du théorème des éléments correspondants, puisque $|-Q_1| < |Q_A|$, certaines lignes de champ issues de A n'aboutissent pas sur B. On dit qu'on a une **influence partielle**.

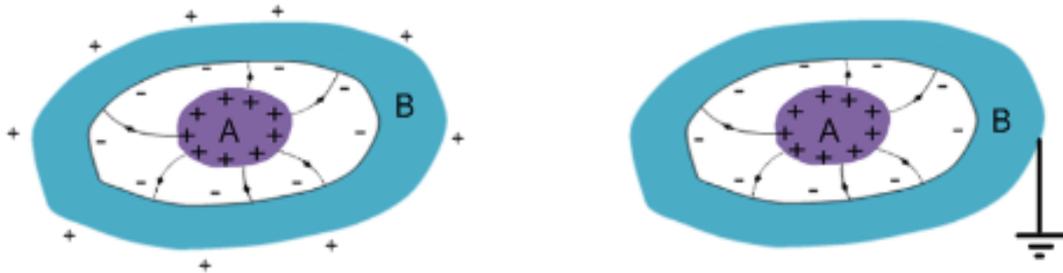


Figures II.8 : Influence partielle

Si on relie B au sol, le conducteur et le sol forment un seul conducteur et les charges positives sont absorbées par la terre. Le potentiel du conducteur devient nul et aucune ligne de champ ne quitte B.

2.2.2. Influence totale

Lorsque le conducteur B entoure complètement le conducteur A et en vertu du théorème des éléments correspondants, toutes les lignes de champ qui partent de A aboutissent sur la face interne de B et sa charge sera $Q_B^{int} = -Q_A$. On dit qu'on a une influence totale. La charge de la surface externe de B sera $Q_B^{ext} = -Q_B^{int} = Q_A$ puisqu'il est isolé et neutre.



Figures II.9 : Influence totale

Ce résultat ne dépend pas de la position de A à l'intérieur de B.

2.3. Notion d'écran électrostatique : cage de Faraday

Si on relie maintenant B au sol on a toujours Q_A sur A donc par influence totale :

$Q_B^{int} = -Q_A$, mais $Q_B^{ext} = 0$ car les charges extérieures se sont écoulés dans sol.

Le champ électrique $\vec{E}_A^{int} = \vec{E}_B^{int} = \vec{E}_B^{ext} = \vec{0}$, mais entre A et B, le champ n'est pas nul.

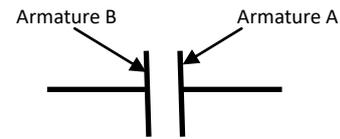
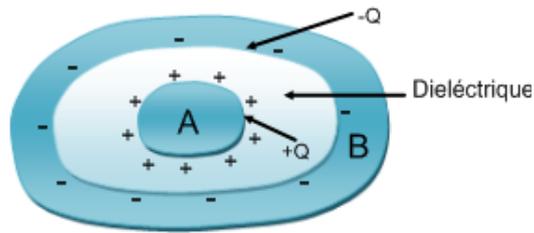
Si maintenant on communique une charge extérieure au conducteur ou bien on le place dans un champ électrique, il n'y aura aucun effet sur la charge intérieure du système, autrement dit il apparaît comme un système neutre et la charge de A reste indécélable au delà de l'enveloppe extérieure de B. On dit que B est équivalent à un écran électrostatique et on l'appelle cage de Faraday. Ce système est largement utilisé pour protéger les appareils électriques des champs extérieurs en les plaçant à l'intérieur d'une carcasse métallique reliée à la terre.

3. Condensateurs

3.1. Définition

On appelle condensateur tout système de deux conducteurs isolés électriquement l'un de l'autre et en influence totale. Les deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur. L'espace compris entre les deux conducteurs (*armatures*) est vide ou rempli d'un matériau isolant (diélectrique).

On appelle charge du condensateur, la charge Q de son armature interne, avec $Q = |Q_A| = |Q_B|$



Figures II.9 : Condensateur et sa représentation symbolique

Un condensateur est un système qui sert à emmagasiner de l'énergie électrique et il est largement utilisé en électronique et en électrotechnique. Par exemple, si on branche ses armatures à une source d'électricité, celles-ci acquièrent des charges égales et opposées : on dit que le condensateur s'est chargé et cette charge restera dans le condensateur même lorsqu'il est déconnecté de la source.

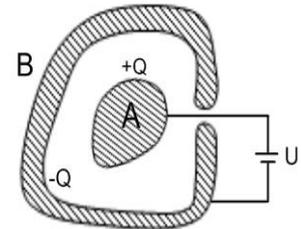


Figure II.10

3.2. Capacité d'un condensateur

3.2.1 Définition

Comme on a introduit le concept de capacité d'un conducteur, on peut le généraliser au cas de deux conducteurs notamment d'un condensateur. Soit V_A et V_B les potentiels respectifs des deux conducteurs A et B et Q sa charge. On appelle capacité du condensateur la quantité :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{U}$$

Avec : $U = V_A - V_B$ différence de potentielle (ddp) entre les deux conducteurs.

C ne dépend que de la forme des deux conducteurs et de la nature du milieu qui les séparent.

Remarque : Pour un condensateur dont le diélectrique est de permittivité ϵ , sa capacité sera augmentée du facteur $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, avec ϵ_0 : permittivité du vide.

3.2.2. Calcul de la capacité d'un condensateur

1) Méthode générale

- Calcul du champ \vec{E} entre les armatures (en utilisant le théorème de Gauss),
- Calcul de la circulation du champ d'une armature à l'autre pour déduire la ddp entre les armatures : $V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$. Sachant que $Q = \iint_S \sigma dS$, on calcul $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$

2) Application

a- Condensateur cylindrique :

Il est constitué de deux armatures cylindriques coaxiales de longueurs supposées infinies (pour négliger les effets de bord), de rayons R_1 et R_2 et séparées par du vide ($R_1 > R_2$).

Appliquons le théorème de Gauss pour calculer le champ entre les armatures. Soit M un point entre les 2 cylindres à la distance r de l'axe zz' tel que $R_2 < r < R_1$. Prenons comme surface de Gauss Σ le cylindre d'axe zz' , de rayon r et de hauteur h . Le champ est radial donc \vec{E} est normal à la surface latérale.

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_L} E \cdot dS = E \cdot S_L = \frac{\Sigma Q_i}{\epsilon_0}$$

On a $S_L = 2\pi r h \Rightarrow \Phi = 2\pi r h E$ et $\frac{\Sigma Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$

On retrouve $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r}$ et en coordonnées cylindriques : $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \vec{e}_r$

Le calcul de la circulation du vecteur \vec{E} entre R_1 et R_2 nous donne $\int_1^2 -dV = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr$

Soit $V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$,

et la capacité : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

b- condensateur sphérique

Dans ce cas les armatures sont des sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 et comme surface de Gauss Σ on choisit une sphère concentrique de rayon r tel que $R_2 < r < R_1$. Sachant que le champ est radial, le calcul donne :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

c- condensateur plan

Théoriquement il est constitué de deux conducteurs A et B plans infinis en influence totale portés aux potentiels V_A et V_B et distants de d . En pratique ceci est réalisé si d est négligeable devant les dimensions des deux plaques.

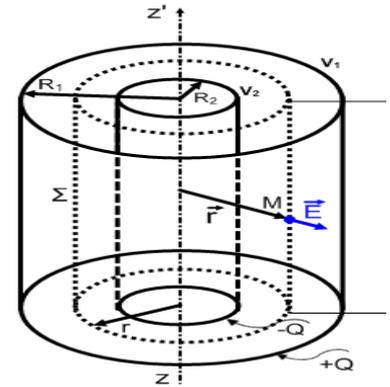
Le champ électrique \vec{E} entre les deux armatures est la superposition des champs créés par chacun des plans infinis, c'est-à-dire

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{i}) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{i}, \text{ soit } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = cste$$

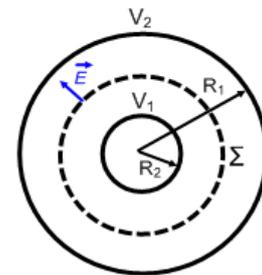
Le calcul de la circulation de \vec{E} entre A et B nous donne : $V_A - V_B = \int_0^d E dx = E \cdot d$

Soit $V_A - V_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d$, avec S : surface d'une armature. On déduit

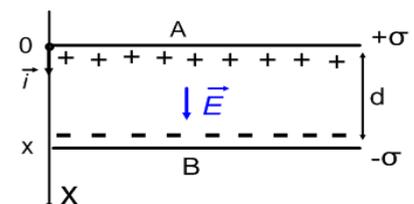
$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



Figures II.11



Figures II.12



Figures II.13

3.3 Energie électrique d'un condensateur

C'est l'énergie que l'on récupère lorsque qu'on relie les armatures d'un condensateur après l'avoir isolé de la source. Les deux armatures sont alors portées au même potentiel et la charge Q s'annule, on dit que le condensateur s'est déchargé.

Si un condensateur de capacité C est porté à une différence de potentiel $U = V_A - V_B$, il apparaît sur ses armatures des charges $Q_A = -Q_B$ (Théorème de éléments correspondants) tel que $Q_A = -Q_B = Q = CU$. On dit qu'il a emmagasiné de l'énergie et l'énergie E_P associée à ces charges libres, appelée énergie du condensateur est donnée par :

$$E_P = \frac{1}{2}(Q_A V_A - Q_B V_B) = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2$$

E_P correspond à l'énergie que le générateur doit fournir au condensateur pour le charger. Soit dE_P l'énergie nécessaire pour amener une charge supplémentaire dq sur l'armature portant au préalable la charge q ($U(q) = \frac{q}{C}$). En intégrant cette énergie infinitésimale entre l'état initial (charge nulle) et l'état final (charge Q) : $dE_P = Udq = \frac{q}{C}dq$

$$E_P = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

L'énergie E_P est donc l'énergie emmagasinée dans le condensateur au cours du processus d'accumulation de charge sur ses armatures. Elle sera restituée lors de sa décharge.

3.4. Association de condensateurs

Un condensateur est caractérisé par sa capacité et la ddp qu'il peut supporter. Dans la pratique, on cherche souvent à construire des condensateurs :

- de très grande capacité, pour emmagasiner plus de charges,
- de capacité bien définie pour répondre à un besoin technologique,
- capables de supporter des ddp élevées sans claquer.

Ceci peut se réaliser en combinant des condensateurs ne répondant pas seuls à ces conditions.

On appelle condensateur équivalent à un groupement de condensateur, un condensateur unique, qui lorsqu'on le charge sous la même ddp que l'ensemble, il fournit la même énergie lors de sa décharge.

a) Association en parallèle :

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en parallèle avec la même tension $U = V_A - V_B$. La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par $Q_i = C_i \cdot U$. La charge électrique totale est simplement :

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i C_i U = (\sum_i C_i) \cdot U$$

Nous pouvons alors définir le condensateur équivalent

de capacité C tel que : $C = \frac{Q}{U} = \sum_i C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

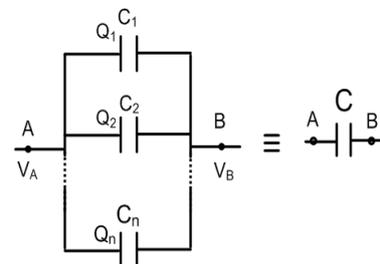


Figure II.14 : Condensateurs en parallèle

b) Association en série :

Prenons les n condensateurs précédents et relierons les en série puis appliquons une ddp $U = V_A - V_B$ à l'ensemble.

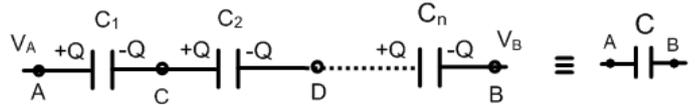


Figure II.15 : Condensateurs en série

Il apparaît sur l'armature gauche de C_1 la charge $+Q$ et par influence sur son armature droite la charge $-Q$ tel que : $Q_1 = Q = C_1(V_A - V_C)$. Comme l'armature droite de C_1 et l'armature gauche de C_2 constituent un même conducteur initialement neutre, il apparaît alors la charge $+Q$ sur cette dernière et par influence la charge $-Q$ sur l'armature droite de C_2 de sorte que

$Q_2 = Q = C_2(V_C - V_D)$. Il s'en suit que tous les condensateurs de la série porte la même charge Q .

La tension (ddp) totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit simplement :

$$U = V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + \dots + (V_{\alpha} - V_B) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q(\sum_i \frac{1}{C_i})$$

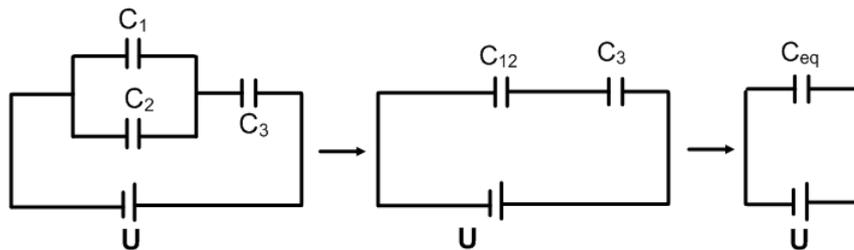
Or la charge Q est celle qu'aurait un condensateur unique (condensateur équivalent) s'il est porté à la tension $U = V_A - V_B$, soit $V_A - V_B = \frac{Q}{C}$. En comparant, on déduit

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Exemple :

Trois condensateurs de capacités C_1 , C_2 et C_3 sont alimentés avec une tension U comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

- 1) Trouver la capacité totale des condensateurs du circuit et la charge totale ??? Q des condensateurs.
- 2) Trouver la tension sur chacun des condensateurs.



Les condensateurs C_1 et C_2 branchés en parallèle peuvent être substitués par un seul condensateur de capacité $C_{12} = C_1 + C_2$. On a maintenant C_{12} et C_3 branchés en série qu'on peut remplacer par un seul condensateur de capacité C_{eq} tel que : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$. Soit

$$C_{eq} = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

La charge totale Q est évaluée en utilisant le dernier schéma est : $Q = C_{eq} \cdot U = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U$

- 2) Les charges des condensateurs C_{12} et C_3 sont les mêmes et sont égales à la charge totale Q . Soit

$$Q_{12} = Q_3 = Q = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U$$

La tension aux bornes de C_3 est :

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q}{C_3} = \frac{(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3} U$$

La tension U_{12} aux bornes de C_{12} est tel que : $U = U_3 + U_{12} \Rightarrow U_{12} = U - U_3$ Soit

$$U_{12} = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U$$

Les tensions U_1 et U_2 aux bornes de C_1 et C_2 sont les mêmes que U_{12}

$$U_1 = U_2 = U_{12} = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U$$

Les charges de C_1 et C_2 sont :

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U$$

CHAPITRE III : Electrocinétique

L'électrocinétique est l'étude des charges électriques en mouvement dans des milieux conducteurs – qu'on appelle **courant électrique**.

1. Le courant électrique

1.1 Origine du courant électrique

Considérons deux conducteurs A et B en équilibre électrostatique portés aux potentiels V_A et V_B ($V_A > V_B$). Soient Q_A et Q_B leurs charges respectives. Si on relie A et B par un fil conducteur, l'ensemble (A, B, fil) constitue un seul conducteur.

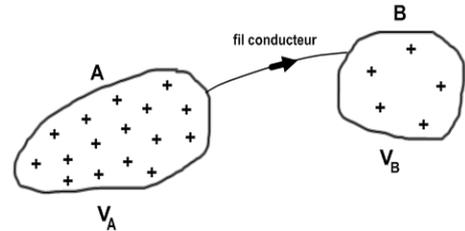


Figure III.1 : Déplacement de charges

Au bout d'un certain temps, A et B prendront un même potentiel V et des charges Q'_A et Q'_B .

Le conducteur A s'est déchargé }
Le conducteur B s'est chargé } \Rightarrow

On dit qu'un **courant électrique** a parcouru le fil

\rightarrow Si on relie A et B aux bornes d'un générateur de tension (pile, accumulateur), on a $V_A - V_B$ maintenue constante \Rightarrow on obtient alors un **courant permanent**.

Le courant électrique est dû au déplacement de charges (positives, négatives).

Le sens conventionnel du courant correspond au sens de déplacement des charges positives (ou l'inverse de celui des charges négatives)

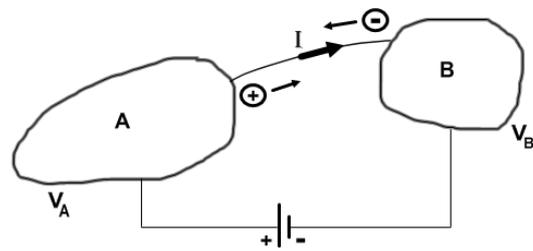


Figure III.2 : Courant continu

1.2 Intensité du courant électrique

On définit l'intensité moyenne du courant électrique comme étant la quantité de charges transportée par unité de temps

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad q - C \text{ (Coulomb)}, \quad t - s \text{ (seconde)}, \quad I - A \text{ (Ampere)}$$

L'intensité instantanée est :

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} : \text{dérivée de la charge par rapport au temps}$$

1.3. Densité de courant électrique

Le courant peut s'exprimer aussi en fonction de la vitesse des charges mobiles dans un conducteur.

Prenons une surface élémentaire ds centrée en P et calculons la quantité de charges dq qui la traverse pendant dt .

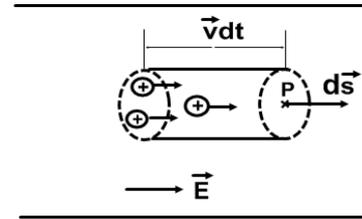


Figure III.3 : Déplacement de charges

Soit $\rho = n \cdot q$ la densité volumique de charge en P.

→ La quantité de charges qui traverse ds pendant dt est celle contenue dans le cylindre de génératrice $\vec{v} \cdot dt$ et de base ds avec \vec{v} : vitesse moyenne des charges à l'instant t en P.

Soit $dq = n \cdot q \cdot \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{s} = \rho \cdot \vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{s}$, $\vec{v} \cdot dt \cdot d\vec{s}$ étant le volume.

On définit le vecteur densité de courant par : $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = n \cdot q \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow dq = \vec{j} \cdot d\vec{s} \cdot dt$$

Ainsi la quantité d'électricité qui traverse ds est : $dI = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{s}$ - c'est l'intensité du courant qui traverse ds .

A travers toute la section du conducteur :

$$I = \iint_s \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (\text{flux de } \vec{j} \text{ à travers } s)$$

Si \vec{j} uniforme, s - section plane $\Rightarrow I = \vec{j} \cdot \vec{s} \quad [j] : A/m^2$

Remarque :

$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v}$; si les porteurs de charge sont des électrons $\rightarrow q = -e \Rightarrow \vec{j} = -n \cdot e \cdot \vec{v}$

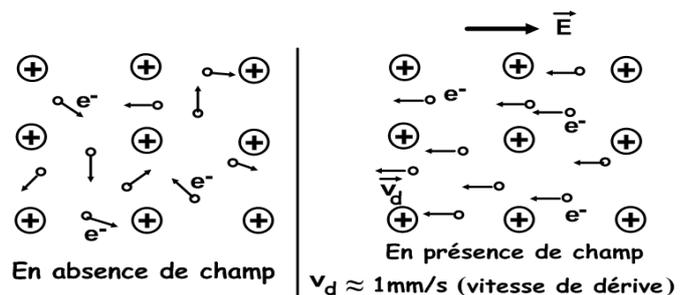
On voit que \vec{j} est de sens contraire au sens de déplacement des électrons \Rightarrow le sens de \vec{j} est celui du sens du courant.

1.4. Mécanisme de passage du courant

a) métaux et alliages :

C'est un réseau d'ions fixes dans lequel se déplacent les électrons libres (ou de conduction) en mouvement désordonné.

→ Si on applique un champ \vec{E} ces électrons se déplacent en sens inverse au champ en mouvement ordonné et les ions restent fixes.



Figures III.4 : mécanisme de passage du courant

→ Le sens du courant est opposé à celui du déplacement des charges réelles.

N.B : Le passage de courant ne correspond à aucun déplacement de la matière.

b) Electolytes :

Un composé ionique en solution ou fondu est décomposé en ions positifs et négatifs

(exple NaCl fondu ou dissout).

Lorsqu'il est soumis à un champ électrique, les cations (+) se déplacent dans le sens du champ (sens conventionnel du courant) et les anions (-) dans le sens opposé

=> **il y'a transport de matière.**

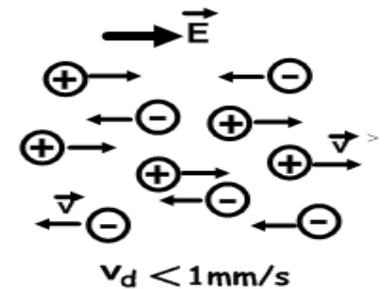


Figure III.5 : vitesse de dérive

c) Gaz ionisés :

En général les gaz sont des isolants, mais s'ils sont soumis à un champ électrique très intense, ils s'ionisent => le gaz ionisé comporte : des électrons, des ions et des molécules.

Le gaz devient alors conducteur et les porteurs de charges sont des électrons et des ions (cations).

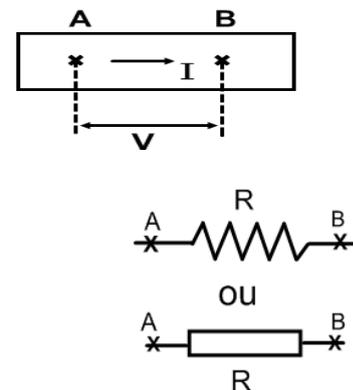
2. Loi d'Ohm

2.1. Loi d'Ohm macroscopique : résistance

Soit un conducteur métallique à température constante. Le rapport de la différence de potentiel (ddp) V entre deux points de ce conducteur sur le courant électrique I qui le traverse est constant. Cette constante est appelée : **la résistance électrique** entre ces deux points.

$$\frac{V}{I} = R = cte \text{ ou } V = R \cdot I$$

volt (v)
ohm (Ω)
ampere (A)



On la représente par le symbole ci-contre.

La résistance est une caractéristique du conducteur (certains conducteurs laissent passer plus ou moins facilement les charges par rapport aux autres)

2.2. loi d'Ohm microscopique : Conductivité et résistivité

Considérons une portion de conducteur AB = l parcourue par un courant I. L'existence de I signifie qu'il y'a une ddp entre A et B.

$$\int_A^B -dV = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Le champ étant uniforme => $U = V_A - V_B = E \cdot l$

D'autre part : $U = R \cdot I$ on déduit $E \cdot l = R \cdot I = R \cdot J \cdot S$

$$\Rightarrow J = \frac{l}{R \cdot S} E \quad \text{ou} \quad \vec{j} = \frac{l}{R \cdot S} \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Avec $\sigma = \frac{l}{R \cdot S}$ conductivité électrique $[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1}$

C'est la forme locale ou microscopique de la loi d'ohm.

γ : caractérise la matière, elle est liée aux propriétés microscopiques de la matière. En fonction de sa valeur, on peut distinguer entre conducteurs, isolants et semi-conducteurs.

On appelle $\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{R \cdot S}{l}$ la conductivité électrique $[\rho] = \Omega \cdot m$

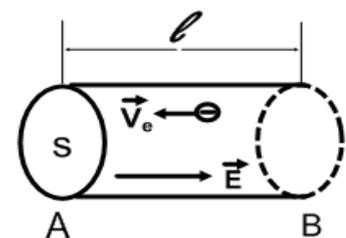
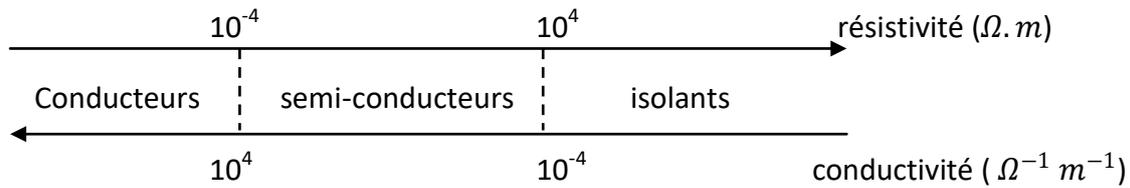


Figure III.6

On peut aussi écrire : $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}$ (équivalent de $U = R \cdot I$)



Résistivités de quelques matériaux (Ω.m) :

<u>Métaux</u>		<u>Semi-conducteur (300°K)</u>		<u>isolants</u>	
Ag	$1,617 \cdot 10^{-8}$	Silicium	2400	bakélite	10^{16}
Cu	$1,712 \cdot 10^{-8}$	Germanium	0.5	polystyrène	10^{20}
Al	$2,709 \cdot 10^{-8}$			Eau distillée	10^9

2.3. Influence de la température

La variation de température d'un conducteur peut entraîner une variation de sa résistivité (résistance). Pour les métaux, ρ varie en fonction de la température suivant la loi :

$$\rho(T) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T)$$

T : température en °C, ρ_0 : résistivité à 0 °C, α : coefficient de dilatation thermique.

Il s'en suit une variation de la résistance du même ordre :

$$R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T)$$

Avec R_0 : résistance à 0 °C.

L'accroissement de résistivité ρ avec la température (c-à-d diminution de la conductivité) résulte de l'augmentation de l'agitation thermique des électrons libres et de l'amplitude de vibration des ions (atomes fixes) du réseau autour de leurs positions d'équilibre. Ceci entraîne alors un nombre de chocs supplémentaires entre les électrons et les ions, qui provoque le freinage des électrons de conduction, ainsi la conductivité diminue (la résistivité augmente).

2.4. Association de résistances

a) Association en série : Le courant I est le même dans toutes les résistances . Appliquons la loi d'Ohm à chaque résistance :

$$V_A - V_B = R_1 \cdot I$$

$$V_B - V_C = R_2 \cdot I$$

$$V_C - V_D = R_3 \cdot I$$

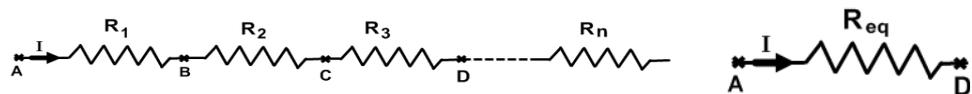


Figure III.7

$$V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I = (\sum R) \cdot I$$

La résistance équivalente à l'ensemble est :

$$R_{eq} = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{(\sum R) \cdot I}{I} = \sum R_i$$

D'une manière générale pour n résistances en série

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{i=n} R_i$$

b) Association en parallèle.

La ddp équivalente aux bornes de chaque résistance est la même. Le courant total est égal à la somme des courants de chaque branche :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} + \frac{V_{AB}}{R_3} = V_{AB} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Dans le circuit équivalent $I = \frac{V_{AB}}{R_{eq}} \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ soit

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

On appelle **conductance** l'inverse de la résistance.

Dans ce cas la conductance équivalente est égale à la somme des conductances.

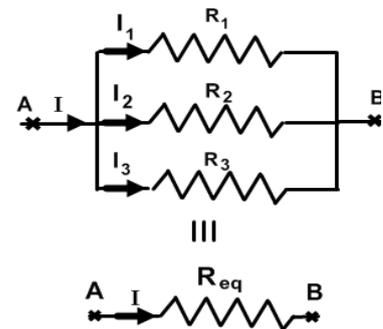


Figure III.8

3. Loi de Joule

Soit une résistance morte R parcourue par un courant I sous une ddp constante. La circulation d'une quantité d'électricité q s'accompagne d'une diminution d'énergie $W = q(V_A - V_B)$. Le passage du courant I pendant le temps t est équivalent à la circulation d'une charge $q = I \cdot t$ dans le circuit. Il entre en A la charge $q = I \cdot t$ au potentiel $V_A \Rightarrow$ il en ressort en B la même charge q au potentiel V_B .

La diminution d'énergie potentielle entre A et B est :

$$W = q(V_A - V_B) = I \cdot t(V_A - V_B)$$

Valable quelque soit l'élément placé entre A et B. Dans notre cas, c'est un conducteur de résistance R

$$\Rightarrow V_A - V_B = R \cdot I \text{ soit } W = R \cdot I^2 \cdot t \quad [W]: J \text{ (joule)}, [R]: \Omega, [I]: A, [t]: s$$

$$\text{qui correspond à une puissance } P = \frac{W}{t} = R \cdot I^2 = \frac{(V_A - V_B)^2}{R} = (V_A - V_B) \cdot I$$

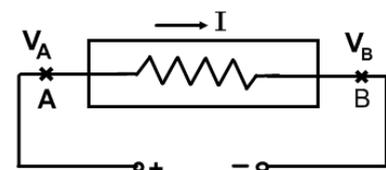


Figure III.9

C'est la puissance disponible entre A et B.

L'expérience montre que pour un conducteur ohmique, toute cette énergie se retrouve sous forme de chaleur cédée au matériau conducteur et au milieu extérieur. Ce dégagement de chaleur constitue **l'effet joule**.

Remarque : Si $i = i(t)$: courant variable $dW = R \cdot i^2 \cdot dt$: énergie cédée pendant dt

$$W = \int_0^t R \cdot i^2 \cdot dt = R \int_0^t i^2(t) dt - \text{énergie cédée pendant } t.$$

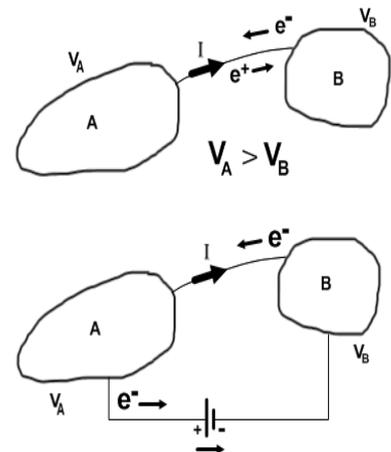
4. Circuits électriques en courant continu

4.1. Générateur et force électromotrice d'un générateur

Reprenons l'expérience du début. Il y'a passage de courant (de charges e^-) de A vers B (de charges e^+ de B vers A) jusqu'à l'équilibre => même potentiel.

Si l'on veut que le courant circule d'une manière permanente il faut maintenir le **déséquilibre électrostatique** => il faut régénérer les charges écoulées de B vers A. Pour ceci, il faut placer un générateur entre les deux conducteurs.

Il permet de renvoyer les charges qui sont passées de B vers A, vers le conducteur B. Ainsi le déséquilibre est maintenu permanent. Le générateur joue le rôle d'une pompe.



Figures III.10

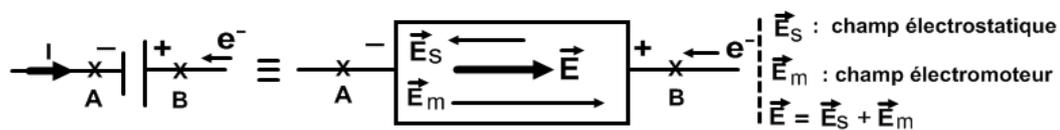


Figure III.11

Son rôle n'est pas de créer des charges, mais de les faire circuler dans un circuit fermé en leur fournissant de l'énergie. Cette énergie est fournie grâce à un champ électrique dit **électromoteur** ou **force électromotrice (fem)** à l'intérieur du générateur.

D'une manière plus simple on dira que le rôle d'un générateur est de transformer une forme quelconque d'énergie (mécanique, chimique, solaire, éolienne etc..) en énergie électrique.

Exemple : Le générateur électrochimique (batterie d'accumulateurs, pile).

Il se produit à l'intérieur une réaction chimique qui dégage de l'énergie qui est transmise aux charges.

Représentation d'un générateur :

On appelle borne positive (+) d'un générateur celle de plus haut potentiel et borne négative (-) celle de plus bas potentiel.

A l'extérieur du générateur les électrons se déplacent de la borne (-) vers la borne (+), mais à l'intérieur les électrons se déplacent dans le sens contraire. Pour le sens du courant, il est représenté conventionnellement dans le sens opposé à celui du déplacement des électrons.

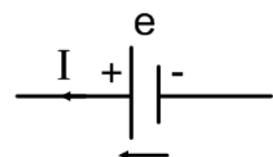


Figure III.12

Remarque :

La représentation précédente est celle d'un générateur idéal qui dans la pratique n'existe pas car tout générateur possède une résistance interne. Ainsi dans la pratique on lui ajoute toujours en série une résistance r dite : résistance interne du générateur et on le note (e,r) .

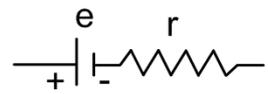


Figure III.13

4.2. Différence de potentiel aux bornes d'un générateur

Si on branche un générateur (e,r) aux bornes d'une résistance R il va circuler un courant I . Pour maintenir ce courant permanent dans le circuit. Le générateur fournit une puissance P

$$P = (V_A - V_{A'})I = (V_A - V_B)I + (V_B - V_{A'})I = (V_A - V_B)I + RI^2$$

$$= [(V_A - V_B) + rI]I = eI$$

Avec $e = (V_A - V_B) + rI$: force électromotrice (Fem) et on peut écrire

$$(V_A - V_B) = e - RI$$

C'est la loi d'Ohm pour un générateur.

4.3. Bilan énergétique

Si on a un récepteur quelconque entre A et B (Ici c'est seulement la résistance R) le générateur met à sa disposition la puissance $P = eI$. Une partie de cette puissance est utilisée (Puissance utile) soit $P_{utile} = (V_A - V_B)I$ et une autre partie soit $P_c = rI^2$ est consommée dans le générateur lui même par effet Joule. Ceci nous permet d'établir le bilan énergétique suivant :

$$P = \underbrace{eI}_{\text{Puissance fournie}} = \underbrace{(V_A - V_B)I}_{\text{Puissance utile}} + \underbrace{RI^2}_{\text{Puissance consommée dans le générateur par effet Joule}}$$

Rendement d'un générateur.

On définit le rendement δ d'un générateur comme étant le rapport de la puissance utile sur la puissance fournie, soit

$$\delta = \frac{(V_A - V_B)I}{eI} = \frac{eI - rI^2}{eI} = 1 - \frac{rI}{e}$$

$0 \leq \delta \leq 1$ et $\delta = 1$ correspond à un générateur idéal qui dans la pratique n'existe pas.

4.4. Association de générateurs en série

Parfois un générateur de Fem e n'arrive pas à fournir la puissance nécessaire pour alimenter un circuit, dans ce cas il faut recourir à une utilisation de plusieurs générateurs branchés en série.

On dit que 2 générateurs sont en série si la borne + de l'un est branchée à la borne - de l'autre et dans ce cas ils sont parcourus par un même courant.

Considérons le groupement suivant de 3 générateurs (e_1, r_1) , (e_2, r_2) et (e_3, r_3) en série. On cherche quel générateur unique (e, r) peut remplacer l'ensemble.

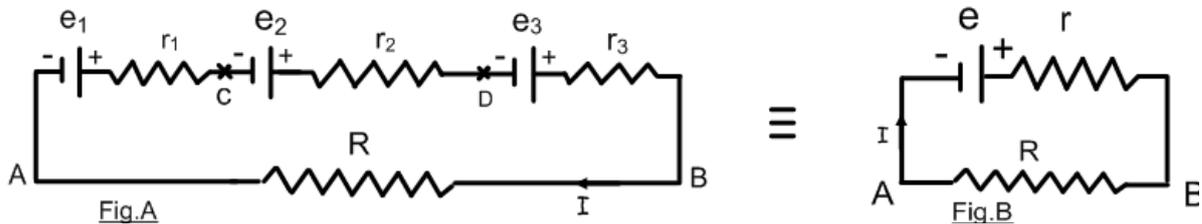


Figure III.14

Fig.B: $V_A - V_B = -(V_B - V_A) = -RI$
 $= (V_A - V_E) + (V_E - V_B) = -e + RI$

Fig.A: $V_A - V_B = -RI$
 $= (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B)$
 $= (-e_1 + r_1I) + (-e_2 + r_2I) + (-e_3 + r_3I)$

Soit $V_A - V_B = -\sum_i e_i + (\sum_i r_i)I$

En comparant les deux résultats, il vient : $e = \sum_i e_i$ et $r = \sum_i r_i$

Le générateur équivalent est un générateur de Fem la somme des Forces électromotrices et de résistance interne la somme des résistances internes de chaque générateur.

5. Récepteur et force contre-électromotrice

5.1. Définitions

Un récepteur, contrairement au générateur, est un appareil qui transforme l'énergie électrique en une autre forme (mécanique, chimique, calorifique etc..). On citera le moteur, l'accumulateur de charge, la résistance électrique etc...

Comme pour un générateur, le récepteur subit toujours des pertes d'énergie par effet joule lors de la transformation et ces pertes peuvent être matérialisées par une résistance dite : résistance interne du récepteur.

Représentation schématique

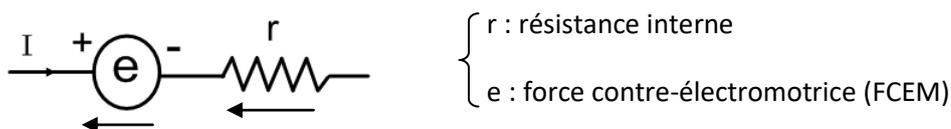


Figure III.15

Remarque : Toutes les différences de potentiel d'un circuit quelconque sont représentées par une flèche orientée du plus bas potentiel (-) vers le plus potentiel (+). En général le potentiel chute (diminue) dans le sens du courant en traversant un récepteur du circuit, mais augmente en traversant un générateur.

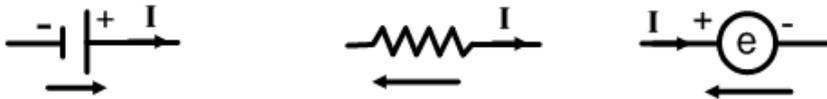


Figure III.16

5.2. Bilan énergétique et loi d'Ohm pour un récepteur

Considérons le circuit ci-contre dans lequel un récepteur est alimenté par un circuit extérieur quelconque.

Le récepteur reçoit une puissance $P = (V_A - V_B)I$ dont une

partie (P_{utile}) est transformée en une autre forme et une

autre consommée par effet Joule : $P_C = rI^2$. Soit $P = (V_A - V_B)I = P_{utile} + rI^2$

De là on tire : $P_{utile} = (V_A - V_B)I - rI^2 = [(V_A - V_B) - rI]I = eI$ Avec $e = (V_A - V_B) - rI$

Qu'on réécrit : $(V_A - V_B) = e + rI$. C'est la loi d'Ohm pour un récepteur.

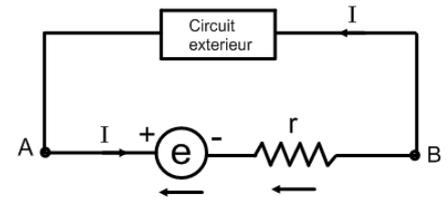


Figure III.17

Remarque :

- On dit qu'un récepteur est passif ($e = 0$) si toute l'énergie qu'il reçoit se transforme en chaleur.
- Il est dit récepteur-générateur s'il est réversible, autrement dit, il peut fournir de l'énergie (générateur) comme il peut en consommer et dans ce cas c'est un récepteur.

6. Analyse d'un réseau électrique - lois de Kirchhoff

6.1. Définitions

- Un réseau ou circuit électrique est un ensemble constitué de dispositifs appelés dipôles reliés entre eux par des fils conducteurs et formant une structure fermée.
- un dipôle est un élément comportant 2 bornes (pôles) tel que le courant rentre par l'une et sort par l'autre.
- Un nœud est un point d'un réseau où se rejoignent au moins 3 courants (ou 3 fils) : A et D
- Une branche est une portion de circuit située entre 2 nœuds consécutifs : BAD, BD, BCD.
- Une maille est un ensemble de branches fermé sur lui ABDA, ABCDA, BCDB.

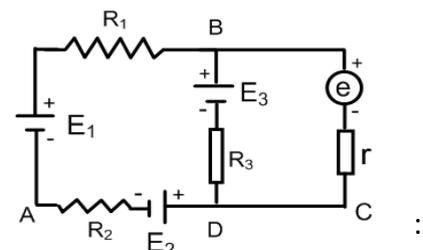


Figure III.18

- Les fils de jonction servent à relier des dipôles . Leurs résistances sont négligeables devant celles des dipôles.

6.2. Lois de Kirchhoff

6.2.1. Lois des nœuds : En un nœud, la somme algébrique des courants est nulle.

$$\sum_i I_i = 0$$

Par convention, un courant est positif s'il se dirige vers le nœud et négatif s'il sort du nœud.

Dans notre cas : $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$ ou bien $I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5$

Soit : $\sum \text{Courants entrant} = \sum \text{courants sortant}$

Cette loi est appelée aussi principe de conservation de l'électricité.

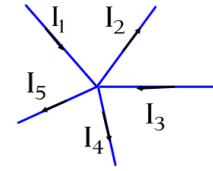


Figure III.19

6.2.2. Loi des mailles

La somme algébrique des ddp (tensions) aux bornes de chacun des dipôles constituant une maille est égale à zéro.

$$\sum \Delta V = 0$$

Pour l'appliquer, on fixe le sens des courants dans chaque branche s'il est évident, sinon on lui donne un sens arbitraire. On choisit un sens conventionnel positif pour toutes les chutes de tension et forces électromotrices. On parcourt la maille d'un point de départ jusqu'à fermer la boucle en attribuant un signe positif à toute chute de tension dans le sens conventionnel et le signe négatif dans le cas contraire.

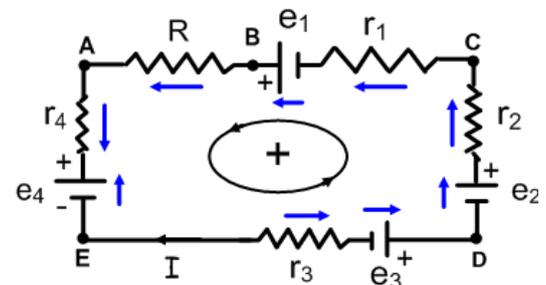


Figure III.20

$$V_A - V_A = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_A) = 0$$

$$= RI + (e_1 + r_1 I) + (e_2 + r_2 I) + (e_3 + r_3 I) + (-e_4 + r_1 I)$$

$$\Rightarrow I(R + r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = e_4 - e_1 - e_2 - e_3 . \text{ On trouve}$$

$$I = \frac{e_4 - e_1 - e_2 - e_3}{R + r_1 + r_2 + r_3 + r_4}$$

Si $I > 0$, le sens choisi est correct et si $I < 0$, il faut changer le sens de I et prendre $I = |I|$.

6.3. Circuit comportant un récepteur de force contre-électromotrice (fcem)

Introduisons dans le circuit précédent entre E et D un récepteur de fcem \mathcal{E} . Maintenant pour le choix du

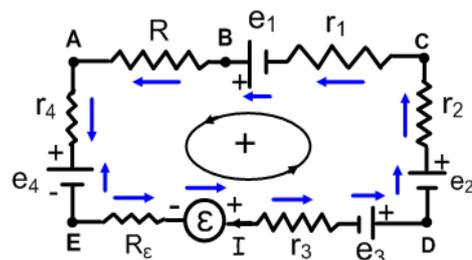


Figure III.21

sens du courant on doit tenir compte du fait que dans un récepteur le courant rentre par la borne (+) et en conséquence orienter sa fcem de (-) vers le (+).

En tenant compte de ceci, on refait le même calcul que Précédemment et on trouve :

$$I = \frac{e_4 - e_1 - e_2 - e_3 - \varepsilon}{R + R_\varepsilon + r_1 + r_2 + r_3 + r_4}$$

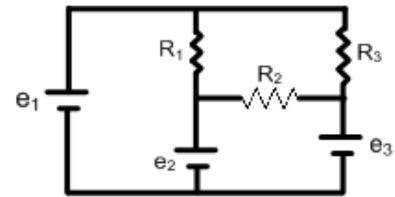
Le calcul nous donne une valeur du courant I et si :

- $I > 0$ le sens choisi est correct et le calcul est terminé.
- $I < 0$ il faut changer l'orientation de la fcem ε et refaire tout le calcul.

Exercice : Déterminer le sens et la valeur du courant dans chacune des piles du circuit ci-contre.

$$R_1 = 400 \, \Omega, R_2 = 500 \, \Omega, R_3 = 1k\Omega$$

$$e_1 = 60 \, \text{V}, e_2 = 10 \, \text{V}, e_3 = 60 \, \text{V}$$



Corrigé : On applique les lois de Kirchhoff.

On a 6 branches (6 courants) donc il nous faut 6 équations

Loi des nœuds :

$$\text{Nœud 1 : } I_A - I_1 - I_3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Nœud 2 : } I_1 + I_B - I_2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Nœud 3 : } I_2 + I_3 + I_C = 0 \quad (3)$$

Loi des mailles :

$$\text{Maille I : } e_1 - R_1 I_1 - e_2 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Maille II : } R_1 I_1 - R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{Maille III : } e_2 - R_2 I_2 - e_3 = 0 \quad (6)$$

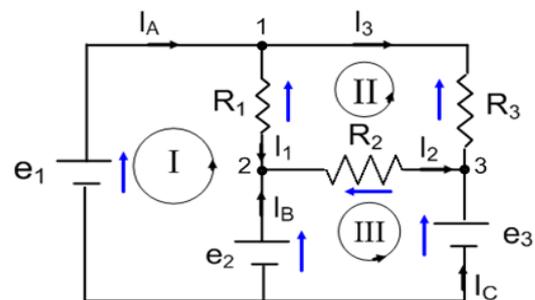


Figure III.22

La résolution du système des 6 équations nous donne :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{e_2 - e_1}{R_1} = \frac{60 - 10}{400} = 0,125 \, \text{A} = 125 \, \text{mA} \\ I_2 &= \frac{e_2 - e_3}{R_2} = 10 \, \text{mA} \\ I_3 &= \frac{R_1 I_1 + R_2 I_2}{R_3} = 55 \, \text{mA} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} I_A &= I_1 + I_3 = 180 \, \text{mA} \\ I_B &= I_2 - I_1 = -115 \, \text{mA} \\ I_C &= -I_2 - I_3 = -65 \, \text{mA} \end{aligned}$$

On remarque que I_B et I_C sont négatifs, donc il faut leur changer de sens, ce qui fait que les deux piles e_1 et e_2 se chargent (elles jouent le rôle de récepteurs).

Bibliographique

- 1) J. L. Caubarrère , J. Fourny , H. Ladjouze , Electricité et ondes, Office des publications universitaires, 2001 - 269 pages.
- 2) M. Alonso E.J. Finn, G. Weill , Physique générale, tome 2 : Champs et ondes - Cours et exercices corrigés , 2001- 678 pages.
- 3) D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Physique - Tome 2 - Electricité et magnétisme, Dunod , 2003-336 pages.
- 4) H. Benson , Physique - Tome 2, Electricité et magnétisme, De Boeck, 1999-398 pages.
- 5) P. Baruch, M. Hulin , J-F. Pétrouff, Electricité, magnétisme : cours, Hermann, 1972-318 pages.
- 6) G. LE MORVAN , Electrostatique, électrocinétique et électromagnétisme T.2 : exercices de physique (avec leurs solutions) à l'usage des étudiants de licence, Vuibert, 1980-290 pages.