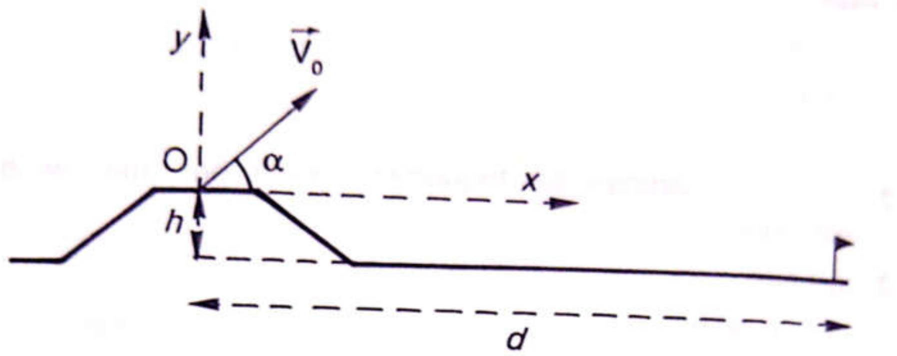
<u>**TD sur la particule soumise à une force constante**</u>

<u>Exercice 1 :</u> ***(Trajectoire une balle de golf)***

Une balle de golf est envoyée à partir d'un point O situé à une auteur h par rapport au plan horizontal qui comporte le trou à atteindre. La balle est lancée avec un vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ qui fait un angle α par rapport à plan horizontal.

On supposera le champ de pesanteur uniforme et on négligera, pour simplifier, l'action de l'air.

Donnée : $g = 9{,}80 m \cdot s^{-2}$; $\alpha = 40°$; $h = 8m$; $d = 250m$.



a) Déterminer, en utilisant le repère orthonormé xOy, l'équation de la trajectoire de la balle en fonction de g, α et v_0.

b) Calculer la valeur de v_0 qui permettrait à la balle de retomber dans le trou.

Solution

a) Equation de la trajectoire

Dans le référentiel terrestre considéré comme étant galiléen, on a

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

où m est la masse de la balle.

On obtient

$$\vec{a} = \vec{g}\ .$$

Dans le repère xOy, le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ est vertical et dirigé vers le bas d'où

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

On tire deux équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \ et \ \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

La première permet d'écrire par intégration

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot cos\, cos\, \alpha$$

$$\boldsymbol{x = (v_0 \cdot cos\, cos\, \alpha) \cdot t.}$$

La deuxième permet d'écrire

$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \cdot sin\, sin\, \alpha$$

puis

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + (v_0 \cdot sin\, sin\, \alpha) \cdot t.}$$

On choisi comme origine des dates l'instant de départ de la balle au point *O*.

L'équation de la trajectoire de la balle s'obtient en remplaçant

$$t = \frac{x}{v_0\, cos\, cos\, \alpha}$$

dans l'expression de *y*.

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot cos\, cos\, \alpha}\right)^2 + v_0 \cdot sin\, sin\, \alpha \ \cdot \frac{x}{v_0\, cos\, cos\, \alpha}$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \alpha} \cdot x^2 + tan\, tan\, \alpha \cdot x.}$$

C'est l'équation de la parabole.

b) Calcul de v_0

Pour que la balle retombe dans le trou, il faut que pour $x = d$ on ait $y = -h$.

c'est-à-dire $-h = -\frac{g}{2 \cdot V_i^2 \alpha} \cdot d^2 + tan\, tan\, \alpha \ \cdot d$.

Application numérique :

$$g = 9{,}80 m \cdot s^{-2}\ ;\ \alpha = 40°;\ h = 8m\ ;\ d = 250m.$$

$$-8 = -\frac{9{,}80}{2 \times v_0 \times 40^0} \cdot (250)^2 + tan\, tan\, 40^0 \ \times 250$$

ou

$$-8 = -\frac{5{,}22 \cdot 10^5}{v_0^2} + 210.$$

Finalement

$$v_0 = -\frac{5{,}22 \cdot 10^5}{218}$$

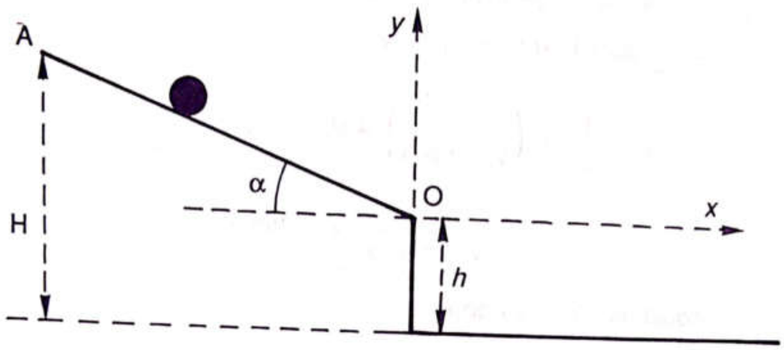
soit

$$\boldsymbol{v_0 = 48{,}9m \cdot s^{-1}}$$

Exercice 2 : ***(Chute sur le sol)***

Un solide ponctuel de masse *m* glisse, à partir du point *A*, sur un plan incliné d'un angle par rapport à un plan horizontal. Arrivé à l'extrémité du plan incliné, le solide tombe sur le sol.

Les notations sont indiquées sur le schéma suivant :



a) Sachant que le solide part du point *A* sans vitesse initiale, calculer sa vitesse v_0 au point O en négligeant les frottements.

b) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile après le point *O*.

c) Déterminer la position du point de chute sur le sol.

Donnée : $g = 9{,}80m \cdot s^{-2}$; $\alpha = 15°$; $h = 1{,}5m$; $H = 3m$.

Solution

a) Vitesse du solide au point *O*

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au solide ponctuel entre les points *A* et *O* donne

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot (H - h)$$

puisque seul le poids du solide travaille (la réaction du support est orthogonale à celui-ci, son travail est nul).

On obtient ainsi

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} \, .$$

Application numérique :

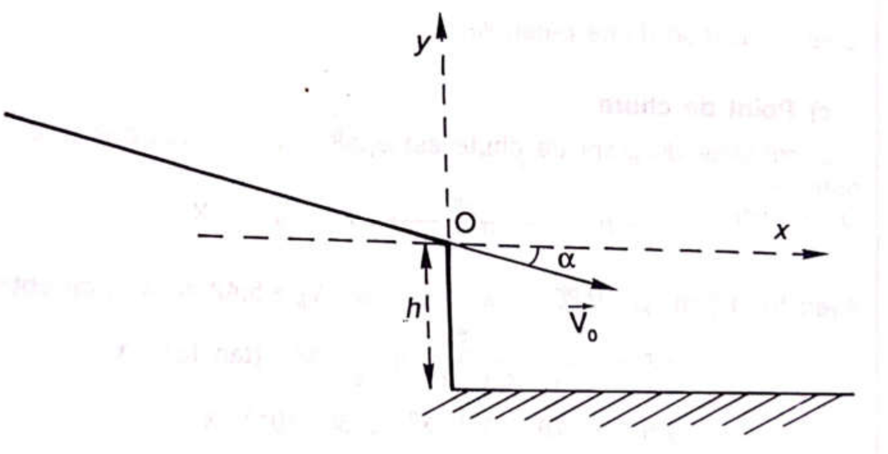
$$g = 9{,}80 m \cdot s^{-2} \,; \; h = 1{,}5 m \,; H = 3 m.$$

$$v_0 = \sqrt{2 \times 9{,}80 \times (3 - 1{,}5)}$$

$$v_0 = 5{,}42 m \cdot s^{-1} \, .$$

b) Trajectoire suivie pendant la chute

Au point *O*, le solide a un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ qui est incliné de l'angle α par rapport au plan horizontal.



A partir du point O, le solide n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ d'où

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

C'est-à-dire

$$\vec{a} = \vec{g} \, .$$

On obtient alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

et

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \, .$$

En choisissant le passage au point *O* comme origine des dates, on a

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot cos\, cos\, \alpha \;\; puis\; x = (v_0 \cdot cos\, cos\, \alpha\,) \cdot t$$

et

$$\frac{dy}{dt} = -g \cdot t \cdot v_0 \cdot sin\, sin\, \alpha$$

puis

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 - (v_0 \cdot sin\, sin\, x\,) \cdot t\,.$$

En remplaçant t par $\frac{x}{v_0 \cdot coscos\, \alpha}$ dans l'équation donnant *y* en fonction de *t,* on obtient

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0\, cos\, cos\, \alpha}\right)^2 - v_0 \cdot sin\, sin\, \alpha\ \cdot \frac{x}{v_0 \cdot cos\, cos\, \alpha}$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{g}{2 \cdot v_0 \alpha} \cdot x^2 - tan\, tan\, \alpha\ \cdot x\,.}$$

C'est l'équation de la parabole.

c) Point de chute

L'ordonnée du point de chute est égale à $(-h)$. Son abscisse sera notée X.

On a ainsi

$$-h = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \alpha} \cdot X^2 = tan\, tan\, \alpha\ \cdot X\,.$$

Avec $g = 9{,}80 m \cdot s^{-2}$; $\alpha = 15°$; $h = 1{,}5m$,on obtient

$$-1{,}5 = -\frac{9{,}80}{2 \times 5{,}42^2\ \times 15^0} \cdot X^2 - (tan\, tan\, 15^0\,) \cdot X$$

$$-1{,}5 = -1{,}78 \cdot 10^{-1} \cdot X^2 - 0{,}268 \cdot 10^{-1} \cdot X$$

ou

$$0{,}178 \cdot X^2 + 0{,}268 \cdot X - 1{,}5 = 0.$$

Les racines de l'équation s'écrivent

$$X = \frac{-0{,}268 \pm \sqrt{(0{,}2G8)^2 + 4 \times 0{,}178 \times 1{,}5}}{2 \times 0{,}178}\,.$$

La racine positive a pour valeur

$$\boldsymbol{X = 2{,}25m.}$$

Exercice 3 : ***(Accélérateur linéaire)***

Un électron de masse $m = 9,1.10^{-31}$ *kg* et de charge électrique $q = -1,6.10^{-19}$ *C* est accéléré au moyen d'un champ électrique crée entre deux armatures d'un condensateur plan. Les deux plaques comportent deux trous permettant le passage des électrons.

a) Faire le schéma du dispositif. On indiquera clairement la façon dont il faut brancher générateur de tension ainsi que le sens du champ électrique $\vec{E}$.

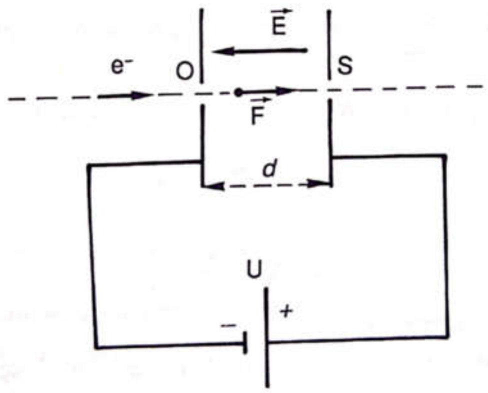
b) Comparer l'intensité du poids de l'électron à celle de la force électrique. La distance entre les armatures est $d = 2$ *cm*, et la tension appliquée est $U = 20$ *V*.

c) L'électron pénètre dans le champ électrostatique avec une vitesse négligeable, calculer la valeur de la vitesse v de sortie.

Solution

a) Schéma du dispositif

Les électrons pénètrent en *O* et sortent en *S*.



Le champ électrostatique a pour intensité

$$E = \frac{U}{d}.$$

Un électron entre les plaques subit la force

$$\vec{F} = -e \cdot \vec{E}\,.$$

Le vecteur $\vec{E}$ doit être orienté de S vers O (fig.)

b) Intensités des forces

Le poids $P = m.g$ de l'électron a pour valeur

$$P = 9,1 \cdot 10^{-31} \times 9,8$$

$$\boldsymbol{P = 8,92 \cdot 10^{-30} N}\,.$$

L’intensité de la force électrostatique s’écrit

$$F = e \cdot E = e \cdot \frac{U}{d},$$

sa valeur numérique est

$$F = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times \frac{20}{2.10^{-2}}$$

$$\boldsymbol{F = 1,6 \cdot 10^{-16} N}.$$

On observe que F est très supérieur à P, en conséquence on négligera toujours le poids de l’électron face à la force électrostatique.

c) Vitesse de sortie

Le théorème de l’énergie cinétique appliqué à l’électron entre les points *O* et *S* donne

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = W_{O\to S}^{\vec{F}}$$

ou

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = e \cdot E \cdot d$$

ou

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = e \cdot U$$

alors

$$\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}}}.$$

Application numérique :

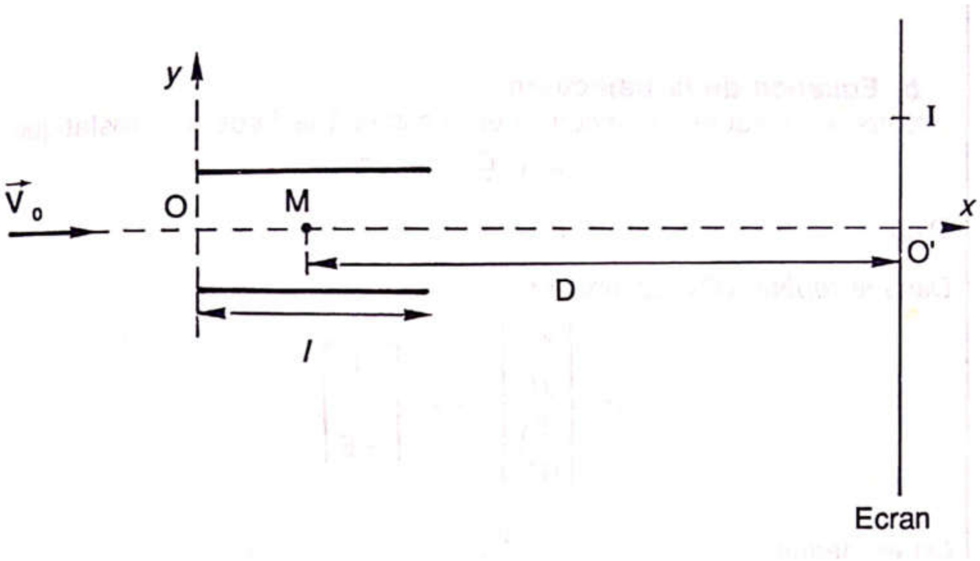
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$;$U = 20V$;$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$.

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1,6.10^{-19} \times 20}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}}$$

$$\boldsymbol{v = 2,65 \cdot 10^{6} m \cdot s^{-1}}.$$

Exercice 4 : ***(Déviation d'un faisceau d'électrons)***

Un faisceau d'électrons homocinétiques, de vitesse v_0, pénètre dans l'espace séparant les armatures horizontales d'un condensateur chargé sous une tension U. Un point d'impact I est observé sur un écran.



Les plaques ont une longueur $l = 2\ cm$. La distance qui sépare le lieu des plaques du plan de l'écran est notée D.

La distance $O'I$ est mesurée sur l'écran ; on trouve $O'I = 1{,}2\ cm$.

a) Représenter le vecteur champ électrique $\vec{E}$ existant entre les plaques.
b) Déterminer l'équation de la trajectoire des électrons entre les plaques.
c) Déduire de la mesure de $O'I$ la valeur U de la tension appliquée.

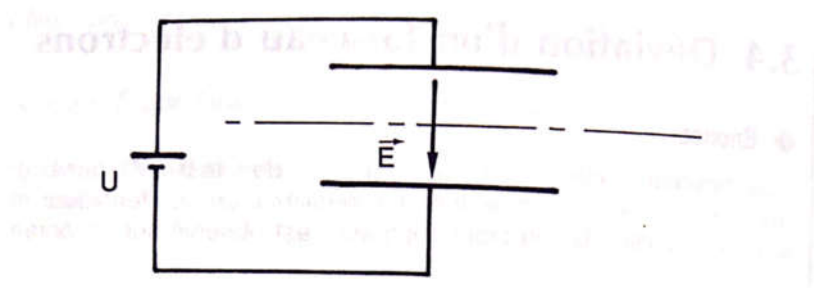
Donnée :

$d = 1{,}8\ cm; D = 30\ cm;\ e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C;$ *la masse de l'électron :* $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$;
$v_0 = 5.10^6 m \cdot s^{-1}$.

Solution

a) Vecteur champ électrique

Le vecteur champ électrique est dirigé vers le bas puisque les électrons sont dérivés vers le haut.



b) Equation de la trajectoire

Entre les plaques, un électron est soumis à la force électrostatique

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -e \cdot \vec{E}.$$

D'où

$$m \cdot \vec{a} = -e \cdot \vec{E}.$$

Dans le repère xOy, on obtient

$$m \cdot \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = -e \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -E \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

et

$$\frac{d^2y}{d_t^2} = \frac{e}{m} \cdot E = \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d}.$$

En choisissant le passage en O comme origine des dates, on obtient

$$x = v_0 \cdot t\,.$$

sur l'axe vertical, on a

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t$$

puis

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2}.$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en écrivant que

$$t = \frac{x}{v_0}.$$

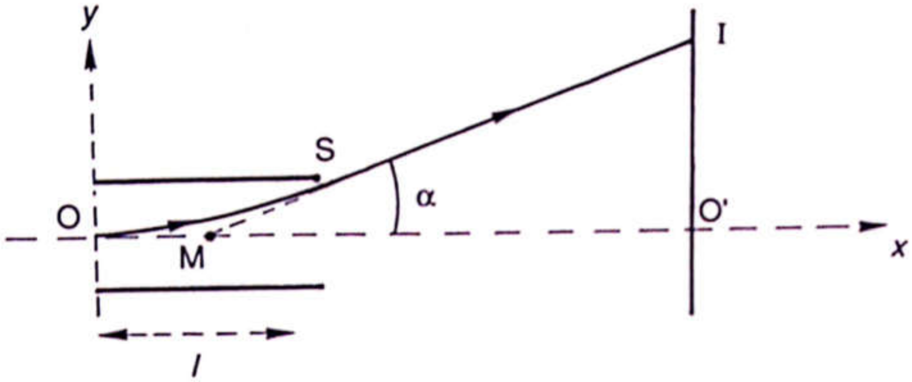
On obtient alors

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot x^2}\,.$$

C'est l'équation d'une parabole.

c) Tension appliquée

Représentons la trajectoire des électrons.



Après le point de sortie S, les électrons possèdent un mouvement rectiligne uniforme.

La direction SI coupe l'axe Ox au point M, milieu des plaques, c'est une des propriétés de la parabole.

En appelant α l'angle de déviation du faisceau on peut écrire que

$$tan\, tan\, \alpha = \frac{y_S}{\frac{l}{2}} = \frac{O'I}{O'M}$$

soit

$$y_S = \frac{l}{2} \cdot \frac{O'I}{O'M},$$

y_S est l'ordonnée du point de sortie S, c'est-à-dire

$$y_S = \frac{l}{2} \cdot \frac{O'I}{D}.$$

L'ordonnée y_S a pour expression

$$y_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot l^2.$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d \cdot v_0^2} \cdot l^2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{O'I}{D}.$$

Après simplification, on a

$$\boldsymbol{U = \frac{m \cdot d \cdot v_0^2}{e \cdot D \cdot l} \cdot O'I}.$$

Application numérique :

$$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg; d = 1{,}8\ cm = 1{,}8 \cdot 10^{-2}\ m;\ v_0 = 5.10^6\ m \cdot s^{-1}; e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C\ ;$$

$$D = 0{,}30\ m; l = 2\ cm; O'I = 1{,}2\ cm.$$

$$U = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \times 1{,}8 \cdot 10^{-2} \times (5.10^6)^2}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 0{,}30 \times 2 \cdot 10^{-2}} \times 1{,}2 \cdot 10^{-2}$$

$$\boldsymbol{U = 5{,}12\ V}$$