République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Université Abderrahmane Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Génie des Procédés

L2 (ST)

Cours et Exercices Corrigés
Mathématiques 3

Conformément au Programme de deuxième Année LMD Sciences de Technologie

Rédigé par Dr : **Abderrahmane YOUKANA**

Année Universitaire : 2021 - 2022

Table des matières

Préface **4**

1 Intégrales simples et Intégrales multiples **5**

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives 5
1.1.1 Sommes de Darboux 6
1.1.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann 8
1.1.3 Calcul de primitives 10
1.1.4 Primitives des fonctions usuelles 11
1.1.5 Changement de variable 14
1.1.6 Intégration des fractions 17
1.1.7 Intégrale d'un polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$ 21
1.1.8 Primitive de la forme : $\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 23
1.1.9 Intégrale de la forme $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$ 24
1.1.10 Exercices avec corrigés 25
1.2 Intégrales doubles 33
1.2.1 Propriétés des intégrales doubles 33
1.2.2 Théorème de Fubini 34
1.2.3 Changement de variables dans les intégrales doubles . . 39
1.2.4 Changement de variables en coordonnées polaires . . . 40
1.2.5 Exercices avec corrigés 43
1.3 Intégrales triples 51
1.3.1 Propriétés des intégrales triples 51
1.3.2 Théorème de Fubini pour les intégrales triples 52
1.3.3 Intégrale sur un parallélépipède, cas des variables séparables 54
1.3.4 Changement de variables pour les intégrales triples . . 55
1.3.5 Coordonnées cylindriques 56

1.3.6 Coordonnées sphériques 58
1.3.7 Exercices avec corrigés 60

2 Intégrale impropres 64
2.1 Intégrales impropres de 1ère espèce 65
2.2 Intégrales impropres de seconde espèce 67
2.3 Intégrales doublement impropres 68
2.4 Propriétés fondamentales des intégrales généralisées 68
2.4.1 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées . . 68
2.4.2 Linéarité des intégrales généralisées 69
2.4.3 Intégrale faussement généralisée 70
2.4.4 Positivité de l'intégrale généralisée 72
2.5 Calcul des intégrales généralisées 72
2.5.1 Intégration par parties (IPP) 72
2.5.2 Utilisation d'un changement de variable 73
2.6 Intégrale des fonctions positives 75
2.7 Critère de convergence 76
2.7.1 Intégrales de référence α-Riemann 76
2.7.2 Critère de comparaison 77
2.7.3 Critère d'équivalence 78
2.7.4 Intégrales de référence de Bertrand 79
2.8 Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque . . . 80
2.8.1 Critère de convergence absolue 80
2.8.2 Intégrales semi-convergentes 81
2.8.3 Critère d'Abel 82
2.8.4 Utilisation d'un développement limité ou asymptotique 83
2.8.5 Développements limités usuels 83
2.9 Exercices avec corrigés 85

3 Séries numériques 94
3.1 Introduction 94
3.1.1 Suite des Sommes Partielles 94
3.1.2 Séries géométriques 95
3.1.3 Séries télescopiques 96
3.1.4 Opérations sur les séries 98
3.2 Séries à termes positifs 99
3.2.1 Critères de Comparaison 99
3.2.2 Critère d'équivalence 100

3.2.3 Critère de comparaison avec une intégrale 100
3.2.4 Séries de Riemann 101
3.2.5 Règle de d'Alembert 101
3.2.6 Règle de Cauchy 102
3.2.7 Règle de Raabe-Duhamel 102
3.2.8 Règle de comparaison logarithmique 103
3.3 Critères de Convergence des Séries à termes quelconques . . . 103
3.3.1 Convergence Absolue 103
3.3.2 Critère de convergence pour les séries alternées 104
3.3.3 Règle des équivalents 105
3.3.4 Règles de D'Alembert pour les séries à termes quelconques 105
3.3.5 Critère de Comparaison à une Série Géométrique . . . 106
3.3.6 D'autres Critères de Convergence 106
3.4 Exercices avec solutions 106

Préface

Ce cours est un cours de niveau Licence désitné aux étudiants de deuxième année Licence, régime L.M.D, Licence-Master-Doctorat conformément au programme officiel du module Mathématiques III.
Ces notes de cours sont issues de l'enseignement du module de Mathématiques III durant ces années au niveau du département de Génie des procédés, Faculté de Technologie, Université de Béjaia.

L'objet principal de ce cours est de développer des compétences et des techniques qui permettront de

- savoir déterminer les bornes d'intégrations dans une intégrale double et triple,
- maîtriser l'application du théorème de Fubini dans les intégrales doubles et triples,
- savoir choisir le changement de variables approprié (polaires, cylindriques, sphériques),
- maîtriser le calcul des volumes et des surfaces,
- faire la distinction entre l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie,
- étudier la convergence de l'intégrale généralisée,
- déterminer si une série numérique de nombres réels converge ou non.

Je suis a priori très reconnaissant à tous ceux qui sauront apporter des corrections ou toutes autres critiques constructives, merci de me les désigner en envoyant vos remarques sur " **abder.youkana@yahoo.fr**".

Chapitre 1

Intégrales simples et Intégrales multiples

Ce chapitre donne une introduction à l'intégrale de Riemann et introduit quelques propriétés fondamentales liées à la notion de cette intégrale.

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives

Définition 1 (Subdivision) *Soit $[a, b]$ un intervalle fini, on appelle subdivision S de $[a, b]$ toute suite finie ordonnée $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$:*

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b.$$

*On appelle "**pas**" de la subdivision, le réel qu'on note par $\rho(S)$ défini par*

$$\rho(S) = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i| .$$

Exemple 2 *Dans cet exemple, nous donnons quelques subdivisions de l'intervalle $[0, 1]$.*

- $S_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, $S_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$, $S_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$, $S_4 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\right\}$

sont des subdivisions de $[0,1]$.
• *La subdivision uniforme sur* $[a,b]$ *est celle de points* $t_i = a + i\frac{b-a}{n}, 0 \leq i \leq n$, *elle est de pas* $\frac{b-a}{n}$.
• *Précédemment,* S_1, S_2, S_3 *sont uniformes de pas respectivement* $\rho(S_1) = 1/2$, $\rho(S_2) = 1/4$ *et* $\rho(S_3) = 1/3$.
Par contre, S_4 *n'est pas uniforme et de pas* $\rho(S_4) = 2/5$.

Exemple 3 *(Subdivision de l'intervalle* $[a,b]$*) Dans le cas où* $I = [a,b]$*, on peut considérer la subdivision uniforme suivante :*

$$x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$
$$< x_2 = a + 2\frac{b-a}{n} < x_3 = a + 3 \cdot \frac{b-a}{n} \ldots\ldots < x_k = a + k\frac{b-a}{n} < \ldots < x_n = b.$$

c'est une subdivision uniforme de I *dont le* pas *est* $\rho(S) = \frac{1}{n}$.

1.1.1 Sommes de Darboux

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$.
On considère une subdivision S de $[a,b]$ qu'on note :

$$S = \{x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots\ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

On pose pour $i = 1, 2, \ldots, n,\ m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ et $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Définition 4 *On appelle somme de Darboux* ***inférieure*** *associée à* f *et* σ *le nombre*

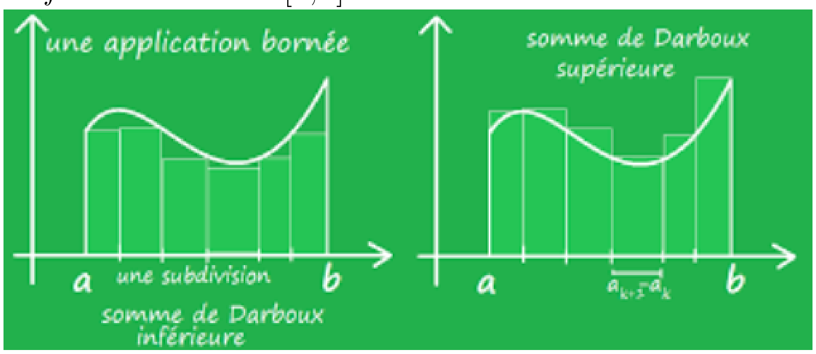
$$s_{[a,b]}(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}).$$

La somme de Darboux ***supérieure*** *associée à* f *et* σ *est le nombre* $S_{[a,b]}(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$.

Définition 5 ***(Fonction intégrable au sens de Riemann)***
Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$.
On dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann intégrable sur $[a,b]$) si

$$s_{[a,b]}(f) = S_{[a,b]}(f).$$

On note alors ce nombre par $\int_a^b f(t)dt$ et il est donc l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$.



Sommes de Darboux

Remarque 6 *Il existe des fonctions qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann.*

Théorème 1

1. *Toute fonction* ***continue*** *sur un segment* ***[a, b]*** de $\mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.*

2. Si *f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$(avec $a < b$), alors $|f|$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Riemann né le 17 septembre 1826 à Breselenz, Royaume de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à la topologie, l'analyse la géométrie différentielle et le calcul différentiel

1.1.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un intervalle $[a, b]$. Alors on a les propriétés suivantes :

- **La positivité** : Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0.$$

- **La monotonie** :
Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx.$$

- **La linéarité** :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx, \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

- **La symétrie**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \begin{cases} 2\int_0^{+\infty} f(x)\ dx & \text{si} \quad \texttt{f est paire}. \\ 0 & \text{si} \quad \texttt{f est impaire}. \end{cases}$$

- **La périodicité** : si f a pour période T alors :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\ dx$$

et

$$\int_a^{a+T} f(x)\ dx = \int_0^T f(x)\ dx.$$

- **La valeur absolue :**

$$\mid \int_a^b f(x)\ dx \mid \leq \int_a^b \mid f(x) \mid\ dx.$$

Théorème 2 *Si f est une fonction monotone sur un intervalle $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Proposition 7 *Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$.*

- ▷ *Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.*
- ▷ *Si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.*
- ▷ *Si f est intégrable sur $[a, b]$, alors on a la relation de Chasles*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Proposition 8 ***(Formule de la moyenne)***
Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$ avec $a < b$.
Soient m et M la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a, b]$.
Alors la quantité

$$f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

appartient à l'intervalle $[m, M]$. Cette quantité obtenue ci-dessus est appelée la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Preuve
On a pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, on déduit que :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$$

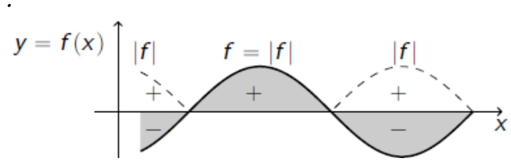
D'où le résultat. ∎

Exemple 9
Calculer de la valeur moyenne de $f(x) = x^2 + 3$ sur $[1, 4]$.
Par un calcul simple

$$f_{moy} = \frac{1}{3}\int_1^4 (x^2+3)\ dx = \frac{1}{3}[\frac{1}{3}x^3 + 3x]_1^4 = 10.$$

On a donc $f_{moy} = 30$ est la valeur moyenne de la fonction f sur $[1, 4]$.

Proposition 10 *(* ***Interprétation graphique****)*
- $\int_a^b f(x)dx =$ *aire "algébrique" sous le graphe de f.*
- $\int_a^b |f(x)|dx =$ *aire sous le graphe de f* ***(positive)****.*



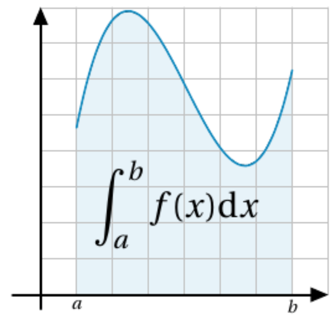
1.1.3 Calcul de primitives

Définition 11 *Soit f une fonction* ***continue et positive*** *sur un intervalle $[a, b]$.*

L'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ est l'aire exprimée en unités d'aire de la surface comprise entre

- ▷ *C_f, la courbe représentative de la fonction f,*
- ▷ *l'axe des abscisses et*
- ▷ *les droites d'équations $x = a, x = b$.*

On la note $\int_a^b f(x)\, dx$ où a puis b sont les bornes et x est la variable.



Remarque 12 *Les intégrales ont été inventées pour calculer des aires.*

Définition 13 *On considère une fonction f continue sur un intervalle I.*
On dit qu'une fonction F est une ***primitive*** *de f sur I si F est dérivable sur I et*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Exemple 14
On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \cos(x) + x^2 - 4$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -\sin(x) + 2x$.
La fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ où f est la fonction définie par $f(x) = -\sin(x) + 2x$.

Remarque 15
Si f admet une primitive alors cette primitive n'est pas unique.

Propriété 1 *On considère une fonction f continue sur un intervalle I.*
Deux fonctions F et G sont des primitives de la fonction f sur I
si et seulement s' *il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$, pour tout $x \in I$.*

Exemple 16 *Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -x^4$ et $G(x) = -x^4 + 7$ sont deux primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3$.*

Propriété 2 *On considère une fonction f continue sur un intervalle I, un réel $x_0 \in I$ et un réel quelconque y_0.*
Alors il existe une unique primitive F de la fonction f sur l'intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple 17
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 1$.
On cherche la primitiveF de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$.
Les primitives de la fonction f sont définies par $F(x) = x^3 - x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
On recherche la valeur de k telle que $F(0) = 1$, par suite $F(0) = 0^3 - 0 + k = 1$ et donc $k = 1$. Par conséquent $F(x) = x^3 - x + 1$.

Théorème 3 (Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (TFC))
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soient a et b dans l'intervalle I. Alors
- ***Construction d'une primitive de f***

La fonction g, définie de la façon suivante :

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad \text{pour } x \in I$$

est une primitive de f sur l'intervalle I, c'est-à-dire que

$$\forall x \in I, \qquad g'(x) = f(x).$$

- ***Évaluation d'une intégrale définie*** $\int_a^b f(x)dx$

Si F est une primitive de f, c'est-à-dire si $F' = f$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1.1.4 Primitives des fonctions usuelles

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les formules générales de dérivation.

- $\int dx = x + c$, c est une constante réelle.
- $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$, $m \neq -1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \log(|x|) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$

- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot g(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + c$
- $\int \tan(x)dx = -\ln(\cos(x)) + c$

Les formules suivantes découlent toutes des règles de dérivation :

- ► $\int [u(x)]^n \ u'(x) \ dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1).$
- ► $\int e^{u(x)} \ u'(x) \ dx = e^{u(x)} + c.$
- ► $\int \frac{u'(x)}{u(x)} \ dx = \ln|u(x)| + c.$
- ► $\int \sin(u(x)) \ u'(x) \ dx = -\cos(u(x)) + c$
- ► $\int \cos(u(x)) \ u'(x) \ dx = \sin(u(x)) + c.$
- ► $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \ dx = 2\sqrt{u(x)} + c.$
- ► $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)} \ dx = -\frac{1}{u(x)} + c.$
- ► $\int a^x \ dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c.$
- ► $\int u'(x)\tan(u(x))dx = -\ln(\cos(u(x))) + c.$

Quelques résultats importants

a) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \arcsin(x) + c.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \ dx = \arcsin(\frac{x}{a}) + c.$

c) $\int \frac{1}{x^2+a^2} \ dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c.$

d) $\int \frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2} \ dx = \frac{1}{\beta}\arctan(\frac{x+\alpha}{\beta}) + c.$

Quelques formules de trigonométrie utiles

Soient a, b et x des réels (quelconques) :

- $\tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad \text{cotan} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$
- $sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad \text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x).$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$

- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.
- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Exemple 18 *Calculer l'intégrale suivante* $\int \cos(3x)\ dx$.
D'après les formules précédentes, notez que $\int \cos(kx)\ dx = \frac{1}{k}\sin(kx) + c$.
Pour $k = 3$*, on trouve* $\int \cos(3x)\ dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + c$.

Exemple 19 *Calculer l'intégrale suivante :* $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta$.

Calculons tout d'abord

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}.$$

Ce qui nous donne $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ d\theta = \pi$.

Quelques résultats

Nous allons voir maintenant plusieurs petits résultats assez utiles liés à la théorie de l'intégration.

Théorème 4 *Soit f une fonction continue sur* $[a, b]$ *et de* ***signe constant*** *sur* $[a, b]$.
Alors

$$\int_a^b f(x)\ dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Proposition 20 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$.
Si l'intégrale de $|f|$ *sur* $[a, b]$ *est nulle alors* f *est identiquement nulle i.e (identiquement équivalent)*

$$\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in [a, b]\ .$$

Proposition 21

- ***Intégrale d'une dérivée****.*
  Si f *est classe* C^1 *sur sur* $[a, b]$ *alors*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

- ***Intégration par parties.***
  Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ dx.$$

Exemple 22 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \sin(x)\ \mathrm{d}x.$$

Par parties :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos(x) & v'(x) = \sin(x). \end{array}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ \sin(x)\ \mathrm{d}x &= -\ x\ \cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)1\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1. \end{aligned}$$

1.1.5 Changement de variable

On introduit maintenant un outil très efficace pour le calcul des intégrales simples.

Théorème 5 *(* ***Forme 1, y=v(x)****).*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une application

$$v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

de classe C^1 et une application u, continue sur $v([a,b])$ telles que pour tout x de $[a,b]$ on ait l'égalité suivante :

$$f(x) = u(v(x)) \cdot v'(x).$$

Alors on a l'égalité :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{v(a)}^{v(b)} u(y)dy.$$

Dans un calcul pratique, on raisonne formellement en posant

$$y = v(x), \text{ d'où } \quad dy = v'(x)\,dx \quad \text{et} \qquad f(x)dx = u(v(x))\,v'(x)\,dx = u(y)\,dy.$$

Enfin, on change les bornes de l'intégrale.

Exemple 23 *Calculer les primitives suivantes par un changement de variable :*

1. $\int_0^2 \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.
   On utilise le changement de variable suivant :

   $$y = v(x) = \sqrt{x}$$

   et l' on obtient :

   $$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 4\int_0^{\sqrt{2}} e^y dy \\ &= 4\left[e^y\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 4(e^{\sqrt{2}} - 1).\end{aligned}$$

2. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$.
   En posant le changement de variable $y = v(x) = \ln x$ *on a* $x = \exp v$ *et* $dv = \frac{dx}{x}$*, on écrit :*

   $$\int \frac{1}{x\ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{v} dv = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c.$$

   Cette primitive est définie sur $]0,1[$ *ou sur* $]1,+\infty[$ *(la constante peut être différente pour chacun des intervalles).*

Théorème 6 ***(Forme 2, x= u(y))***
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, continue. On suppose qu'il existe une application :*

$$u : [s,t] \longrightarrow [a,b],$$

bijective, de classe C^1 *dont la dérivée ne s'annule pas* $u(s) = a$ *et* $u(t) = b$*. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_s^t f(u(y))\; u'(y)dy.$$

Ici encore, dans un calcul pratique, on raisonne formellement en posant :

$$x = u(y), \quad \text{d'où } dx = u'(y)\ dy, \quad \text{et} \quad a = u(s),\ b = u(t).$$

Exemple 24 *Calculer les primitives suivantes par un changement de variable.*

1. $I = \int_e^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}$, $(x > 0)$.
   Posons $x = u(y) = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$ *et* $\begin{cases} y_1 = \ln e = 1. \\ y_2 = \ln e^3 = 3. \end{cases}$
   Par suite $dx = e^y dy$ *et d'où*
$$I = \int_1^3 \frac{e^y dy}{e^y y} = \int_1^3 \frac{dy}{y} = [\ln |y|]_1^3 = \ln 3.$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{2+\exp(-x)} dx$.
   Soit le changement de variable $u = \exp x$.
   Alors $x = \ln u$ *et* $du = \exp x dx$, *ce qui s'écrit aussi* $dx = \frac{du}{u}$.
   D'où
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2+\exp(-x)} dx &= \int_1^e \frac{1}{2+\frac{1}{u}} \frac{du}{u} \\ &= \int_1^e \frac{1}{2u+1} du = \left[\frac{1}{2} \ln |2u+1|\right]_1^e = \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{3}(1+2e)). \end{aligned}$$
   Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

3. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$.
   Posons le changement de variable $u = e^x$ *avec* $x = \ln u$ *et* $du = e^x dx$.
   La variable x *varie de* $x = 0$ *à* $x = 1$, *donc la variable* $u = e^x$ *varie de* $u = 1$ *à* $u = e$. *Alors*
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} \\ &= [2\sqrt{u+1}]_1^e \\ &= 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

1.1.6 Intégration des fractions

Pour calculer une intégrale, on a toujours le problème de savoir quelle méthode utiliser, est ce qu'un changement de variable (il y en a beaucoup) ou une intégration par parties **(IPP)** ou d'autres, dans la suite on va donner une série de méthodes qui concernent certaines classes de fonctions.

Primitives des fractions rationnelles : $\frac{P}{Q}$

On appelle fraction rationnelle le quotient de deux polynômes.
La plupart des primitives que l'on sait calculer formellement se ramènent à des calculs de primitives de fractions rationnelles par des changements de variable simples.

i) **Intégrale du type** $\int \frac{1}{x+\alpha}dx, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{1}{x+\alpha}dx = \ln|x+\alpha| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 25 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \frac{1}{x+3}dx = [\ln|x+3|]_0^1 = [\ln(x+3)]_0^1 = \ln(4) - \ln(3).$$

ii) **Intégrale du type** $\int \frac{1}{(x+\alpha)^n}dx, \alpha \in \mathbb{R}$ **et** $n \geq 1$:

$$\int \frac{1}{(x+\alpha)^n}dx = \frac{1}{(1-n)(x+\alpha)^{n-1}} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 26

$$\int_0^2 2\frac{1}{(x+3)^3}\ dx = \frac{2}{-2}\left[(x+3)^{-2}\right]_0^2 = \frac{16}{225}.$$

iii) **Intégrale du type** $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\ dx,$ **où** a, b, p **et** $q \in \mathbb{R}$ **:**

- Si $x^2+px+q, (\Delta > 0)$ possède des racines réelles λ_1 et λ_2 alors, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\lambda_1} + \frac{B}{x-\lambda_2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int \left(\frac{A}{x-\lambda_1}+\frac{B}{x-\lambda_2}\right)dx \\
&= \int \left(\frac{A}{x-\lambda_1}\right)dx + \int \left(\frac{B}{x-\lambda_2}\right)dx \\
&= A\ln|x-\lambda_1| + B\ln|x-\lambda_2| + c, \quad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemple 27 *Calculer* $I=\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\ dx$.

En effet la fraction rationnelle se décompose sous la forme :

$$\frac{x-1}{x^2-4}=\frac{x-1}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

et les réels a et b se déterminent par identification :

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}=\frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x^2-4)}=\frac{x-1}{(x^2-4)}$$

donc :

$$\begin{aligned} A+B&=1 \\ 2A-2B&=-1 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x-1}{(x^2-4)}\ dx &= \int_0^1 \left(\frac{1/4}{x-2}+\frac{3/4}{x+2}\right)\ dx \\
&= \left[\frac{3\ln(|x+2|)+\ln(|x-2|)}{4}\right]_0^1 \\
&= \frac{3\ln(3)}{4}-\ln(2)\,.
\end{aligned}$$

Exemple 28 *Calculer* $\int_0^2 \frac{x^4+x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4}dx$.

On fait d'abord une division Euclidienne et on trouve :

$$\frac{x^4+x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4}=x-5+\frac{18x^2+36x+24}{x^3+5x^2+8x+4}$$

et

$$x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2.$$

On va décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{18x^2 + 36x + 24}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

Et après des calculs, on obtient :

$$\frac{x^4 + x^2 + 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = x - 5 + \frac{6}{x+1} + \frac{12}{x+2} + \frac{-24}{(x+2)^2}.$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^4 + x^2 + 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}\, dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 5x + 6\ln(|x+1|) + 12\ln(|x+2|) + \frac{24}{x+2}\right]_0^2 \\ &= 12\ln(4) + 6\ln(3) - 12\ln(2) - 14.\end{aligned}$$

- Si le polynôme x^2+px+q ($\Delta = 0$) possède une racine réelle double notée μ, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\mu} + \frac{B}{(x-\mu)^2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx &= \int \left(\frac{A}{x-\mu} + \frac{B}{(x-\mu)^2}\right) dx \\ &= \int \left(\frac{A}{x-\mu}\right) dx + \int \left(\frac{B}{(x-\mu)^2}\right) dx \\ &= A\ln|x-\mu| + \frac{-B}{(x-\mu)} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 29 *Calculer la primitive suivante :*

$$\int_1^3 \frac{-x}{(x+1)^2}\, dx.$$

Soit $f(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$. *La décomposition en éléments simples de* f *s'écrit sous la forme :*

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}.$$

Par identification, on obtient $A = -1$ et $B = 1$.
Par suite

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{-x}{(x+1)^2}\, dx &= -\int_1^3 \frac{1}{x+1}\, dx + \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx \\ &= -\left[\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right]_1^3 = -\ln(4) + \ln(2) + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

▶ Si le polynôme $x^2 + px + q$ n'admet pas de racines réelles, alors on peut écrire :

$$x^2 + px + q = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

On pose $\lambda_1 = \frac{p}{2}$, $\lambda_2 = q - \frac{p^2}{4}$, on obtient :

$$x^2 + px + q = (x - \lambda_1)^2 + \lambda_2.$$

On effectue maintenant le changement de variable suivant :

$$t = \frac{x - \lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow dt = \frac{1}{\lambda_2} dx, \text{ de plus } (x - \lambda_1)^2 + \lambda_2 = \lambda_2\left(t^2 + 1\right),$$

d'où,

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{ax+b}{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx \\ &= \int \frac{a(\lambda_2 t + \lambda_1) + b}{\lambda_2^2\,(t^2+1)} \lambda_2 dt \\ &= \int \frac{At+B}{(t^2+1)} dt \\ &= \int \frac{At}{(t^2+1)} dt + \int \frac{B}{(t^2+1)} dt \\ &= \frac{A}{2} \ln\left|\left(t^2+1\right)\right| + B\arctan(t) + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{A}{2} \ln\left|\left(\left(\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 + 1\right)\right| + B\arctan\left(\frac{x-\lambda_1}{\lambda_2}\right) + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 30 *Calculer* $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^3+1}$.

Tout d'abord on remarque que

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right).$$

Donc on décompose en éléments simples la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

Et après calcul, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1}.$$

Et

$$\frac{\frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2-x+1} = \frac{-1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1}.$$

Et de même

$$\frac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\ \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}.$$

Maintenant, en posant le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\ x - \frac{1}{\sqrt{3}}$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x^3+1} &= \left[\frac{1}{3}\ln(|\ x+1) - \frac{1}{6}\ln\left(\left|x^2-x+1\right|\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\ \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^2 \\ &= \frac{\ln(3)}{6} - \frac{6\ln(2) + \sqrt{3}\pi}{18} + \frac{\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \sim 0,25. \end{aligned}$$

1.1.7 Intégrale d'un polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$

On se ramène au cas

$$I_{p,q} = \int \cos^p(x)\sin^q(x)dx,$$

avec p, et q deux éléments de $\mathbb{N}$ et il y' a trois cas à envisager :

i) **Si** $p = 2k+1$ **impaire :**
$I_{p,q} = \int (\cos^2(x))^k \sin^q(x) \cos(x) dx = \int (1-\sin^2(x))^k \sin^q(x) \cos(x) dx.$
Dans ce cas on pose le changement de variable $u = \sin(x)$ et donc

$$I_{p,q} = \int \left(1-u^2\right)^k u^q du.$$

Exemple 31 *Calculer* $I = \int \cos(x) \sin^2(x) dx$.

On pose $u = \sin(x)$ *donc* $du = \cos(x)dx$ *et par suite*

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c.$$

ii) $q = 2k+1$ **est impaire :**

$$I_{p,q} = \int \left(\sin^2(x)\right)^k \cos^p(x) \sin(x) dx = \int \left(1-\cos^2(x)\right)^k \cos^q(x) \sin(x) dx.$$

Dans ce cas, on pose le changement de variable $u = \cos(x)$ et donc

$$I_{p,q} = \int \left(1-u^2\right)^k u^q du.$$

Exemple 32 *Calculer* $\int \cos^4(x) \sin^3(x) dx$.

Il est clair ici qu'on va poser $u = \cos(x)$, *alors* $du = -\sin(x)dx$ *et donc*

$$\int \cos^4(x) \sin^3(x) dx = \int u^4 \left(u^2-1\right) du = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + c.$$

Par conséquent

$$\int \cos^4(x) \sin^3(x) dx = -\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{1}{7}\cos^7(x) + c.$$

iii) **Si** p **et** q **tout les deux paires :**
Alors dans ce cas, on est obligé à faire une linéarisation.

Exemple 33 *Calculer :*

$$I = \int \cos^2(x)\sin^2(x)dx.$$

On peut écrire

$$\cos(x)\ \sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Par suite

$$\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1-\cos(4x)),$$

et donc

$$I = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + c.$$

1.1.8 Primitive de la forme : $\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

où $ad-bc \neq 0$. Dans ce cas, on pose le changement de variable :

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Leftrightarrow y^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \frac{dy^n-b}{a-cy^n}.$$

Exemple 34 *Calculer* $I = \int \sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}\ \frac{dx}{2x-1}$.
Alors on pose le changement de variable :

$$y = \sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}} \Leftrightarrow x = \frac{y^2-1}{y^2+1} \Leftrightarrow dx = \frac{4ydy}{(1+y^2)^2}.$$

Ce qui donne :

$$I = \int \frac{4y^2dy}{(y^2-3)\,(y^2+1)}.$$

Et en décomposant en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{4u}{(u-3)(u+1)} = \frac{3}{u-1} + \frac{1}{u+1} \Rightarrow \frac{4y^2dy}{(y^2-3)\,(y^2+1)} = \frac{3}{y^2-1} + \frac{1}{y^2+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{y^2-3}dy + \int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{y}{\sqrt{3}}+1\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{y}{\sqrt{3}}-1\right| + \arctan(y) + c. \end{aligned}$$

1.1.9 Intégrale de la forme $\int F(\cos(x), \sin(x))dx$

Pour le calcul de ce genre de primitives ou intégrales, il y' a plusieurs changements de variables possibles, on utilisera généralement :

▷ Les règles de Bioche lorsqu'il s'agit d'une intégration rationnelles en sinus et en cosinus, on pose $\psi(x) = F(x)\ dx$, alors

1. si $\psi(-x) = \psi(x)$, on pose $t = \cos x$.
2. si $\psi(\pi - x) = \psi(x)$, on pose $t = \sin x$.
3. si $\psi(\pi + x) = \psi(x)$, on pose $t = \tan x$.

▷ **Dans un cas plus général**, on utilisera le changement de variable suivant :

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exemple 35 *Calculer* $I = \int \frac{1}{2+\cos(x)}dx$.

D'après le changement de variable précédent $t = \tan(\frac{x}{2})$, *on trouvera :*

$$I = \int \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + c.$$

Exemple 36 *Calculer l'intégrale suivante* $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

D'après les notations précédentes, on pose

$$t = \cos x \Longrightarrow dt = -sin(x)\ dx.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx \\
&= \int_{1/2}^{0} \frac{-dt}{1-t^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|\frac{t-1}{t+1}\right]_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\ln 3.
\end{aligned}$$

1.1.10 Exercices avec corrigés

Exercice 37 ***(Décomposition en éléments simples)***
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\ dx$,
2. $\int_2^4 \frac{x-7}{(x-1)(x+2)}\ dx$,
3. $\int_{-2}^0 \frac{4x^2}{(x-1)(x-2)^2}\ dx$,
4. $\int_{-3}^{-1} \frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}\ dx$,
5. $\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$.

Solution :

1. La décomposition partielle de cette fraction est de la forme

$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

et les réels a et b se déterminent par identification :

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+bx-2b}{(x^2-4)} = \frac{x-1}{(x^2-4)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} a+b &= 1, \\ 2a-2b &= -1. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4}\ dx &= \int_0^1 \frac{1}{4}\ \frac{1}{x-2} + \frac{3}{4}\frac{1}{x+2}\ dx \\ &= \left[\frac{1}{4}ln(x-2) + \frac{3}{4}ln(x+2)\right]_0^1 = \frac{3ln(3)}{4} - ln(2). \end{aligned}$$

2. La décomposition partielle de cette fraction est de la forme

$$\frac{x-7}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}.$$

où les coefficients a et b sont à déterminer.
• Pour trouver a, en multipliant les deux membres de l'équation par $(x-1)$, on obtient

$$\lim_{x\to 1}\left(a + \frac{b(x-1)}{x+2}\right) = a = \lim_{x\to 1}\frac{x-7}{(x+2)} = -2.$$

• Pour trouver b, en multipliant les deux membres de l'équation par $(x+2)$, on trouve

$$b = \lim_{x\to -2}\left(\frac{a(x+2)}{x-1} + b\right) = \lim_{x\to -2}\frac{x-7}{(x-1)} = 3.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{x-7}{(x-1)(x+2)}\,dx &= \int_2^4 -\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}\,dx\\ &= \left[-2\ln(x-1) + 3\ln(x+2)\right]_2^4\\ &= 3\ln(6) - 3\ln(4) - 2\ln(3).\end{aligned}$$

3. La décomposition partielle de la fraction est de la forme

$$\frac{4x^2}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x-2}$$

où a, b et c sont des coefficients à déterminer.

• Pour déterminer a, nous multiplions les deux membres de l'équation par $(x-1)$ et l'on obtient

$$a = \lim_{x\to 1}\left(a + \frac{b(x-1)}{(x-2)^2} + \frac{c(x-1)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{4x^2}{(x-2)^2} = 4.$$

Pour déterminer b, nous multiplions les deux membres de l'équation par $(x-2)^2$ et l'on aboutit à

$$b = \lim_{x\to 2}\left(\frac{a(x-2)^2}{x-1} + b + \frac{c(x-2)^2}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{4x^2}{x-1} = 16.$$

De la même manière pour trouver c, nous multiplions les deux membres de l'équation par $(x-2)$ et l'on obtient

$$a + c = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a(x-2)}{x-1} + \frac{b}{(x-2)} + c\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{(x-1)(x-2)} = 4.$$

Puisque $a = 4$ nous avons

$$c = 4 - a = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\frac{4x^2}{(x-1)(x-2)^2}dx &= \int_{-2}^{0}\frac{4}{x-1}dx+\frac{16}{(x-2)^2}\ dx\\ &= \left[4\ln(|x-1|)-16\frac{1}{x-2}\right]_{-2}^{0}=4(1-\ln(3)).\end{aligned}$$

4. La décomposition est de la forme :

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{a}{(x-1)}+\frac{b}{(x-2)^2}+\frac{\mathrm{c}}{(x-2)}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}&\tfrac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}=\tfrac{a}{(x-1)}+\tfrac{b}{(x-2)^2}+\tfrac{c}{(x-2)}\\ &=\tfrac{c(x-1)(x-2)+a(x-2)^2+b(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}\\ &=\tfrac{(a+c)x^2+(-3c-4a+b)x+2c+4a-b}{(x-1)(x-2)^2}.\end{aligned}$$

D'où, par identification on aboutit à un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a+c=0\\ -3c-4a+b=1\\ 2c+4a-b=2\end{cases}$$

dont la solution est

$$a=3, b=4, c=-3.$$

D'où après décomposition en éléments simples, on a

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-1}\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}\ dx &= \int_{-3}^{-1}\left(\frac{3}{(x-1)}+\frac{4}{(x-2)^2}-\frac{3}{(x-2)}\right)\ dx\\ &= \left[-\frac{4}{x-2}+3\ln(|x-1|)-3\ln(|x-2|)\right]_{-3}^{-1}\\ &= 3\ln(5)-3\ln(4)-3\ln(3)+3\ln(2)+\frac{8}{15}\sim -0,013.\end{aligned}$$

5. La décomposition en éléments simples nous donne

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)^2}=\frac{a}{x}+\frac{bx+b_1}{1+x^2}+\frac{cx+c_1}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

En faisant des calculs, on obtient $a = 1, b_1 = c_1 = 0$ et $b = c = -1$, par suite

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)^2} - \frac{1}{x} = \frac{bx + b_1}{1 + x^2} + \frac{cx + c_1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

et après identification des termes, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1}\right]_1^2 \\ &= -\frac{10ln(5) - 30ln(2) + 3}{20} \sim 0.085.\end{aligned}$$

Exercice 38 ***(Règles de Bioche)***
Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\, dx.$$

Solution :
Nous allons utiliser le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$.
On a donc $x = \arctan \frac{t}{2}$ *ainsi que les formules suivantes :*

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Comme x *varie de* 0 *à* $\frac{\pi}{2}$, *on a* t *qui varie de* 0 *à* 1.
Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2+2t} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt \\ &= \left[\frac{-2}{1+t}\right]_0^1 = 1.\end{aligned}$$

Exercice 39 ***(Changement de variable)***
Utilisez un changement de variable approprié pour trouver les intégrales suivantes :

1. $\int (x+1)(x-2)^9\, dx$,

2. $\int (2x+3)\sqrt{2x-1}\ dx$,
3. $\int \frac{10x^3-5x}{\sqrt{x^4-x^2+6}}\ dx$,
4. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$,
5. $\int (\cos x)^{2022} \sin x\ dx$.

Solution :

1. En posant $u = x-2, u+3 = x+1$, on aura $du = dx$.
   Par suite
$$\begin{aligned}\int (x+1)(x-2)^9 dx = \int (u+3)u^9\ du &= \int \left(u^{10}+3u^9\right)\ du \\ &= \frac{1}{11}u^{11} + \frac{3}{10}u^{10} + c \\ &= \frac{1}{11}(x-2)^{11} + \frac{3}{10}(x-2)^{10} + c.\end{aligned}$$

2. En effectuant le changement de variable suivant :
   $u = 2x-1$, $u+4 = 2x+3$ et $dx = \frac{1}{2}du$, on obtient
$$\begin{aligned}\int (2x+3)\sqrt{2x-1}dx &= \frac{1}{2}\int (u+4)\sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du + 2\int u^{\frac{1}{2}}\ du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 2\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{5}(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{5}(2x-1)^2\sqrt{2x-1} + \frac{4}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + c \\ &= (2x-1)\sqrt{2x-1}\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{5} + \frac{4}{3}\right) + c \\ &= \left(\frac{2}{5}x + \frac{17}{25}\right)(2x-1)\sqrt{2x-1} + c.\end{aligned}$$

3. En posant $u = x^4 - x^2 + 6$, alors on aura $du = (4x^3-2x)\ dx$.
   Par conséquent
$$\begin{aligned}\int \frac{10x^3-5x}{\sqrt{x^4-x^2+6}}dx &= \frac{5}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\ du \\ &= \frac{5}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\ du = \frac{5}{2}\ 2u^{\frac{1}{2}} + c \\ &= 5\sqrt{x^4-x^2+6} + c.\end{aligned}$$

4. On effectue le changement de variable suivant :

$$u = 1 - x^2 \quad \Longrightarrow \quad du = -2x\ dx.$$

L'intégrale d'origine devient

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\int \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ &= -\sqrt{u} \\ &= -\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

5. Nous allons utiliser le changement de variable $u = \cos x$,

$$\frac{du}{dx} = -sin(x) \quad \Rightarrow \quad du = -sin(x)\ dx.$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'intégrale sous ce changement de variable. Alors

$$\int (\cos x)^{2022} \sin x\ dx = \int u^{2022}(-du) = -\frac{1}{2023}u^{2023}+c = -\frac{1}{2023}(\cos x)^{2023}+c.$$

Exercice 40 ***(Intégration avec un changement de variable)***
En effectuant un changement de variable, donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ dx.$
2. $\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos\left(x^2\right)\ dx,$
3. $\int_0^3 \sqrt{x+2}\ dx,$
4. $\int_0^{\pi/3} \cos^2 x\ \ \sin x\ dx,$
5. $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\ dx,$
6. $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x+1}\ dx.$

Solution :

1. *Nous allons utiliser le changement de variable $u = 1 - x^2$,*

$$\frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow du = -2xdx \Rightarrow -\frac{1}{2}du = x\ dx, \quad x = 0 \to u = 1, \quad x = 1 \to u = 0.$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'intégrale sous ce changement de variable, à savoir

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}du = -\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

2. *On pose $u = x^2$ et donc $du = 2x\ dx$.*
   Comme x varie de $\sqrt{\pi}$ à $2\sqrt{\pi}$ on a u qui va varier de π à 4π.
   Ainsi, on aura

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos\left(x^2\right)\ dx = \int_{\pi}^{4\pi}\cos(u)du = [\sin]_{\pi}^{4\pi} = \sin(4\pi) - \sin(\pi) = 0.$$

3. *On utilise le changement de variable $y = \sqrt{x+2}$, par suite $dy = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx$ et donc $dx = \frac{dx}{2y}$. Par conséquent*

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{x+2}\ dx &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} 2y^2\ dy\\ &= \left[\frac{2}{3}y^3\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}}\\ &= \frac{2}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

4. *Posons $u = \cos x \Leftrightarrow\ du = -\sin x dx$ et $\begin{cases} u_1 = \cos 0 = 1 \\ u_2 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\end{cases}$.*
   Par suite
   $\int_0^{\pi/3}\cos^2 x\ \ \sin x\ dx = \int_0^{1/2} u^2(-du) = \left[-\frac{u^3}{3}\right]_1^{1/2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{24}$.

5. *Posons $\ x^3+1 = y^2$ alors $3x^2dx = 2y\ dy$, ce qui nous donne $x^2dx = \frac{2}{3}y\ dy$. Pour*

$$x = 0 \mapsto y = \sqrt{0^3+1} = 1x = 2 \mapsto y = \sqrt{2^3+1} = 3.$$

Il résulte que

$$\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\ dx = \int_1^3 \frac{2}{3}y\sqrt{y^2}\ dy = \frac{2}{3}\int_1^3 y^2\ dy = \frac{52}{9}.$$

6. *On sait que* $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan(\mathrm{x}) + c$ *et on simplifie la fraction rationnelle de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+x+1} &= \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]} \\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}.\end{aligned}$$

Par suite, on utilise le changement de variable suivant pour terminer le calcul :

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad dy = \frac{2}{\sqrt{3}}dx.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^2+x+1}\, dx &= \frac{4}{3}\int_1^2 \frac{1}{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}\, dx \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{[y^2+1]}\, dy \\ &= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(y)\right]_{\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}} \sim 0.20.\end{aligned}$$

1.2 Intégrales doubles

Ce chapitre est une partie pratique destinée à permettre de calculer les intégrale doubles. Les deux principaux outils de calcul sont le changement de variables et le théorème de Fubini.

On fixe un repère orthonormé direct de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ a donc pour coordonnées $M(x, y, z)$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue que l'on suppose positive pour commencer. L'équation $z = f(x, y)$ définit donc une surface S. On fixe une partie D du plan $z = 0$ puis on s'intéresse au volume de l'ensemble des points de l'espace compris entre D et la surface S, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont la coordonnée z est comprise entre 0 et $f(x, y)$, autrement dit l'ensemble

$$V := \{(x, y, z) \mid (x, y, 0) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Les intégrales doubles et triples ont des applications techniques pour déterminer les surfaces, les masses, les forces de régions bidimensionnelles, les volumes, les valeurs moyennes des fonctions, les centres de masse et l'aire des surfaces.

Ces intégrales sont importantes pour deux raisons : premièrement, parce qu'elles apparaissent naturellement dans de nombreuses applications et deuxièmement parce que dans de nombreuses situations, de nombreuses intégrales doubles en coordonnées rectangulaires peuvent être évaluées plus facilement si elles sont converties en coordonnées polaires.

Proposition 41 *Soit f une fonction à deux variables continue sur D, alors*

- $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ *représente le volume algébrique sous le graphe de f .*

- $\iint_D |f(x, y)|\, dxdy$ *représente le volume sous le graphe de f .*

1.2.1 Propriétés des intégrales doubles

Proposition 42 *Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.*

(i) ***Aire(D) :*** *Si $f(x, y) = 1$, alors :*

$$\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy.$$

(ii) ***Positivité :*** *Si $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in D$, alors*

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \geq 0.$$

(iii) ***Linéarité :****Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iint_D (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\ dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\ dxdy + \mu \iint_D g(x,y)\ dxdy.$$

(iv) ***Relation de Chasles :*** *Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 =$ courbe ou point ou $\varnothing$, alors*

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\ dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\ dxdy.$$

(v)

$$\left| \iint_D f(x,y)\ dxdy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\ dxdy.$$

(vi) ***Monotonie :*** *Si $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$, alors*

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy \leqslant \iint_D g(x,y)\ dxdy.$$

1.2.2 Théorème de Fubini

Le théorème de Fubini est un outil clé pour le calcul des intégrales multiples.

Il permet de calculer des intégrales doubles à l'aide d'intégrales simples et les intégrables triples à l'aide des intégrales doubles. En effet, le mathématicien italien Guido Fubini a démontré les résultat important suivant au début du XXème siècle :


Guido Fubini (1879-1943)

Guido Fubini (19 janvier 1879 - 6 juin 1943) est un mathématicien italien, célèbre notamment pour ses travaux sur les intégrales, en particulier le théorème de Fubini.

Théorème 7 ***(Théorème de Fubini pour les rectangles fermés)*** *Soient* $D = [a,b] \times [c,d]$, $(a < b, c < d)$ *un rectangle fermé du plan* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors* f *est intégrable sur* D *et on a*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{dxdy} = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{dy}\right]\mathrm{dx} = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{dx}\right]\mathrm{dy}.$$

Exemple 43 *Calculer l'intégrale suivante :* $\iint_D (x-2y)\ dxdy$ *sur le domaine donné par*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 3\right\}.$$

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-2y)\ dxdy &= \int_{-1}^{3} \left(\int_0^1 (x-2y)\ dx\right) dy \\
&= \int_{-1}^{3} \left[\frac{x^2}{2} - 2yx\right]_0^1 dy \\
&= \int_{-1}^{3} \left[\frac{1}{2} - 2y\right]\ dy = \left[\frac{1}{2}y - y^2\right]_{-1}^{3} = -6.
\end{aligned}$$

Proposition 44 *Si* $f(x,y) = g(x)h(y)$ *avec* $D = [a,b] \times [c,d], a < b$ *et* $c < d$, *on a*

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy = \left[\int_a^b g(x)dx\right] \times \left[\int_c^d h(y)dy\right].$$

Exemple 45 *Calculer l'intégrale suivante :* $\int_3^4 \int_{-1}^0 xe^y\ dxdy$.
Dans ce cas : $g(x) = x$ *et* $h(y) = e^y$ *et donc*

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \int_{-1}^0 xe^y\ dxdy &= \left(\int_{-1}^0 x\ dx\right) . \left(\int_3^4 e^y\ dy\right) \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 [e^y]_3^4 = \frac{e^3 - e^4}{2}.
\end{aligned}$$

Théorème 8 ***(Théorème de Fubini sur des domaines non rectangulaires)***
Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$.
L'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ se calcule par l'une ***ou*** *l'autre des façons suivantes :*

- ***(Forme 1)*** *Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / u(x) \leq y \leq v(x),\ a \leq x \leq b\}$ alors*

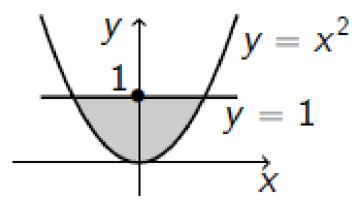
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right] dx.$$

- ***(Forme 2)*** *Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ u(y) \leq x \leq v(y),\ c \leq y \leq d\}$ alors*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Si les deux dernières représentations sont possibles, les deux résultats sont évidemment ***égaux****.*

Exemple 46 *(**Forme 1**)*
Calculer l'intégrale double suivante $\iint_D y\ dxdy$ où D est la partie du plan Oxy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas et par la droite $y = 1$ en haut.



On peut décrire D comme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1], y \in \left[x^2, 1\right]\right\}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\iint_D ydxdy &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} y\ dy\right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(1 - x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Exemple 47 *(**Forme 1**)*
Calculer l'intégrale double

$$I = \int_0^3 \left(\int_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx.$$

Calculons d'abord l'intégrale interne (entre parenthèses)

$$\begin{aligned} I = \int_0^3 \left(\int_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy \right) dx &= \int_0^3 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^3 \left(x^2 x^2 + \frac{\left(x^2\right)^3}{3} \right) dx \\ &= \int_0^3 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx. \end{aligned}$$

Intégrons maintenant la fonction obtenue de 0 *à* 3 *:*

$$I = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right]_0^3 = \frac{5346}{35}.$$

Exemple 48 *(**Forme 1**)*
Calculer l'intégrale $\iint_D xy \ dxdy$ *sur le domaine*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1 \right\}.$$

En effet, on peur écrire le domaine D *sous cette forme*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x \right\}.$$

Par suite,

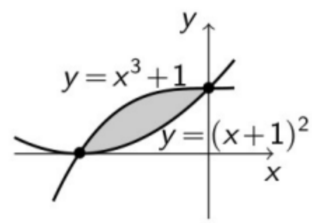
$$I = \iint_D xy \ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy \ dy \right) dx.$$

$I = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{-x(1-x)^3}{6} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} \mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^4}{24} \right]_0^1 = \frac{1}{24}.$

Exemple 49 *(**Forme 1**)*
Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ *délimité par les courbes d'équations* $y = x^2 + 2x + 1$ *et* $y = x^3 + 1$.

On constate rapidement que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ x^2+2x+1 \le y \le x^3+1\}$$



D'après le ***théorème de Fubini****, on a*

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(D) = \iint_D dxdy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^{0} \\
&= -\left(\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 \right) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Exemple 50 *(* ***Forme 2****)*
Calculer l'aire de la région du plan suivante

$$D = \left\{ (x,y) \mid y \leqslant x \leqslant y^2, 1 \leqslant y \leqslant 2 \right\}.$$

Par définition cette aire est donnée par l'intégrale de la fonction constante égale à 1 sur le domaine D.
On calcule ensuite par tranche l'intégrale obtenue à savoir

$$\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \int_1^2 \left(\int_y^{y^2} dx \right) dy \\
&= \int_1^2 \left(y^2 - y \right) dy \\
&= \left[y^3/3 - y^2/2 \right]_1^2 \\
&= 7/3 - 3/2 \\
&= 5/6.
\end{aligned}$$

Exemple 51 *Calculer l'aire du domaine suivant :*

$$D_1 : \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; x+y \leq 1\}.$$

En effet, le domaine D_1 représente un triangle rectangle et il peut être présenté par :

$$D_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1,\; 0 \leq y \leq 1-x\Big\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} Air(D_1) = \iint_{D_1} dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} dy\right) dx \\ &= \int_0^1 (1-x)\; dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.2.3 Changement de variables dans les intégrales doubles

On introduit maintenant des changements de variables particulièrement utiles. Le changement de variables est un procédé qui consiste à remplacer des variables par de nouvelles. C'est une méthode très utilisée en analyse pour l'étude des intégrales.

Le cadre général du problème est le suivant. Soit f une fonction

$$\begin{aligned} f: \quad D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 9 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et*

$$\begin{aligned} \varphi : \Delta \subset U &\to D \subset V \\ (u,v) &\to (x,y) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) \end{aligned}$$

une bijection de classe C^1 du domaine $\triangle$ sur le domaine D, telle que $\det J_\varphi(u,v) \neq 0$ *où $J_\varphi(u,v)$ est* ***la matrice Jacobienne*** *de φ définie par*

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

det $J_\varphi(u,v)$ *est appelé le* ***Jacobien*** *de* φ *donné par*

$$\det\ J_\varphi(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v).$$

Si f *est une fonction intégrable sur* $\varphi(\Delta)=D$ *alors*

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta (f\circ\varphi)(u,v)\,|\det\ J_\varphi(u,v)|\ dudv.$$

Exemple 52 *Calculer l'intégrale double suivante :* $\iint_D (3y)^2dxdy$ *où*

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,-2\le 2x+y\le 1\ et-3\le x-y\le 2\right\}.$$

On utilise le changement de variables suivant :
$u=2x+y$ *et* $v=x-y$ *alors* $(x,y)=(\frac{u+v}{3},\frac{u-2v}{3})$.
La matrice Jacobienne est donnée comme suit :

$$J_\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow |det\ J_\varphi|=\frac{1}{3}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\iint_D (3y)^2dxdy &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{2}\int_{-2}^{1}(u-2v)^2\ dudv\\ &= \frac{1}{9}\int_{-3}^{2}\left[(u-2v)^3\right]_{-2}^{1}\ dv\\ &= \frac{1}{9}\int_{-3}^{2}\left[(1-2v)^3-(-2-2v)^3\right]dv\\ &= \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{8}(3-2v)^4+\frac{1}{8}(-2-2v)^4\right]_{-3}^{2}=\frac{140}{3}.\end{aligned}$$

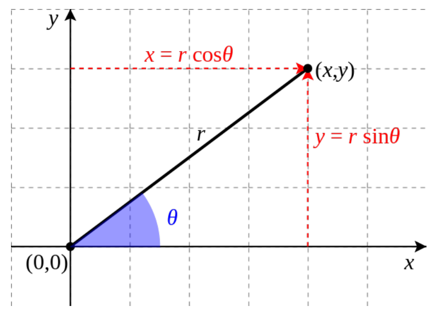
1.2.4 Changement de variables en coordonnées polaires

En géométrie plane, le système de coordonnées polaires est utilisé pour donner une description plus simple de certaines courbes (et surfaces).
On peut appliquer la transformations des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires si le domaine présente **une symétrie circulaire** et que la fonction présente des caractéristiques particulières.

Le changement de variables en coordonnées polaires consiste à poser

$$(x,y) = (rcos(\theta), rsin(\theta)).$$

En effet, tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire sous la forme $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in I = [0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$, et de manière unique si $(x,y) \neq 0$.
Les variables r et θ s'appellent les coordonnées polaires de (x,y).



Théorème 10 ***(Intégrales doubles en coordonnées polaires)***
Soit f une fonction continue sur un domaine $D = \varphi(\Delta)$ de $\mathbb{R}^2$ avec $\Delta \subset \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ et soit φ une fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\longmapsto (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta). \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne de φ est

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

et det $J_\varphi = r$.
Alors, on obtient :

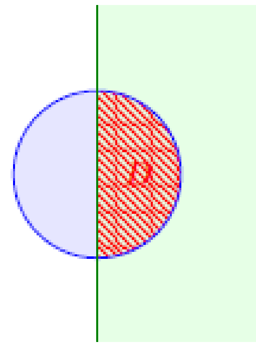
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ drd\theta.$$

Pour illustrer ce théorème, considérons les exemples suivants :

Exemple 53 *Calculer*

$$\iint_D x\ dxdy \text{ où } D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\right\}.$$

Le domaine D est l'intersection du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 et du domaine à droite de l'axe Oy. En utilisant les coordonnées polaires, on trouve que r est compris entre 0 et 1 et que θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

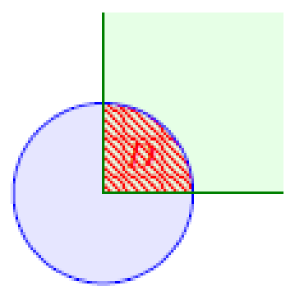


On a donc $\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\ \mid \quad 0 \leq r \leq 1 \ \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.
Par suite,

$$\iint_D x \ dxdy = \iint_\Delta r^2 \cos(\theta) \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1 r^2 \ \mathrm{d}r\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \mathrm{d}\theta\right)$$
$$= \left(\int_0^1 \frac{r^3}{3} \ \mathrm{d}r\right)[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$$

Exemple 54 *Calculer*
$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0 \ \text{ et } y \geq 0\}$.

On va passer en coordonnées polaires. Le domaine D est l'intersection du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 et du domaine à droite de l'axe Oy et en haut de l'axe Ox, c'est-à-dire que r est compris entre 0 et 1 et que θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



On a donc $\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\ \mid \quad 0 \leq r \leq 1 \ \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.
Et donc,

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \iint_\Delta \frac{r^3}{r^2} \cos(\theta) \ \sin(\theta) \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1 r \ \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \ \mathrm{d}\theta\right).$$

D'où, il s'en suit que

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \times \left[\frac{1}{2}(\sin\theta)^2\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Exemple 55 *Calculer l'aire des domaines suivants :*

a) $D_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$,

b) $D_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-2x \leq 3\}$.

Solution :

a) Le domaine représente le demi-disque supérieur centré en $(0,0)$ *et de rayon* 1. *On passe au changement de variables en coordonnées polaires et on obtient*

$$\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\ |\ \ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 1\}.$$

Par conséquent,

$$Air(D_1) = \iint_{D_1} dxdy = \iint_{\Delta} r\ d\theta dr \ \ = \ \int_0^1 \int_0^{\pi} r\ d\theta dr = \frac{\pi}{2}.$$

b) Le domaine D_2 *représente un disque centré en* $(1,0)$ *et de rayon* 2. *On pose le changement de variables suivant :*

$$x = 1 + r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Par suite $J_{\varphi} = r$ *ainsi*

$$\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[\ |\ \ 0 \leq r \leq 2\}.$$

Par conséquent

$$Air(D_2) = \iint_{D_2} dxdy = \iint_{\Delta} d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = 4\pi.$$

1.2.5 Exercices avec corrigés

Exercice 56 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y) dxdy.$$

Solution :
Méthode 1 : *On fixe x et on intègre par rapport à y, alors on obtient*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y) dxdy \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) + \cos(x-2y)\ dy \right) dx \\
&= \int_0^{\pi} \left([-\cos(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin(x-2y)]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) dx \\
&= \int_0^{\pi} \left(-\cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x-\pi) + \frac{1}{2}\sin(x) \right) dx \\
&= \left[-\sin(x+\frac{\pi}{2}) + \sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x-\pi) + \frac{1}{2}\cos(x) \right]_0^{\pi} = 2.
\end{aligned}$$

Méthodes 2 : *On fixe y et on intègre par rapport à x, alors on obtient*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y) dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y)\ dx \right) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([-\cos(x+y)]_0^{\pi} + [\sin(x-2y)]_0^{\pi} \right) dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\pi+y) + \cos(y) + \sin(\pi-2y) - \sin(-2y) dy \\
&= \left[-\sin(\pi+y) + \sin(y) - \frac{1}{2}\cos(\pi-2y) + \frac{1}{2}\cos(\pi-2y) + \frac{1}{2}\cos(-2y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.
\end{aligned}$$

Exercice 57
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^{1}\int_0^2 (100-6x^2y)\, dxdy,$
2. $\iint_D \cos(xy)\ dxdy$ *où* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2x}\right\}.$

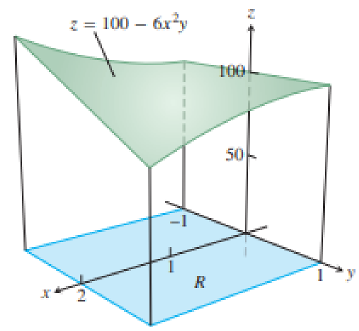
Solution :

1. *Par un calcul direct, on trouve*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_0^2 \left(100-6x^2y\right) dxdy &= \int_{-1}^{1} \left[100x - 2x^3y\right]_{x-0}^{x-2} dy \\
&= \int_{-1}^{1} (200-16y)dy = \left[200y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 400.
\end{aligned}$$

En inversant l'ordre d'intégration, on obtient ***le même résultat***.

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 \left(100 - 6x^2y\right) dydx = \int_0^2 \left[100y - 3x^2y^2\right]_{y-1}^{y-1} dx$$
$$= \int_0^2 \left[\left(100 - 3x^2\right) - \left(-100 - 3x^2\right)\right] dx$$
$$= \int_0^2 200\ dx = 400.$$



2. *D'après le théorème de Fubini, on a*

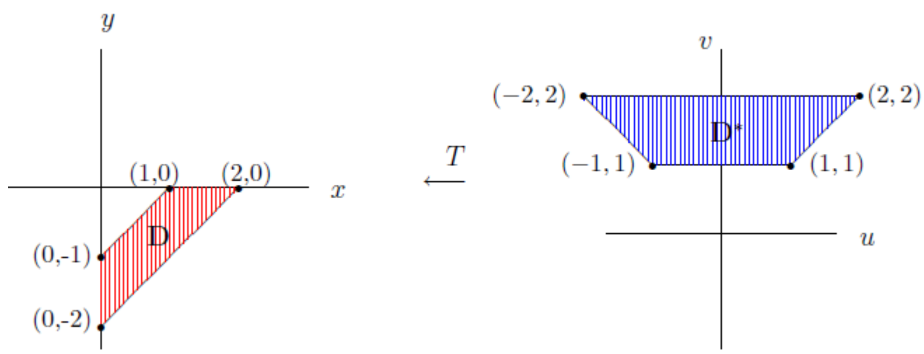
$$\int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy)dy\right] dx = \int_1^2 \left[y\ \frac{\sin(xy)}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2x}} dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\ dx = [ln(x)]_1^2$$
$$= ln(2).$$

Exercice 58 ***(Changement de variables)***
Calculer l'intégrale suivante $\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dxdy$ *Où* D *est la région délimitée par le trapèze dont les sommets sont* $(1,0), (2,0), (0,-2)$ *et* $(0,-1)$.
Solution.
Posons le changement de variables suivant :

$$x = \frac{u+v}{2} = \varphi_1(u,v), \qquad y = \frac{u-v}{2} = \varphi_2(u,v).$$

Ainsi, on obtient $det(J_\varphi) = \frac{1}{2}$.
Par suite, on aura un nouveau domaine défini par :

$$D^* = \left\{(u,v);\ 1 \leq v \leq 2, -v \leq u \leq v\right\}.$$



(x,y)	(u,v)
$(1,0)$	$(1,1)$
$(2,0)$	$(2,2)$
$(0,-1)$	$(-1,1)$
$(0,-2)$	$(-2,2)$

Finalement,

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dxdy = &= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \left|-\frac{1}{2}\right| dudv \\ &= \int_1^2 \frac{v}{2} e^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v} dv \\ &= \int_1^2 \frac{v}{2}\left(e-e^{-1}\right) dv \\ &= \left(e-e^{-1}\right)\frac{v^2}{2}\Big|_1^2 \\ &= \frac{3}{4}\left(e-e^{-1}\right).\end{aligned}$$

Exercice 59 *(**Coordonnées Polaires**)*
Utilisez les coordonnées polaires pour évaluer

1. $\iint_D e^{(x-2)^2+(y-3)^2} dxdy$ *où le domaine d'intégration* D *est le demi cercle de centre* $(2,3)$ *et rayon* $r = \frac{3}{2}$,
2. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)\ dydx$,
3. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dydx$.

Solution :

1. *On peut représenter le domaine* D *de la manière suivante :*

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq \frac{9}{4}\right\}.$$

Posons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta, \\ y = 3 + r\sin\theta. \end{cases}$$

On obtient

$$\iint_D e^{(x-2)^2+(y-3)^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_\Delta re^{r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta,$$

où

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[, \quad 0 \leq r \leq \frac{3}{2}\right\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \iint_\Delta re^{r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{2}} re^{r^2}\ drd\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{3}{2}} re^{r^2}\ dr\right) \\ &= 2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \pi(e^{\frac{9}{4}} - 1). \end{aligned}$$

2. *La région D est définit comme suit*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0\right\}.$$

Par suite, on trouvera en utilisant les coordonnées polaires

$$\begin{gathered} \pi \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{gathered}$$

et ainsi l'intégrale devient

$$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \cos\left(x^2+y^2\right)dydx = \int_\pi^{2\pi}\int_0^1 r\cos\left(r^2\right)drd\theta.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \cos\left(x^2+y^2\right)dydx &= \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2}\sin\left(r^2\right)\Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_\pi^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(1)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\sin(1). \end{aligned}$$

3. Un calcul simple en coordonnées polaires nous donne

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}dydx=\int_0^{\pi}\int_0^1\left(r^3\right)rdrd\theta=\int_0^{\pi}\frac{1}{5}d\theta=\frac{\pi}{5}.$$

Exercice 60 *Calculer l'intégale suivante :*

$$\iint_D x^2dxdy \qquad où\ D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x^2+4y^2\leq 1\right\}.$$

Solution :
On procède par deux méthodes différentes :
►**Résolution par un changement de variables :**
On fixe y et on intègre par rapport à x

$$\begin{aligned} x^2+4y^2 &\leq 1\\ x^2 &\leq 1-4y^2\\ -\sqrt{1-4y^2}\leq x &\leq \sqrt{1-4y^2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} 1-4y^2\geq 0 \Rightarrow \quad 4y^2\leq 1 \Rightarrow &\quad y^2\leq\frac{1}{4}\\ \Rightarrow &\quad -\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \iint_D x^2dxdy &= \int_{-1/2}^{1/2}\left(\int_{-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}}x^2dx\right)dy\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-4y^2}}^{\sqrt{1-4y^2}}dy\\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\frac{2\left(1-4y^2\right)\sqrt{1-4y^2}}{3}dy. \end{aligned}$$

Soit le changement de variable suivant : $2y=sin\theta$, alors $2dy=cos\theta d\theta$.
Pour $y=-\frac{1}{2}$, on obtient $-1=sin\theta$ et donc $\theta=-\pi/2$.
Pour $y=1/2$, on obtient $1=sin\theta$ et donc $\theta=\pi/2$.

D'où

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{3}\left(1-\sin^2\theta\right)\sqrt{1-\sin^2\theta}\ \frac{1}{2}\cos\theta\ d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3}\cos^4\theta d\theta \\
&\quad = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)^2 d\theta\right. \\
&\quad = \frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right) d\theta \\
&\quad = \frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right) d\theta\right. \\
&= \frac{1}{12}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}\theta+\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

► **Résolution par un changement de variables en coordonnées polaires :**

Posons le changement de variables suivant :

$$x = r\ cos\ \theta \qquad \text{et} \qquad y = \frac{r}{2}\sin\theta.$$

On a donc

$$\Delta = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi)\ |\ \ 0\leq r\leq 1\right\}.$$

Ainsi, on obtient $det\ J_\varphi = \frac{r}{2}$.

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 dxdy &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\ d\theta dr \\
&= \left(\int_0^1 r^3\ dr\right).\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\cos(2\theta)\ d\theta\right) \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Exercice 61 *Calculer l'intégrale suivante :*

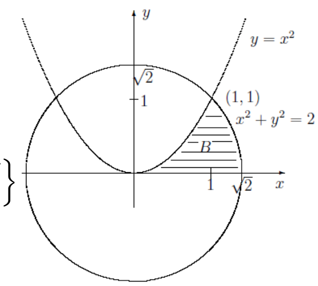
$$\iint_B xy\ dxdy,$$

où

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ x^2+y^2 \leq 2,\ y \leq x^2\right\}.$$

Solution : *On peut séparer l'ensemble B comme suit*

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\} \\ B_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}\right\} \end{aligned}$$



Par suite

$$\begin{aligned} \iint_B xy\ dxdy &= \iint_{B_1} xydxdy + \iint_{B_2} xy\ dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} xy\ dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} xy\ dydx \\ &= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2} dx + \int_1^{\sqrt{2}} x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^5}{2}dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{2}\left(2-x^2\right)\ dx \\ &= \frac{1}{12} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{2}{2} - \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

1.3 Intégrales triples

Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $V \subset \mathbb{R}^3$. L'intégrale sur V de $f : V \to \mathbb{R}$ s'appelle une intégrale triple, on la note

$$\iiint_V f = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz.$$

En coordonnées cartésiennes, l'élément de volume est $dxdydz$ et le volume d'un domaine V peut donc se noter par $Volume(V) := \iiint_V dxdydz$.
Le principe des intégrales triples est le même que pour celui des intégrales doubles.
Signification géométrique
Le graphe de f est une hyper-surface de $\mathbb{R}^4$ (difficile à dessiner)

- $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$ quadri-volume sous le graphe "algébrique" sous le graphe de f.
- $\iiint_V |f(x, y, z)|dxdydz =$ quadri-volume sous le graphe de f.

1.3.1 Propriétés des intégrales triples

Soit V une partie bornée de $\mathbb{R}^3$.

1. **Volume** (V) : si $f(x, y, z) = 1$, alors
$$\text{Volume}(V) = \iiint_V dxdydz.$$
2. **Positivité :** Si $f(x, y, z) \geq 0$ pour $(x, y, z) \in V$, alors
$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz \geq 0.$$
3. **Linéarité :** Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a
$$\iiint_V (\lambda f(x, y, z)+\mu g(x, y, z))\, dxdydz = \lambda \iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz+\mu \iiint_V g(x, y, z)\, dxdydz.$$
4. **Relation de Chasles :** Si $V_1 \cap V_2 =$ surface ou courbe ou point ou $\varnothing$, alors
$$\iiint_{V_1\cup V_2} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dxdydz+\iiint_{V_2} f(x, y, z)\, dxdydz.$$

1.3.2 Théorème de Fubini pour les intégrales triples

Théorème 11 *(Théorème de Fubini)*
Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. ***(Forme 1)*** *Cas où $V = [a,b] \times [c,d] \times [s,t]$, $a < b, c < d$ et $s < t$, on a*

$$\begin{aligned}\iiint_V f(x,y,z)dxdydz &= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_s^t f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx \\ &= \int_s^t \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)dx\right] dy\right] dz = \cdots\end{aligned}$$

2. ***(Forme 2)*** *Cas où $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in \Delta,\ u(x,y) \le z \le v(x,y)\}$, où Δ est la projection orthogonale de V sur le plan (Oxy), alors*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_\Delta \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy.$$

   (l'ordre d'intégration est forcé).

3. ***(Forme 3)*** *Cas où $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ s \le z \le t, (x,y) \in \Delta(z)\}$ où $\Delta(z)$ est l'intersection de V avec le plan $z = C^{te}$, alors*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_s^t \left[\iint_{\Delta(z)} f(x,y,z)dxdy\right] dz.$$

   (l'ordre d'intégration est forcé).

Exemple 62 *(**Forme 1**)*
Calculer l'intégrale suivante $\iiint_V (x - y + 2z)\ dxdydz$ où le domaine

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3 \text{ et } 2 \le z \le 3\right\}.$$

Comme l'ordre d'intégration n'est pas forcé. Par exemple, on commence à *intégrer par rapport à la variable z et donc*

$$\begin{aligned}\iiint_V (x-y+2z)\ dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^3 \left(\int_2^3 (x-y+2z)\ dz\right) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^3 \left[xz-yz+z^2\right]_2^3 dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^3 (x-y+5) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left[xy-\frac{y^2}{2}+5y\right]_0^3 dx \\ &= \int_0^1 (3x+\frac{21}{2}) dx = \left[\frac{3x^2}{2}+\frac{21}{2}x\right]_0^1 = 12.\end{aligned}$$

Exemple 63 ***(Forme 2)***
Calculer le volume du domaine suivant :

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in D = [0,1]^2,\ 0 \le z \le x\right\}.$$

$$\begin{aligned}Volume(V) = \iiint_V dxdydz &= \iint_D \left[\int_0^x dz\right] dxdy \\ &= \iint_D x\ dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x\ dxdy \\ &= \left[\int_0^1 x\ dx\right] \times \left[\int_0^1 dy\right] \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 64 ***(Forme 3)***
Calculer l'intégrale suivante : $\iiint_V xz\ dxdydz$*, où le domaine*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \le x \le y-z,\ z \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\iiint_V (zx)dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^{y-z} xz\ dx\right) dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_z^1 \frac{z(y-z)^2}{2} dy\right) dz \\
&= \int_0^1 \left[\frac{z(y-z)^3}{6}\right]_z^1 dz \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (z(1-z)^3)\ dz \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 z - 3z^2 + 3z^3 - z^4\ dz = \frac{1}{120}.
\end{aligned}$$

1.3.3 Intégrale sur un parallélépipède, cas des variables séparables

C'est l'analogue du résultat obtenu pour les intégrales doubles.

Proposition 65 *Soit V le parallélépipède $[a,b]\times[c,d]\times[s,t]$ où $a<b, c<d, s<t$. Si*

$$\forall (x,y,z)\in V \quad f(x,y,z) = g(x)h(y)l(z)$$

où g, h, l sont des fonctions continues sur $[a,b], [c,d]$ et $[s,t]$ respectivement. Alors

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)dy\right)\cdot\left(\int_s^t l(z)dz\right).$$

Exemple 66 *Calculer l'intégrale suivante : $\iiint_V (xyz)\ dxdydz$ où*

$$V = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\right\}.$$

En effet, on a

$$\iiint_V (xyz)\ dxdydz = \left[\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx\right]\times\left[\int_0^1 \frac{y^2}{2}dy\right]\times\left[\int_0^1 \frac{z^2}{2}dz\right] = \frac{1}{216}.$$

1.3.4 Changement de variables pour les intégrales triples

On introduit maintenant des changements de variables particulièrement utiles. En fonction des symétries du problème étudié, ces changements de variables peuvent permettre de simplifier considérablement l'expression des intégrales à calculer.

Proposition 67 *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et*

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \triangle \subset U \to D \subset V \\ (u, v, w) \to (x, y, z) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \end{aligned}$$

une bijection et de classe C^1sur $\triangle = \varphi^{-1}(D)$.
La matrice Jacobienne de φ est

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien de la matrice J_ϕ est donné par

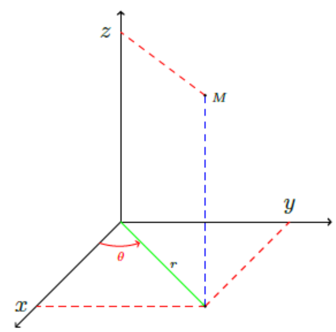
$$\det(J_\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Si $\varphi(\Delta) = D$, et det $J_\varphi \neq 0$, on obtient :

$$\iiint_D f(x, y, w)\ dxdydz = \iiint_\Delta f(\varphi(u, v, w))\ |\det(J_\varphi(u, v, w))|\ dudvdw.$$

1.3.5 Coordonnées cylindriques

Un point M de l'espace $\mathbb{R}^3$ peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). Le changement de variables en coordonnées cylindriques correspond à poser $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Les coordonnées (r, θ) sont ici les coordonnées polaires de la projection de M dans le plan (Oxy) (c'est-à-dire le plan z $= 0$).



Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente **une symétrie autour d'un axe**.

Considérons l'application "passage de coordonnées cylindriques à cartésiennes"

$$\varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r, \theta, z) \longmapsto (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$J_\varphi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

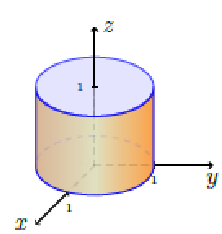
Ainsi, le Jacobien est égale à $detJ_\varphi = r$. Si $\varphi(\triangle) = D$, la formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \;\; r \; drd\theta dz.$$

Exemple 68 *Calculer l'intégrale suivante :*

$I = \iiint_D z \; dxdydz \;$ *où*

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\right\}.$$



On utilise le changement de variables en coordonnées cylindriques. On a

$$\Delta = \varphi^{-1}(D) = \{(r, \theta, z) \mid 0 < r \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi \ \textit{et} \ \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

et alors

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D z dx dy dz = \iiint_\Delta z \ r \ dr d\theta dz \\ &= \left(\int_0^1 r \ dr\right) . \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) . \left(\int_0^1 z \ dz\right) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 69 *Trouver l'intégrale* $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$*, où*

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

En transformant la région D en coordonnées cylindrique, nous obtenons

$$D = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

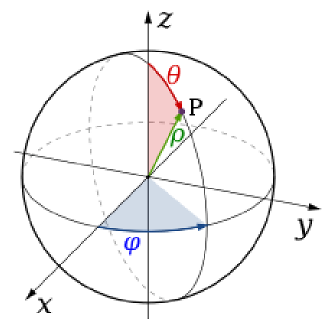
Alors

$$\begin{aligned} \iiint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 dr d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^1\right) d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta dz \\ &= \int_0^1 \frac{2\pi}{3} dx \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

1.3.6 Coordonnées sphériques

Le système de coordonnées sphériques est un autre système de coordonées utile en trois dimensions. Il simplifie en particulier les calculs d'intégrales triples sur des volumes limités par des portions de sphères ou de cônes.
Les coordonnées sphériques sont adaptées aux problèmes qui présentent **une symétrie autour du centre du repère**.

Un point M de l'espace $\mathbb{R}^3$ peut également être repéré par ses coordonnées sphériques (ρ, θ, φ).



Remarque 70 *Attention !* *Il existe plusieurs conventions pour les coordonnées sphériques (mathematiciens, physiciens, astronomes ...). En mathématiques, en général, $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

Proposition 71 *Les Coordonnées sphériques d'un point de l'espace sont données par :*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \left] 0, 2\pi[\times] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right. \to \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ \qquad\qquad (\rho, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne de Φ est

$$\begin{aligned} \det \mathrm{J}_\Phi(\rho, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & \rho\cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \left(\sin(\varphi) \times \cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(\varphi) \times \cos^2(\varphi)\right) \\ &= \rho^2 \cos(\varphi) \neq 0. \end{aligned}$$

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\beta, \rho\sin\varphi)\ \rho^2\cos\varphi\ d\rho d\theta d\varphi.$$

Si nous résumons les résultats obtenus, nous avons le tableau suivant :

changement de coordonnées	valeur absolue du jacobien
polaires $\rightarrow$ cartésiennes	r
cylindriques $\rightarrow$ cartésiennes	r
sphériques $\rightarrow$ cartésiennes	$\rho^2 \cos(\varphi)$

Autrement dit :
• En coordonnées polaires :
$dxdy = |\det J_\varphi(r,\theta)|\, drd\theta = r\ drd\theta.$
• En coordonnées cylindriques :
$dxdydz = |\det J_\varphi(r,\theta,z)|\, drd\theta dz = r\ drd\theta dz.$
• En coordonnées sphériques :
$dxdydz = |\det J_\Phi(\rho,\theta,\varphi)|\ \ d\rho d\theta d\varphi = \rho^2 \cos\varphi\ d\rho d\theta d\varphi.$

Exemple 72 *Calculer l'intégrale* $I = \iiint_B (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz$ *où* B *est la demi-boule* $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
On utilise le changement de variables suivant :

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

la demi-boule B *sera décrite en prenant*

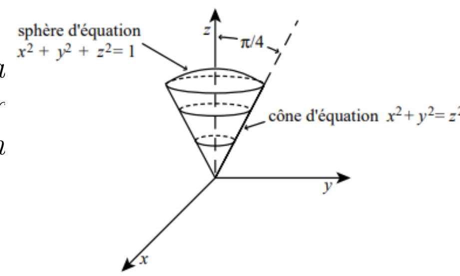
$$\rho \in [0,1], \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

On effectue le changement de variables dans l'intégrale :

$$I = \iiint_V \rho^4\cos\varphi d\rho d\theta d\varphi = \left(\int_0^1 \rho^4\ d\rho\right).\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right).\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi\right) = \frac{2}{5}\pi.$$

Exemple 73 *Soit* $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z^2, 0 \leq z, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

V est la région de $\mathbb{R}^3$ contenu à l'intérieur de la sphère centrée à l'origine et de rayon 1, à l'intérieur du cône d'équation $x^2+y^2=z^2$ et au-dessus du plan horizontal d'équation $z=0$.



Evaluons l'intégrale triple $\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} dxdydz$ *en utilisant les coordonnées sphériques.* V *correspondant à* V_S *en coordonnées sphériques comme suit :*

$$V_S = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/4\}.$$

Evaluons l'intégrale triple

$$\begin{aligned}\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho^2\right)^{3/2} \rho^2 \cos(\varphi)\ d\rho d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\varphi) d\varphi\right) . \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) . \left(\int_0^1 \rho^5\ d\rho\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

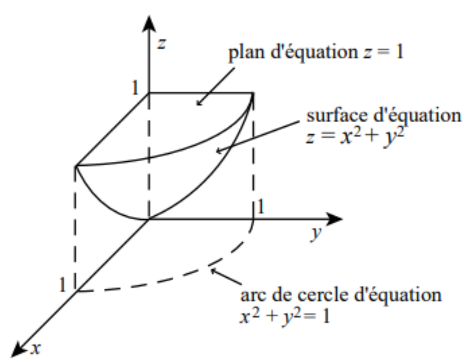
1.3.7 Exercices avec corrigés

Exercice 74 *Evaluer l'intégrale triple suivante :*

$$\iiint_V y\ dxdydz$$

sur la région

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq x, 0 \leq y, \left(x^2+y^2\right) \leq z \leq 1\right\}$$



En effet, $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ \left(x^2+y^2\right) \leq z \leq 1\right\}.$

Donc

$$\begin{aligned}
\iiint_V y\ dxdydz &= \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{x^2+y^2}^1 y\ dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(yz]_{x^2+y^2}^1 dy\right)dx \\
&= \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(y-y\left(x^2+y^2\right)\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\left(1-x^2\right)y-y^3\right)dy\right)dx \\
&= \int_0^1\left(\left(1-x^2\right)\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1\frac{\left(1-x^2\right)^2}{2}-\frac{\left(1-x^2\right)^2}{4}dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^1\left(1-x^2\right)^2\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^1\left(1-2x^2+x^4\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\left[x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Exercice 75 ***(coordonnées cylindriques)***
Calculer les intégrales triples suivantes : $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{y^2+z^2}^{2-y^2-z^2}\left(y^2+z^2\right)^{3/2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z.$

Solution.
En coordonnées cartésiennes, on doit intégrer sur le solide défini par les inégalités

$$y^2+z^2 \le x \le 2-y^2-z^2, \quad -\sqrt{1-z^2} \le y \le \sqrt{1-z^2}, \quad -1 \le z \le 1.$$

Il est naturel de passer en **coordonnées cylindriques**

$$\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

et on obtient l'intégrale triple

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{y^2+z^2}^{2-y^2-z^2}\left(y^2+z^2\right)^{3/2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^{2-r^2} r^4\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
= \left(\int_0^{2\pi}1\ \mathrm{d}\theta\right)\int_0^1 r^4[x]_{r^2}^{2-r^2}\ \mathrm{d}r &= 4\pi\int_0^1 r^4\left(r^2-1\right)\mathrm{d}r \\
&= 4\pi\left[\frac{r^7}{7}-\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{35}\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 76 *(**coordonnées sphériques**)*
Calculer l'intégrale triple suivante :

$$\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz,$$

où V est donnée par

$$V = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9\right\}.$$

Solution :
La région V en coordonnées sphériques est donnée par

$$V_S = \{(\rho, \phi, \theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le \rho \le 3\}$$

et

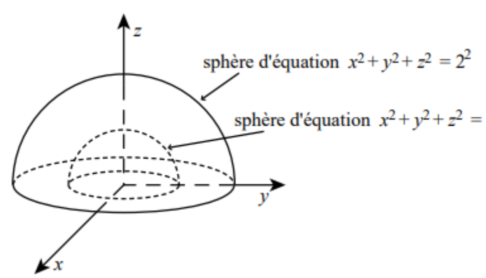
$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^3 \frac{1}{\rho}\cdot\rho^2\cos\ \varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\rho^2\Big|_1^3\right)\cos\varphi\ d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\varphi\ d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(4\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 8\ d\theta = 16\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 77 *Soit la région $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \mid 0 \le z, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.*
Calculer l'intégrale $\iiint_V zdxdydz$.

La région V correspondant à V_S en coordonnées sphériques comme suit :



$$V_S = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 1 \le \rho \le 2, 0 \le \varphi \le \pi/2\}.$$

Donc nous obtenons

$$\begin{aligned}\iiint_V z\ dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho\ sin(\varphi)\ d\rho d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)\ d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho\ d\rho\right) = 3\pi.\end{aligned}$$

CHAPITRE 2

Intégrale impropres

Notre but dans ce chapitre est de calculer des intégrales sur des intervalles non bornés (allant jusqu'à $-\infty$ ou $+\infty$), ou bien des intégrales sur un intervalle borné de fonctions ayant une limite infinie en un point de l'intervalle d'intégration.

l'intégrale généralisée est une généralisation, une extension de la notion d'intégrale de Riemann. Si on se réfère à l'interprétation intuitive d'une intégrale comme la surface d'un domaine dans le plan, dans les deux cas nous cherchons à calculer des surfaces de domaines non bornés.

Définition 78 *Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et f une application de I vers $\mathbb{R}$. On dit que f est **Localement Intégrable** sur l'intervalle I si et seulement si elle est intégrable (au sens de Riemann) sur tout intervalle fermé borné contenu dans I. Autrement dit*

$$f \text{ est localement intégrable sur } I \Leftrightarrow \forall(a,b) \in I^2,\ f \text{ est intégrable sur } [a,b].$$

Remarque 79 *Toute fonction continue, ou continue par morceaux est localement Riemann-intégrable.*

Définition 80 *On dit que deux intégrales sont de même nature si elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes.*

Définition 81 *L'intégrale I est dite impropre si*

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

(1) a et/ou $b = \pm\infty$.

(2) si f n'est pas bornée en un ou plusieurs points de l'intervalle $[a, b]$.

Selon la manière dont l'intégrale est impropre, elle porte la dénomination :

- *(1) : intégrale impropre de première espèce (intégrale sur un intervalle non bornée).*
- *(2) : intégrale impropre de seconde espèce (intégrale de fonction non bornée).*
- *(1) et (2) : intégrale doublement impropre ou bien impropre de troisième espèce.*

Exemple 82

i) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ *est impropre en $+\infty$, converge et est égale à $\frac{\pi}{4}$.*

ii) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ *est impropre en 1 , converge et est égale à 2 .*

iii) $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{(3-t)^3}$ *est impropre en 3 et diverge.*

iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$ *est impropre en $\pm\infty$ puis en -1 et diverge.*

v) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\, dt$ *est impropre en $\pm\infty$, converge et vaut $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.*

Définition 83 *(**Point singulier**) On dit que x_0 est un point singulier pour la fonction f si elle n'est pas bornée en ce point i.e. $\lim_{x\to x_0} f(x_0) = \infty$.*

2.1 Intégrales impropres de 1ère espèce

Définition 84 *On dit que $\int_a^b f(t)\, dt$ est une intégrale impropre (ou généralisée) de $1^{\text{ère}}$ espèce si au moins l'une des bornes de l'intervalle (a, b) est infinie.*

Définition 85 *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$* ***converge*** *si*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\ dt \qquad \texttt{est finie.}$$

Si c'est le cas, on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale ***diverge****.*

Remarque 86 *Pour $\int_{-\infty}^b f(t)\ dt$, la définition s'adapte de façon évidente.*

Exemple 87

1. *Soit $f(t)=\frac{1}{t}$. Elle est définie et continue sur $[1,+\infty[$. En effet*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty}(\ln x - \ln 1) = +\infty.$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\ dx$ diverge.

2. *Soit $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$. Elle est définie et continue sur $[0,+\infty[$. Alors*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}(\arctan(x)-\arctan(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dx$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

3. *Soit $f(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$. Elle est définie et continue sur $[2,+\infty[$. On a*

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{(t-1)^2}dx = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x-1}+1\right) = 1.$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(t-1)^2}dt$ converge et vaut 1.

Exemple 88 *L'intégrale $I=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\ dt$ est convergente car*

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1-\frac{1}{x},$$

et donc

$$I = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1.$$

Exemple 89 *L'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\cos(t)\ dt$ est divergente car*

$$\int_0^x \ cos(t)\ dt = \sin(x)$$

et comme la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, alors I est divergente.

2.2 Intégrales impropres de seconde espèce

Définition 90 *Soit f une fonction localement intégrable sur (a, b). L'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ est dite généralisée de 2^{nde} espèce si f possède au moins un point singulier dans l'intervalle (a, b).*

Définition 91 *f étant une fonction définie et localement intégrable sur $[a, b[$. Nous dirons que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b^-. Dans ce cas, on note*

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)$ est divergente ou bien n'a pas de sens.

Remarque 92 *Pour une fonction f définie et localement intégrable sur $]a, b]$, la définition s'adapte de façon évidente.*

Exemple 93 *L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge car*

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t} = -\ln \epsilon$$

et comme $\lim_{\epsilon \to 0} -\ln \epsilon = +\infty$, alors I est divergente.

Exemple 94 *L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}\ dt$ converge car*

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_\epsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\epsilon})$$

et donc

$$I = \lim_{\epsilon \to 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$$

Exemple 95 *Calculer l'intégrale $\int_0^1 \ln t\ dt$.*

On a pour tout $x > 0$, $\int_1^x \ln t\ dt = 1 + x \ln x - x$. D'où

$$\lim_{x \to 0} \int_1^x \ln t\ dt = 1.$$

L'intégrale $\int_0^1 \ln t\ dt$ est donc convergente et vaut -1.

Proposition 96 *f étant une fonction définie et localement intégrable sur (a,b). Si $c \in (a,b)$ est un point singulier alors*

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{x \to c^-} \int_a^x f(t)\ dt + \lim_{x \to c^+} \int_x^b f(t)\ dt.$$

Si les limites ci-dessus existent et sont finies, on dit que les intégrales impropres qu'elles définissent convergent, sinon on dit qu'elles divergent.

2.3 Intégrales doublement impropres

Dans cette partie, on s'intéresse au cas des intervalles $]a,b[$, $]-\infty,b[$, $]a,+\infty[$ et $]-\infty,+\infty[$ c'est-à-dire au cas des intégrales doublement impropres (mixte). Dans ce cas l'intégrale s'écrit comme somme d'intégrales généralisées de $1^{ère}$ espèce et d'intégrales généralisées de 2^{nde} espèce, elle converge si toutes ces intégrales convergent et diverge si l'une au moins diverge.

Définition 97 *Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ et $c \in]a,b[$.*
• On dit que l'objet $\int_a^b f(t)dt$ est une integrale impropre à la fois en a et b . L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si et seulement si les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes. Si c'est le cas, la valeur de $\int_a^b f(t)dt$ est donnée par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

• Dans le cas contraire, i.e. si pour tout $c \in]a,b[$ l'une des intégrales impropres $\int_a^c f(t)dt$ ou $\int_c^b f(t)dt$ diverge, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Remarque 98 *En pratique, il suffit de prendre $c = 0$ pour conclure.*

2.4 Propriétés fondamentales des intégrales généralisées

2.4.1 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

Théorème 12 ***(relation de Chasles pour les intégrales impropres)***
Soient $-\infty \leqslant a < b$ (resp. $a < b \leqslant +\infty$).

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a, b[$ *(resp.* $]a, b]$*).*
Supposons de plus que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ dt$ *converge.*
Soit $c \in [a, b[$*. Alors on a :*

a) $\int_a^c f(t)\ dt$ *converge.*

b) *De plus, on a :* $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

2.4.2 Linéarité des intégrales généralisées

Théorème 13
Soient $-\infty \leqslant a < b($ *resp.* $a < b \leqslant +\infty)$*.*
Soient f *et* g *deux fonctions loc-intégrables sur* $[a, b[$ *(resp.* $]a, b]$*), et* λ, μ *deux réels.*

• *Si les intégrales* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *convergent, alors*

a) $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\ \mathrm{d}t$ *converge.*

b) *De plus :*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration 1 *Soit* $x \in [a, b[$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$*. Par linéarité de l'intégrale de Riemann, on trouve*

$$\lambda \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\mathrm{d}t = \int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *sont convergentes alors*

$$\int_a^x (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

D'où le résultat.

Remarque 99

- *Si l'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *est convergente et l'intégrale* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *est divergente, alors* $\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x$ *est divergente.*
- *Si l'intégrale impropre* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *est divergente et l'intégrale* $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ *est divergente. Alors on peut rien dire conclure sur la nature de l'intégrale* $\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x$ *est divergente.*

2.4.3 Intégrale faussement généralisée

Définition 100 *(**Prolongement par continuité**)*
La fonction f est prolongeable par continuité en x_0 s'il existe un réel l tel que la fonction f^*, définie par

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad \forall x \neq x_0, \\ l & si \quad x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 101 *On considère la fonction $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$, $\forall x \neq 0$. Elle est définie en dehors de 0, mais elle a une limite en 0.*
En effet, $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$, alors le prolongement de f définie comme suit

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x)}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Théorème 14 *(**Intégrale faussement généralisée**)*
Soient : $-\infty < a < b < +\infty$.
Et soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
Si f est prolongeable par continuité en b^- alors en notant $\tilde{f}$ son prolongement en b^-, nous pouvons affirmer que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarque 102 *Pas d'intégrale faussement impropre en $\pm\infty$, c'est réserver uniquement à une borne finie.*

Exemple 103 *Etude de la nature de $\int_0^1 t\ln(t)dt$.*

▶ ***Calcul direct***

La fonction $f : t \mapsto t\ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$.
On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = t & v(t) = \frac{t^2}{2} \end{array}$$

Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_x^1 t\ln(t)dt &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_x^1 - \frac{1}{2}\int_x^1 tdt \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\
&= -\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_x^1 \\
&= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to 0} x^2\ln(x) = \lim_{x\to 0} x \times x\ln(x) = 0$, *il résulte alors que l'intégrale impropre* $\int_0^1 t\ln(t)dt$ *est convergente.*
De plus

$$\int_0^1 t\ln(t)dt = \frac{1}{4}.$$

▶ ***Résolution via le prolongement par continuité***

Comme $t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, *on peut prolonger la fonction* $f : t \mapsto t\ln(t)$ *par continuité en posant* $f(0) = 0$. *En notant* $\tilde{f}$ *la fonction prolongée, l'objet* $\int_0^1 f(t)dt$ *n'est plus une intégrale impropre mais l'intégrale sur un segment de la fonction* f *continue sur* $[0,1]$.

Exemple 104 *Considérons l'intégrale généralisée*

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx.$$

La fonction $\frac{\sin x}{x}$ *est continue sur* $]0,1]$ .Or

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ainsi $\frac{\sin x}{x}$ *est prolongeable par continuité au point* $x = 0$. *On en déduit que l'intégrale généralisée* $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ *converge.*

Exemple 105

• *L'intégrale* $\int_{-1}^0 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ *est faussement impropre en* 0 *et elle est donc convergente.*

• *L'intégrale*$\int_0^e t^2\ln(t)\mathrm{d}t$ *est faussement impropre en* 0 *et donc convergente.*

2.4.4 Positivité de l'intégrale généralisée

Théorème 15 *Soient :*
$a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *avec* $a < b$. $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux.*
• *Si l'intégrale impropre* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est convergente et si* $f \geqslant 0$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

2.5 Calcul des intégrales généralisées

2.5.1 Intégration par parties (IPP)

Théorème 16 *Soient* f *et* g *deux fonctions* C^1 *sur* $[a, b[$.
Alors pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f(t)g'(t)\ dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)\ dt.$$

Si $\lim_{x\to b}[f(t)g(t)]_a^x$ *existe alors* $\int_a^b f(t)g'(t)\ dt$ *et* $\int_a^b f'(t)g(t)\ dt$ *sont de même nature et si elles convergent alors*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x\to b}[f(t)g(t)]_a^x - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Théorème 17 *Soient* f *et* g *deux fonctions* C^1 *sur* $]a, b[$. *Si la fonction* fg *a des limites finies en* a *et en* b *alors*

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt \ \text{ et } \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

sont de même nature et si elles convergent

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x\to b}(fg)(t) - \lim_{x\to a}(fg)(t) - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Remarque 106 *Pour une fonction définie et localement intégrable sur* $]a, b]$, *la définition s'adapte de façon évidente.*

2.5.2 Utilisation d'un changement de variable

Théorème 18 *Soient* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$, *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et bijective alors*

$$\int_a^b f(x)dx \;\; et \;\; \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

sont deux intégrales impropres de même nature et si elles convergent

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

Exemple 107 *Etude de la nature de* $\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{6}}}dt$.

- *La fonction* $f : t \mapsto \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{6}}}$ *est continue sur* $]1,2]$.
- *Sous réserve de convergence de l'intégrale impropre* $\int_1^2 \frac{1}{(t-a)^{\frac{1}{2}}}dt$.
  Posons le changement de variable
  $\triangleright$ $u = t-1$ *par suite* $u = t-1$ *et donc* $t = u+1$.
  $\triangleright$ $du = dt$ *et* $dt = du$.
  $\triangleright$ *Si* $t = 1$ *alors* $u = 1-1 = 0$.
  $\triangleright$ *Si* $t = 2$ *alors* $u = 2-1 = 1$.
  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto u+1$ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$.
  On obtient ainsi :

$$\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{6}}}dt = \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{6}}}du.$$

- *En utilisant le critère de Riemann (au voisinage de 0), l'intégrale impropre* $\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{1}{6}}}du$ *est convergente. Par conséquent, l'intégrale impropre* $\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^{\frac{1}{6}}}dt$ *est convergente.*

Corollaire 108
Soit $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *et soit* $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ *continue sur* $]-a,a[$.

a) *Si* f *est paire :*
   - $\int_{-a}^a f(t)\,dt$ *converge* $\Leftrightarrow \int_0^a f(t)dt$ *converge.*
   - *Dans ce cas :* $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(u)du$.

b) Si f est impaire :
- $\int_{-a}^{a} f(t)dt$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\int_0^a f(t)dt$ *converge.*
- *Dans ce cas :* $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$.

Exemple 109 *Etude et nature de l'intégrale :* $\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\ dt$.

- *La fonction* $f : t \mapsto 2t$ *est continue sur* $]-\infty, +\infty[$. *De plus, elle est impaire car, pour tout* $t \in]-\infty, +\infty[$
$$f(-t) = -2t = -f(t).$$
- *Soit* $x \in [0, +\infty[$:
$$\int_0^x 2tdt = \Big[t^2\Big]_0^x = x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Ainsi $\int_0^{+\infty} 2t\ dt$ *n'est pas convergente.*
- *On en déduit que* $\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\ dt$ *est divergente.*

Attention

On ne peut pas diviser l'intégrale sous cette forme :
$$\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\ dt = \int_{-\infty}^{0} 2t\ dt + \int_{0}^{+\infty} 2t\ dt = 0}.$$
On ne peut effectuer le changement de variable puisque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\ dt$ *est divergente.*

Exemple 110 *Etude et nature de l'intégrale :* $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt$.

- *La fonction* $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ *est continue sur* $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. *De plus, elle est impaire car pour tout* $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$
$$f(-t) = \frac{-t}{\sqrt{2-(-t)^2}} = \frac{-t}{\sqrt{2-t^2}} = -f(t).$$
- *On en déduit, sous réserve de convergence*
$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt = -\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt.$$
Or l'intégrale impropre $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}\ dt$ *est convergente. Ainsi* $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt$ *est convergente.*

- *On en déduit que* $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt$ *est convergente, de valeur*

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt + \int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt = 0.$$

Exemple 111 *Etude de la nature de l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1}$.

- *La fonction* $f : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^t+1}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.
- *Soit* $x \in [0, +\infty\,[$. *Posons le changement de variable*
  $u = e^t$ *alors* $u = \mathrm{e}^t($ *donc* $t = \ln(u)) \Leftrightarrow du = \mathrm{e}^t dt$ *et* $dt = \frac{du}{\mathrm{e}^t} = \frac{du}{u}$.
  ▶ *Si* $t = 0$ *alors* $u = e^0 = 1$.
  ▶ *Si* $t = x$ *alors* $u = \mathrm{e}^x$.
  Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \mathrm{e}^x]$. *On obtient :*

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1} &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u(u+1)} \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\
&= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u} - \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{du}{u+1} \\
&= [\ln(|u|)]_1^{\mathrm{e}^x} - [\ln(|u+1|)]_1^{\mathrm{e}^{\dot{x}}} \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right) + \ln(2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).
\end{aligned}$$

- *On déduit que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1}$ *est convergente.*
  De plus : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t+1} = \ln(2)$.

2.6 Intégrale des fonctions positives

Dans cette partie nous n'utiliserons que les fonctions positives. Dans le cas où la fonction f considérée est continue et négative sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$, resp. $]a, b[$), on se ramène aux cas précédents en considérant la fonction $-f$ qui est positive sur cet intervalle.

2.7 Critère de convergence

Théorème 19 ***(Intégrale impropre bornée)***
Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$.
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, avec $f \geqslant 0$.
L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [a, b[, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant M.$$

Exemple 112 *L'intégrale $\int_0^2 \cos^2(\frac{1}{t})\ dt$ est une intégrale impropre de 2^{nde} espèce. En effet*

$$F(x) = \int_x^2 \cos^2(\frac{1}{t})\ dt \leq \int_x^2\ dt = (3 - x) \leq 3, \quad \forall x \in]0, 2].$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^2 \cos^2(\frac{1}{t})\ dt$ est convergente.

2.7.1 Intégrales de référence α-Riemann

Théorème 20 ***(Intégrales de Riemann au voisinage de $+\infty$)***
Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t$ où α est un réel strictement positif.
Dans ce cas, la primitive est explicite et l'on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^x & si \quad \alpha \neq 1 \\ \lim_{x\to+\infty} [\ln(t)]_1^x & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la nature (convergente ou divergente) des intégrales de Riemann à savoir

$$\begin{array}{lll} Si\ \alpha \leqslant 1 & alors & \int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t\ diverge, \\ si\ \alpha > 1 & alors & \int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t\ converge. \end{array}$$

Théorème 21 ***(Intégrales de Riemann au voisinage de a)***
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
L'intégrale $\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
Dans ce cas la convergence est absolue.
En particulier, l'intégrale $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et la convergence est absolue.

Exemple 113 $\int_{-2}^{3} \frac{\mathrm{dt}}{(t+2)^3}$ *diverge et* $\int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{t}}$ *converge.*

Corollaire 114 ***(Règle du*** $t^\alpha f(t)$ ***en*** $+\infty$***)***
On suppose que f *est positive au voisinagae* $+\infty$. *Alors*

$$\begin{array}{lll} \exists\alpha > 1, & \lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0 & \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge .} \\ \exists\alpha \leq 1, & \lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty & \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\ dt \text{ diverge .} \end{array}$$

Corollaire 115 ***(Règle du*** $t^\alpha f(t)$ ***en 0)***
On suppose f *positive au volsinage de* 0.

- ▷ *S'il existe* $\alpha < 1$ *tel que* $\lim_{t\to0} t^\alpha f(t) = 0$ *alors* f *est intégrable au voisinage de 0 .*
- ▷ *S'il existe* $\alpha \geq 1$ *tel que* $\lim_{t\to0} t^\alpha f(t) = +\infty$ *alors* f *n'est pas d'intégrable au voisinage de* 0 *.*

2.7.2 Critère de comparaison

Théorème 22 ***(Comparaison par inégalité)***
Soient $a < b \leqslant +\infty$ *(resp.* $-\infty \leqslant a < b$*).*
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *deus fonctions continues sur* $[a, b[$ *(resp.* $]a, b]$*).*
Supposons de plus : $\forall x \in [a, b[, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

- • *Alors on a :*
  - ▷ *Si* $\int_a^b g(t)\ dt$ *converge alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*
  - ▷ *Si* $\int_a^b f(t)\ dt$ *diverge alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*
- • *De plus, dans le cas de la convergence, on a :*

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt.$$

Remarque 116 *Le critère de comparaison n'est pas applicable à des fonctions de signe variable.*

Exemple 117 *On va déterminer la convergence de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$.

La fonction $t \to \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ *est continue, donc localement intégrable sur* $[0, +\infty[$. *On a un problème de convergence, ou une singularité, en* $+\infty$. *D'ailleurs, elle est positive et on va montrer la convergence de l'intégrale en utilisant le critère de comparaison. On a* $\forall t \in \Big[0, +\infty\Big[,\ 0 \leqslant \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$.
Or $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt$ *converge par existence d'une limite finie à la primitive a* $\arctan\ t$

en $+\infty$.
En effet

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\arctan\ x=\frac{\pi}{2}.$$

Ceci prouve que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{1+t^2}dt$ *converge.*

2.7.3 Critère d'équivalence

Théorème 23 *Soient* $a\in\mathbb{R},\ b\in\overline{\mathbb{R}}$ *avec* $a<b$.
Soient $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ *deux fonctions positives et localement intégrables.*
Supposons que les fonctions f *et* g *sont équivalentes au voisinage de* b *qu'on note* $f(t)\underset{b}{\sim}g(t)$ *alors*

i) Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *diverge alors* $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *diverge également.*
ii) Si l'intégrale impropre $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ *converge alors* $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge également.*

Exemple 118 *Etudions la convergence de* $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$.

La fonction $t\to\frac{\sin\sqrt{t}}{t}$ *est continue, donc localement intégrable sur* $]0,1]$. *On a un problème de convergence, ou une singularité, en* 0. *Par ailleurs, elle est positive et on va étudier la convergence de l'intégrale en utilisant le critère d'équivalence :* $\frac{\sin\sqrt{t}}{t}\sim\frac{1}{\sqrt{t}}$.
Or $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t}}$ *converge par existence d'une limite finie à la primitive* $2\sqrt{t}$ *en 0 .*
Ceci prouve que $\int_0^1\frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$ *converge.*

Exemple 119

1. *Considérons l'intégrale généralisée* $\int_0^3\frac{\sin x}{x}\ dx$ *dont le point incertain est* 0.
   Intéressons-nous au comportement de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ *lorsque* x *tend vers 0.*
   En effet, le développement limité au voisinage de (0) *de la fonction sinus est* $\sin x=x+o(x)$, *ce qui implique que*

$$\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

   Par conséquent, $\frac{\sin x}{x}$ *est équivalente à 1 lorsque* x *tend vers* 0.
   Par le Théorème des équivalents, les intégrales généralisées $\int_0^3\frac{\sin x}{x}dx$

et $\int_0^3 1\ dx$ *sont de même nature. Or cette dernière est sans conteste convergente.*

2. *Le théorème des équivalents permet d'affirmer que l'intégrale généralisée*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^5+3x+1}{x^2+4} e^{-x} dx,$$

dont le seul point incertain est $+\infty$ *est convergente.*
En effet,

$$\frac{x^5+3x+1}{x^2+4} e^{-x} \sim x^3 e^{-x}.$$

Comme l'intégrale de ce dernier converge alors notre intégrale converge.

Exemple 120 *La fonction* $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}}$ *est équivalente à l'infini à* $\frac{2}{x^{3/2}}$.
Comme $\int_3^{+\infty} \frac{2}{x^{3/2}} dx$ *converge (intégrales de Riemann) alors l'intégrale* $\int_3^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} dx$ *converge.*

2.7.4 Intégrales de référence de Bertrand

Théorème 24 ***(Intégrales de Bertrand)***
$\int_2^{+\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-\beta} \mathrm{d}t$ *où* β *est un réel strictement positif.*
La primitive est explicite :

$$\int_2^{+\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-\beta} \mathrm{d}t = \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{-\beta+1}(\ln(t))^{-\beta+1}\right]_2^x & si\ \beta \neq 1. \\ \lim_{x\to+\infty} [\ln(\ln(t))]_2^x & si\ \beta = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, on peut déduire la nature (convergente ou divergente) des intégrales de Bertrand suivantes :

$$\begin{array}{lll} \beta \leqslant 1 & \Longrightarrow \int_2^{+\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-\beta} \mathrm{d}t & \text{diverge,} \\ \beta > 1 & \Longrightarrow \int_2^{+\infty} t^{-1}(\ln(t))^{-\beta} \mathrm{d}t & \text{converge.} \end{array}$$

Corollaire 121 *Soit* α *et* β *deux nombres réels.*
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^a (\ln t)^\beta}$ *est intégrable*
sur $[2, +\infty[$ *si et seulement si* $(\alpha > 1)$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

2.8 Intégrale généralisée d'une fonction de signe quelconque

2.8.1 Critère de convergence absolue

Définition 122
Soit $a < b$ (resp. $-\infty \leq a < b$, resp. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$).
Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et localement intégrable sur $[a, b[$.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, ou est absolument convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|\ dt$ converge.

Remarque 123 *Pour démontrer la convergence absolue nous pouvons donc utiliser les critères de convergence relatifs aux fonctions positives.*

L'intérêt de la notion de convergence absolue est dans le théorème suivant :

Théorème 25 *Soit f une fonction définie sur $[a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et localement intégrable sur $[a, b[$.*
Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\ dt$ converge absolument alors $\int_a^b f(t)\ dt$ converge.
De plus on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt.$$

*En revanche, **la réciproque est fausse**.*

Exemple 124 *Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.*

Soit f la fonction de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin t}{t^2}$.
f est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$

$$|f(t)| = \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}. \tag{2.1}$$

Or, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dx$ converge par le théorème de Riemann $(\alpha = 2 > 1)$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^2}\ dx$ est absolument convergente.

2.8.2 Intégrales semi-convergentes

Définition 125 *On dit qu'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Exemple 126

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

a) *Montrons pour commencer que cette intégrale généralisée converge.*
Soit $x > 1$. Une intégration par parties (IPP) donne

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, les deux termes

$$\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x \quad et \quad \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Examinons les deux termes :
• $\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1$. *Or la fonction $\frac{\cos x}{x}$ tend vers 0 (lorsque $x \to +\infty$), car $\cos x$ est* ***bornée*** *et $\frac{1}{x}$* ***tend vers*** 0.
Donc $\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x$ admet une limite finie (qui est $\cos 1$).
• *Pour le deuxième terme, notons d'abord que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{dt}$ est une intégrale absolument convergente.*
En effet $\frac{|\cos t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt}$ converge.
Par conséquent, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{dt}$ converge, d'où $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{dt}$ admet une limite finie.
•*Conclusion : $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt}$ admet une limite finie (lorsque $x \to +\infty$), et donc par définition $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{t}}\mathrm{dt}$ converge.*

b) *Prouvons maintenant que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.*
Comme $\sin x \in [0, 1]$, *il vient* $\sin^2 t \le |\sin(t)|$.

Par le Théorème de comparaison, il suffit donc de prouver que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ diverge.
• *Écrivons d'abord*

$$\int_1^x \frac{\sin^2 t}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{2t} dt - \int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt.$$

• *On a d'une part, l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt$ *diverge par théorème de Riemann* ($\alpha = 1$) *et d'autre part, les arguments prouvant la convergence de* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *prouvent également celle de* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$.
• *Ce qui nous donne*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$$

est nécessairement divergente.

2.8.3 Critère d'Abel

Pour établir la convergence d'une intégrale généralisée qui n'est pas absolument convergente, nous disposons du théorème d'Abel.

Théorème 26 ***(Critère d'Abel)*** *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$, telles que*
• *f est positive, décroissante et telle que* $\lim_{x \longrightarrow b} f(x) = 0$.
• *Soit g une fonction continue sur $[a, b[$ telle que la primitive* $\int_a^x g(t)\, dt$ *soit bornée c'est à dire que*

$$\exists M > 0, \quad \forall x > a, \qquad \left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq M.$$

Alors l'intégrale

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt \text{ converge .}$$

Exemple 127 *Le théorème d'Abel permet de prouver aisément la convergence des intégrales*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt.$$

En effet, pour la première intégrale, la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ vérifie les hypothèses du théorème et $g(t) = \sin t$ aussi : pour tout $t > 1$,

$$\left| \int_1^x \sin t dt \right| = |[-\cos t]_1^x| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2, \qquad M = 2.$$

Ainsi d'après le Théorème d'Abel, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ *converge.*
De la même manière, on peut montrer la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ *en choisissant* $f(t) = \frac{1}{t}$ *et* $g(t) = \cos(2t)$.

Remarque 128 *Soit $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ une intégrale convergente, si f a une limite l en $+\infty$ alors $l = 0$. Mais ce n'est pas une condition suffisante.*

Exemple 129 *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} dt$ est divergente même si $\lim \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$.*

Remarque 130 *Il se peut que $\int_b^{+\infty} f(t)\, dt$ soit convergente sans que f n'ait de limite en $+\infty$, ni que f ne soit bornée.*

2.8.4 Utilisation d'un développement limité ou asymptotique

Si aucun des critères classiques ne permet de conclure la nature d'une intégrale impropre, il nous reste à utiliser le développement limité.

Définition 131 ***(Formule de Taylor-Young)***
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.
Si f est dérivable n fois sur I, alors il existe une fonction ϵ définie sur I vérifiant $\lim_{x \to x_0} o((x - x_0)^n) = 0$ et telle que

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) = 0.$$

2.8.5 Développements limités usuels

Donnons le développement limité au voisinage du point $x_0 = 0$ de quelques fonctions usuelles, ces développements limités proviennent de la formule de

Taylor-Young :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right). \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right). \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right). \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right). \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o\left(x^n\right). \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right). \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right).
\end{aligned}$$

Exemple 132 *Étudier la nature de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right)\, dt$.

On a $1 - \frac{\sin(t)}{t} \underset{+\infty}{\to} 0$, *alors on applique le développent limité de la fonction* $ln(1+x)$ *au voisinage de* 0 *comme suit :*

$$\ln\left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right) = -\frac{\sin(t)}{t} + \frac{\sin^2(t)}{2t^2} + o\left(\frac{sin^2(t)}{t^2}\right) = f_1(t) + f_2(t) + o\left(\frac{sin^2(t)}{t^2}\right).$$

Avec

$$\lim_{t\to+\infty} o\left(\frac{sin^2(t)}{t^2}\right) = 0, \quad f_1(t) = -\frac{\sin(t)}{t} \ \ et \ f_2(t) = \frac{\sin^2(t)}{2t^2}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_1(t)\, dt$ *converge d'après le critère d'Abel.*
D'autre part, on a

$$f_2(t) \sim \frac{\sin^2(t)}{2t^2} (t \to +\infty)$$

et

$$0 \leq \frac{\sin^2(t)}{2t^2} \leq \frac{1}{2t^2} \text{ avec } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^2} \text{ convergente .}$$

Par conséquent

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{\sin(t)}{t}\right) \text{ est convergente.}$$

2.9 Exercices avec corrigés

Exercice 133 *Montrer la convergence de l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\, dt.$$

Solution :

- **Méthode 1 :** On utilise la définition

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{t^3+1}\, dt \\
&= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}\, dt \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dt \right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}[\ln(t+1)]_0^x - \frac{1}{6}\left[\ln\left(t^2-t+1\right)\right]_0^x + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]_0^x \right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right) \right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right) \right) \\
&= 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale est donc convergente.

Méthode 2 : On utilise les critères de convergence, en effet

- ▶ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}$ est convergente.

- $\lim_{t\to+\infty} \frac{1/\left(t^3+1\right)}{1/t^3} = 1.$

- Les fonctions $t \to \frac{1}{t^3+1}$ ainsi que $t \to \frac{1}{t^3}$ sont positives, continues et bornés sur $[1, +\infty[$. Par suite $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}$ est convergente et donc également $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt$.

Exercice 134 ***(Intégrales généralisées et IPP)***
A l'aide d'une intégration par parties, étudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

b) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos(t) \mathrm{d}t$.

Soluion.

a) La fonction $x \mapsto \mathrm{In}(x)$ est continue sur $]0, 1]$. On considère donc $\epsilon > 0$ et on utilise une intégration par parties sur $[\epsilon, 1]$ avec les fonctions

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & u(t) = t \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \frac{1}{t}. \end{array}$$

Ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^1 \ln(t)\mathrm{d}t =& [t\ln(t)]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \ \mathrm{d}t \\ =& -\epsilon\ln(\epsilon) - 1 + \epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} -1. \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente et égale à -1.

b) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On considère donc $x > 0$ et on utilise une intégration par parties avec les fonctions :

$$\begin{array}{ll} u(t) = \mathrm{e}^{-t} & u'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = \cos(t) & v(t) = \sin(t). \end{array}$$

Ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\mathrm{d}t &= \left[\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Considérons alors la deuxième intégrale et effectuons de nouveau une intégration par parties avec les fonctions de classe C^1 sur $[0, x]$

$$\begin{array}{ll} u(t) = \mathrm{e}^{-t} & u'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = \sin(t) & v(t) = -\cos(t). \end{array}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \sin(t)\mathrm{d}t &= \left[-\mathrm{e}^{-t} \cos(t)\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \cos(x) + 1 - \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-x} \cos(x) + 1 - \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\ dt.$$

En passant à la limite, on trouve

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-x} \cos(x) + 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \cos(t)\ \mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 135 *A l'aide du changement de variable suggéré, étudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer.*

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$, *avec* $u = e^t$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\ dt$, *avec* $u = \sqrt{t}$.

Solution :

a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-1}+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car le dénominateur ne s'annule pas.

• On considère donc $x > 0$ et on utilise alors le changement de variable

$$u = \mathrm{e}', \quad t = \ln(u), \quad \mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t, \quad t \in [0, x].$$

On commence par simplifier l'intégrale, à savoir

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} &= \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t \mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t (\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} \\ &= \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t \mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(1+\mathrm{e}^t)} \\ &= \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}. \end{aligned}$$

Puis, on utilise le changement de variable pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)} &= \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} \\ &= \left[-\frac{1}{(1+u)}\right]_1^{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^x} \underset{\mathrm{x}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ converge et est égale à $\frac{1}{2}$.

b) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$, car sur cet intervalle, le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale est donc doublement impropre.
• **En 0 :** On considère $\epsilon > 0$ et on utilise le changement de variable proposé sur $[\epsilon, 1]$

$$u = \sqrt{t}, \quad t = u^2, \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

cela donne

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt &= 2\int_\epsilon^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= 2\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \mathrm{e}^{-u}du \\ &= 2\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{\sqrt{\epsilon}}^1 \\ &= 2\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{\epsilon}} - \mathrm{e}^{-1}\right) \\ &\underset{\epsilon\to0}{\longrightarrow} 2\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $2\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale a $2(1-e)$.

• **En $+\infty$:** On considère $x > 1$ et on utilise le même changement de variable

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_1^x \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}\\ &= 2\int_1^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{du}\\ &= 2\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_1^{\sqrt{x}}\\ &=2\left(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{x}}}\right) \underset{\mathrm{x}\to+\infty}{\longrightarrow} 2\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale a $2\mathrm{e}^{-1}$.

- **Conclusion :** l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2.$$

Exercice 136 *Etudier la convergence des intégrales suivantes :*

a) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt,$ *b)* $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt.$

Solution :

a) Soit f la fonction de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,
f est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et pour tout $x\in[1,+\infty[$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_1^x = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq 2.$$

Donc la fonction $F : x\mapsto \int_1^x f(t)dt$ est bornée, par suite $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

b) Soit f la fonction de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,
f est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\in[0,+\infty[$,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x,$$

donc $\lim_{x\mapsto+\infty}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}$ est finie et par suite $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$ converge.

Exercice 137
Quelle est la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^3 \frac{t^2-2t+5}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$,
3. $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$,
4. $\int_1^5 \frac{dt}{\sqrt{(5-t)(t+1)}}$.
5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)x}dx$,

Solution :

1. *On a* $t^2-1=(t+1)(t-1)$, *la fonction intégrée est continue sur* $[0,1[\cup]1,3]$ *et le seul problème est en* $t=1$. *En* $t=1$, *on a*

$$\frac{t^2-t+2}{t^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1^2-2+5}{1+t}\frac{1}{t-1} = \frac{2}{t-1}.$$

Pour $t>1$ *proche de 1, les deux fonctions en produit sont positives (car* $2/(t-1)$ *est positive). La fonction* $t\mapsto 1/(t-1)$ *n'est pas intégrable près de* 1^+*car l'intégrale de f est divergente. Donc* $\int_0^3 \frac{t^2-2t+5}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ *est divergente. Notons qu'on n'a pas besoin de regarder le problème de* 1^-*car une seule divergence suffit à conclure.*

2. *L'intégrale* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$ *est impropre en 0 .*
La fonction $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$ *est continue sur* $]0,1]$ *donc elle est localement intégrable sur* $]0,1]$.
De plus, cette fonction est positive sur $]0,1]$. *On peut alors utiliser les critères des fonctions de signe constant.*
Or $\frac{1}{\sqrt{t(t+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ *et* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *converge donc* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}$ *converge aussi.*

3. *Soit* f *la fonction de* $]0,\pi]$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(t)=\frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}$.
f *est continue sur* $]0,\pi]$, *positive sur* $]0,\pi]$ *et vérifie*

$$\lim_{t\mapsto 0} t^{\frac{1}{2}} f(t) = \lim_{t\mapsto 0} t^{\frac{1}{2}}\frac{\sin t}{\sqrt{t}t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

Donc $\int_0^\pi \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ *converge.*

4. *Soit* f *la fonction de* $[1,5\,[$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(t)=\frac{1}{\sqrt{(5-t)(t+1)}}$.
f *est continue sur* $[1,5[$, *et positive sur* $[1,5[$ *et pour tout* $t\in[1,5[$, *on trouve*

$$f(x) \le \frac{1}{\sqrt{5-t}}\frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{5-t}}.$$

Or $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{5-t}}dt$ *converge, donc* $\int_1^5 f(t)dt$ *converge.*

5. *On décompose cette intégrale comme suit :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)\,x}dx = \int_0^{2} \frac{1}{(x^2+1)\,x}dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)\,x}dx.$$

La première intégrale diverge puisque

$$\frac{1}{(x^2+1)\,x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

et l'intégrale de $\frac{1}{x}$ sur $]0,2]$ ne converge pas.
La seconde intégrale converge car

$$\frac{1}{(x^2+1)\,x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$$

et l'intégrale de $\frac{1}{x^3}$ sur $[2,+\infty[$ converge.
En somme, l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)x}dx$ diverge.

Exercice 138
Etudier la convergence des intégrales suivantes. Lorsqu'elles convergent, en calculer la valeur.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}\ dt$,
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt$.

Solution :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt$ est convergente car on a

$$\int_c^{x} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(x) - \arctan(c), \quad \forall c \in]-\infty,+\infty[.$$

D'où $\int_c^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - \arctan(c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(c)$.
De même $\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(c) + \frac{\pi}{2}$ et donc on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi.$$

2. Considérons la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$. Elle est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$. Pour étudier la nature de l'intégrale généralisée
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2},$$
il faut donc "couper" l'intégrale en quatre termes
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}, \int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2}, \int_{0}^{1} \frac{dt}{t^2} \text{ et } \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$
et étudier séparément la nature de ces quatre intégrales généralisées.
La primitive de $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ sur tout segment de $\mathbb{R}^*$ est donnée par $t \longmapsto -\frac{1}{t}$.
D'où
$$\int_{x}^{-1} \frac{dt}{t^2} = 1 + \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \text{ quand } x \longrightarrow -\infty$$
et
$$\int_{1}^{x} \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \text{ quand } x \longrightarrow +\infty.$$
Donc les deux intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ convergent, mais
$$\int_{-1}^{x} \frac{dt}{t^2} = -1 - \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty \text{ quand } x \longrightarrow 0^-.$$
Par conséquent, l'intégrale généralisée $\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2}$ diverge.
On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ diverge.
3. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}\, dt$ est convergente.

   En effet $\int_0^x \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} dt = \left[-\frac{1}{(t^2+1)^{1/2}}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
   d'où $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} dt = 1$.
   Les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} dt$ et $\int_{-\infty}^{0} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} dt$ sont convergentes et valent respectivement 1 et -1 .
   Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} dt$ est donc convergente et vaut bien entendu 0.
4. La fonction $t \mapsto 1/\left(1+t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc les seuls soucis sont en $\pm\infty$.
   On a $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ quand $t \to \pm\infty$. Or $1/\left(1+t^2\right)$ est positif et $1/t^2$ est

intégrable en $\pm\infty$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.
• Par ailleurs, en utilisant la primitive connue, on a même que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Exercice 139
Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin(\frac{1}{t})\, dt,$
2. $\int_0^1 \frac{1}{t\sin t} dt.$

Solution :

1. Soit f la fonction de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(t) = \frac{1}{t}\sin(\frac{1}{t}).$$
f est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $t \in [1, +\infty[$,
$$|f(t)| = \left|\frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{t}\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t^2}.$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dx$ converge, donc $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente et par suite elle converge.
2. Soit f la fonction de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t\sin t}$.
f est continue et positive sur $]0, 1]$.
On a pour tout $t \in]0, 1],\ f(t) \geq \frac{1}{t}$.
Or $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge et donc $\int_0^1 \frac{1}{t\sin t}dt$ diverge aussi.

Exercice 140 *Étudier la convergence de* $\int_0^2 \frac{1}{(1-\cos t)^{\frac{1}{3}}}dt.$

Solution :

Soit f la fonction de $\left| 0, \frac{\pi}{2}\right]$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f(t) = \frac{1}{(1-\cos t)^{\frac{1}{3}}}$.
Cherchons un équivalent de f *au voisinage de* 0.
Comme $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o\,(t^2)$, *alors* $1 - \cos t \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$.
D'où $f(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2}\ \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$.
Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\, dt$ *converge* $\left(\alpha = \frac{2}{3} < 1\right)$, *alors* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ *converge.*

CHAPITRE 3

Séries numériques

3.1 Introduction

Étant donnée une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on sait alors que la somme d'un nombre fini de ses termes est finie. Mais ce n'est pas toujours le cas quand on passe à un nombre infini de termes. On se propose alors de donner un sens à l'expression $\sum_{n>0} u_n$. Il est ainsi naturel de former les sommes partielles $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ et d'étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En notant $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, si cette limite existe, on convient de poser $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et de dire que S est la somme de la série $\sum_{n>0} u_n$.

Ce chapitre est consacré aux conditions nécessaires et suffisantes de la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à la généralisation des propriétés connues sur les sommes finies.

3.1.1 Suite des Sommes Partielles

Définition 141 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. On définit les sommes partielles par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

et on s'intéresse à la limite de S_n lorsque $n \to \infty$.

Définition 142 *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique réelle ou complexe convergente, de somme S. Alors, son reste d'ordre N noté R_N est donné par*

$$R_N = S - S_N = \sum_{n\geq 0} u_n - \sum_{n=0}^{n=N} u_n = \sum_{n\geq N+1} u_n.$$

Définition 143 *On dira que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est*

- *Convergente si $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ existe et on note alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ cette limite,*
- *Divergente si elle n'est pas convergente,*

Théorème 27 *Si une série numérique réelle ou complexe $\sum_{n>0} u_n$ est convergente alors son reste d'ordre N converge vers zéro.*

Preuve. 144 *Pour démontrer ce résultat, il suffit de considérer l'égalité suivante :*

$$R_N = S - S_N = \sum_{n\geq 0} u_n - \sum_{n=0}^{n=N} u_n = \sum_{n\geq N+1} u_n$$

et de faire un passage à la limite des deux cotés.

3.1.2 Séries géométriques

Proposition 145 *Une série géométrique est une série dont le terme général est de la forme $u_n = cq^n, c \neq 0,\ q \in \mathbb{R}$.*
Le calcul de la somme partielle est donné par

$$S_n = \begin{cases} c\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1. \\ c(n+1) & si \quad q = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

D'où

$$\text{La série} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad |q| < 1.$$

Dans le cas où la série géométrique converge, sa somme vaut alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = c\frac{1}{1-q}.$$

3.1.3 Séries télescopiques

Proposition 146 *Une série télescopique est une série dont le terme général est de la forme* $u_n = a_n - a_{n+1}$.
La somme partielle est donnée comme par $S_n = a_0 - a_{n+1}$.

$$\text{La série} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ est convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \text{ existe.}$$

Exemple 147 *Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, déterminez leur somme.*

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)}$.

   On procède à la décomposition en éléments simples
   $$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
   On a pour $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
   Quand n tend vers $+\infty$, on obtient
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$
   Par conséquent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente.*

2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

   La somme partielle de cette suite est définie par
   $$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.$$
   Par suite
   $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{3}{4}.$$
   Par conséquent la somme partielle converge, par suite la série converge et sa valeur est
   $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$

Proposition 148 ***(Condition nécessaire de convergence)***
Soit $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ *une série convergente alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*.*
La réciproque est fausse.

Preuve. 149 *Si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors par définition la suite* $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}\geq 1}$ *de ses sommes partielles converge et donc la suite* $(\mathrm{S_N} - \mathrm{S_{N-1}})_{\mathrm{N}\geq 1}$ *tend vers 0. Or* $\forall \mathrm{N} \geq 1,\ \mathrm{S_N} - \mathrm{S_{N-1}} = \mathrm{u_N}$ *et en conséquence la suite* $(\mathrm{u_n})$ *tend vers 0 .*

Proposition 150 ***(Test de divergence grossière)***
Si la suite réelle ou complexe (u_n) *ne tend pas vers* 0 *quand n tend vers l'infini, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge. Autrement dit*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \qquad \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \ \text{ diverge.}$$

Preuve. 151 *C'est la contraposée de l'implication précédente.*

Remarque 152 *Cette condition nécessaire de convergence de la série n'est pas suffisante car il existe des séries divergentes et dont le terme générale tend vers* 0*.*

Exemple 153 *la série harmonique dont le terme général est de la forme* $u_n = \frac{1}{n}$ *où* $n \in \mathbb{N}^*$ *est divergente bien que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*.*

Exemple 154 *Déterminez si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+n^3}{1+4n^3}$.

   En effet
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+n^3}{1+n^3} = \frac{1}{4} \neq 0.$$
   Comme la limite est différente de zéro et donc par le test de divergence, la série diverge.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 e^n}{n+4}$.

   En effet
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 e^n}{n+4} = +\infty \neq 0.$$
   En vertu du test de divergence, on déduit que la série diverge.

Proposition 155
• *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est convergente, alors* $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente.*
• *Si* $\exists k \in \mathbb{N},\ \sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est convergente.*

Proposition 156 *(* ***Convergence d'une série complexe****)*
Une série complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge si et seulement si les séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}\,(u_n)$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}\,(u_n)$ *convergent toutes les deux et dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}\,(u_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}\,(u_n)\,.$$

3.1.4 Opérations sur les séries

Proposition 157 *(****Linéarité****) Si les séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ *convergent, alors pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \mu \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

Corollaire 158

1. *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge mais* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_n + v_n)$ *diverge.*
2. *Si les deux séries sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de leur somme.*

Exemple 159
• *La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{-1}{n} = 0$ *est convergente même si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ *est divergente.*
• *Soit la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2$ *et la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-2)$*, les deux séries sont divergentes mais la somme des des séries est convergente.*

Proposition 160 *Si les séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont convergentes et ont pour somme* S_1 *et* S_2 *respectivement, alors la série* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *est convergente et a pour somme* $S_1 + S_2$ *puis également la série* $\sum_{n>0} (\lambda u_n)$ *est convergente et a pour somme* λS*.*

Proposition 161 *(* ***Comparaison des sommes****)*
Si deux séries réelles $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *convergent, alors si*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n, \quad alors \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n.$$

3.2 Séries à termes positifs

Définition 162 *Une série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est dite série à termes positifs si* $u_n \geq 0$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Définition 163 *On dit qu'une série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est une série à termes positifs à partir d'un certain rang* n_0 *si et seulement si*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant 0.$$

Proposition 164 *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série à termes positifs alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad \text{converge} \qquad \Leftrightarrow \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est majorée.}$$

Quand la suite des sommes partielles n'est pas majorée, $S_n \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$ *et on écrit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = +\infty$*.*

Preuve. 165 *La suite* $(\mathrm{S_N})_{N\in\mathbb{N}}$ *est croissante puisque* $\forall N \in \mathbb{N}, \mathrm{S}_{N+1} - \mathrm{S}_N = \mathrm{u}_{N+1} \geq 0$ *et donc la suite* $(\mathrm{S_N})_{N\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si elle est majorée.*

3.2.1 Critères de Comparaison

Proposition 166 ***Critères de Comparaison***
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries vérifiant* $0 \leq u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang* n_0*.*

- *Si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge et* $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$*.*
- *Si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *diverge.*

Exemple 167

1. *Soit la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin(2n^2)|}{n^3}$*, son terme général est* $u_n = \frac{|\sin(2n^2)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$*.*
   Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ *est une série de Riemann convergente.*
   Par conséquent $\sum_{n\geq 1} \frac{|\sin(2n^2)|}{n^3}$ *est convergente.*

Exemple 168 *Étudier la convergence de* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n2^n}$*.*

On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ *et donc* $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ *est une suite bornée par une constante qu'on note par* M*. Il s'en suit que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{\ln n}{n} \leqslant M$*.*
Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \frac{\ln n}{n2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}$*, ce qui nous donne une série géométrique de raison* $\frac{1}{2}$*, donc convergente. Par conséquent* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n2^n}$ *converge.*

3.2.2 Critère d'équivalence

On suppose que $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ et que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, alors

- Si $l = 0$, $\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n & \text{converge} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{converge,} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n & \text{diverge} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \quad \text{diverge.} \end{cases}$
- Si $l \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n & \text{converge} \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{converge,} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n & \text{diverge} \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \quad \text{diverge.} \end{cases}$
- Si $l = +\infty$, $\begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n & \text{converge} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \quad \text{converge,} \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n & \text{diverge} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{diverge.} \end{cases}$

Théorème 28 *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs à partir d'un certain rang n_0, telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors les deux séries sont de même nature.*

Exemple 169 *Étudions la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4^n}$.*

Remarquons que la série est à termes positifs, alors on peut utiliser le critère d'équivalence.
On a $\frac{1}{3+4^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et donc convergente. Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2^n}$ est convergente.

Exemple 170 *Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^4}$.*

Tout d'abord, notons que la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^4}$ est bien à termes positifs. Au voisinage de $(+\infty)$ $\sin \frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^4}$, par suite, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^4}$ converge aussi.

3.2.3 Critère de comparaison avec une intégrale

Théorème 29 *(* ***Comparaison avec une intégrale****)*
Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue, décroissante et positive.
On pose $u_n = f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.

Exemple 171

1. *Montrer la convergence de* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^3}$.

   On pose $f(t) = \frac{1}{1+t^3}, \forall t \geq 0$. *il est clair que* f *est positive, décroissante sur* $[0, +\infty[$.
   L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$ *est convergente et elle est de même nature que la série étudiée. Par conséquent* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^3}$ *converge.*
2. *Considérons l'application* $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x}$.
   On a $\int_1^t \frac{1}{x} dx = \log t$ *et* $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = +\infty.\,\mathrm{Donc} \left(\sum \frac{1}{n}\right)$ *diverge.*
3. *Soit la fonction* $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie par* $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.
   f *est continue, décroissante et positive.*
   $$\int_1^t f(x)dx = \log\left(\frac{t}{t+1}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right).$$
   Comme $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(x)dx = \log 2 < +\infty$ *alors la série* $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)}\right)$ *est alors convergente.*

3.2.4 Séries de Riemann

Définition 172 *Une série de Riemann est une série numérique à termes positifs, de terme général* $u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 30 *(**Conditions de convergence d'une série de Riemann**). La série de Riemann* $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Théorème 31 *Soit* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

- ◇ *Si* $\exists \alpha > 1$ *tel que* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, *alors la série* $\sum_{n>0} u_n$ *converge.*
- ◇ *Si* $\exists \alpha \leq 1$ *tel que* $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, *alors la série* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *diverge.*

3.2.5 Règle de d'Alembert

Théorème 32 *On suppose que* $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *et que* $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. *Alors*

- ▶ *Si* $\ell < 1$, *la série converge.*
- ▶ *Si* $\ell > 1$, *la série diverge.*
- ▶ *Si* $\ell = 1$, *on ne peut conclure.*

Exemple 173 *Déterminer si la série suivante est convergente ou divergente*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

On utilise le test du quotient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2/(2(n+1))!}{(n!)^2/(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *est convergente.*

3.2.6 Règle de Cauchy

Proposition 174 *On suppose que* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$*. On a*

- ▶ *Si* $\ell < 1$ *alors la série converge.*
- ▶ *Si* $\ell > 1$ *alors la série diverge.*
- ▶ *Si* $\ell = 1$ *alors on ne peut conclure.*

Exemple 175 • *La série de terme général* $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ *est divergente car* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$

• *On ne peut rien dire sur la nature de la série de terme général* $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ *via la règle de Cauchy car* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 1.$

3.2.7 Règle de Raabe-Duhamel

Proposition 176
Soit $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ *et notons* $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l$ *où* $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors} \begin{cases} l > 1 \Rightarrow & \text{la série } \sum u_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge .} \\ l < 1 \Rightarrow & \text{la série } \sum u_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge .} \\ l = 1 \Rightarrow & \text{On peut rien conclure.} \end{cases}$$

Exemple 177 *Soit la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$*. On a* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$
Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure sa nature.
On applique donc la règle de Raabe-Duhamel, $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+2n}{n^2}\right) = 2 > 1$*. Ainsi la série est convergente.*

3.2.8 Règle de comparaison logarithmique

Théorème 33 *Soit* $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ *et* $(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n,)$ *deux séries à termes strictement positifs. On suppose que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ *Alors*

1. $(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n)$ *converge* $\Longrightarrow (\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ *converge.*
2. $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ *diverge* $\Longrightarrow (\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n)$ *diverge.*

Preuve. 178

1. *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Longleftrightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{u_0}{v_0}.$$

   Ceci implique que $u_n \leq \frac{u_0}{v_0}v_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$*. Sachant que* $(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n)$ *converge alors* $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_0}{v_0}v_n\right)$ *converge et d'après le théorème de comparaison ci-dessus,* $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ *converge.*
2. *C'est la contraposée du premier résultat.*

3.3 Critères de Convergence des Séries à termes quelconques

3.3.1 Convergence Absolue

Définition 179 *La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est dite absolument convergente si et seulement si la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ *converge.*

Définition 180 *(**Série semi-convergente)***
On dit qu'une série réelle ou complexe est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente.

Théorème 34 *Pour que la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *soit convergente, il suffit qu'elle soit absolument convergente.*
Dans ce cas, on a

$$|\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Exemple 181 *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{sin(n^2)}{n^2}$ *converge absolument puisque* $|\frac{sin(n^2)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ *et ce dernier terme est le terme d'une série convergente, par conséquent la série étudiée est absolument convergente.*

Définition 182 *On appelle série alternée toute série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *de la forme*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n \quad \text{avec} \;\; a_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.3.2 Critère de convergence pour les séries alternées

Théorème 35 ***(Critère de Leibniz)***
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série alternée telle que :*

- $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante,*
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge et sa somme est du signe* u_0.
De plus, $\forall N \in \mathbb{N}, \quad |R_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right| \leq |u_{N+1}|.$

Exemple 183 *Étudier la convergence de*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^3+n+3}}.$$

• *On regarde d'abord si la série est absolument convergente. Pour cela, il s'agit de définir le comportement de la série*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n+3}}.$$

En effet, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/\sqrt[3]{n^3+n+3}} = 1.$$

En utilisant le critère de comparaison avec la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$, *on déduit que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n+3}}$ *est divergente. Par conséquent, la série proposée n'est pas absolument convergente.*

• *Comme la suite proposée est alternée, on applique le le critère de Leibniz. On pose* $u_n = 1/\sqrt[3]{n^3+n+3}$. *Alors*

▶ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, *d'où le terme général tend vers zéro.*
▶ *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^3 + (n+1) + 3 \geqslant n^3 + n + 3$, *donc* $u_{n+1} \leqslant u_n$.
En se basant sur le critère de Leibniz, la série est donc convergente mais pas absolument convergente, on déduit donc que la série proposée est semi-convergente.

3.3.3 Règle des équivalents

Proposition 184 *Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *sont des séries réelles telles que :*

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
- *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *garde un signe constant à partir d'un certain rang,*

alors

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *garde le même signe constant que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à partir d'un certain rang (éventuellement différents),*
- $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *convergente* $) \Leftrightarrow (\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *convergente).*

Plus généralement, soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *des séries réelles ou complexes.* Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, *ou* $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$, *alors* $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *absolument convergente* $) \Leftrightarrow$ $(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *absolument convergente).*

3.3.4 Règles de D'Alembert pour les séries à termes quelconques

Proposition 185 *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes quelconques et supposons que la suite* $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie pour* n *assez grand et admet une limite* l *quand* n *tend vers l'infini. Alors*

1. *si* $l < 1$, *la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *est absolument convergente,*
2. *si* $l > 1$, *la série* $\sum_{n>0}^{n\geq 0} u_n$ *est divergente,*
3. *si* $l = 1$, *on ne peut rien dire de la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemple 186

1. *La série de terme général* $u_n = \frac{1}{n^n}$ *est convergente car*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

2. *La série de terme général* $u_n = \frac{e^n}{n}$ *est divergente car*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{e^{n+1}}{n+1} \frac{n}{e^n} \right) = e \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = e > 1.$$

3. *On ne peut rien dire sur la nature de la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n \log n}$ *via la règle de d'Alembert car*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n \log n}{(n+1) \log(n+1)} = 1.$$

3.3.5 Critère de Comparaison à une Série Géométrique

Proposition 187 *Soit* $\sum_{n>0} u_n$ *une série à termes quelconques. S'il existe un nombre réel ou complexe* q, $0 < |q| < 1$ *tel que pour tout* n *assez grand, l'inégalité* $|u_n| \leq |q|^n$ *est vérifiée, alors la série* $\sum_{n>0} u_n$ *est absolument convergente.*

3.3.6 D'autres Critères de Convergence

Théorème 36 *Soit* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite à termes poisitifs telle que* $\lim_{n \to +\infty} a_n = l > 0$. *Si* $u_n = a_n . v_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *et que* $\sum_{n>0} v_n$ *est une série à termes positifs, alors les séries* $\sum_{n>0} u_n$ *et* $\sum_{n \geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

Exemple 188 *La série de terme général* $u_n = \frac{n+4}{n^2+5n}$ *est divergente.*
En effet, après décomposition, on aura $u_n = a_n . v_n$ *où* $a_n = \frac{n+4}{n+5} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *avec* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 1 > 0$ *et* $\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ *qui est une série divergente. On déduit donc la divergence de la série* $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Théorème 37 *Soient* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *deux suites numériques vérifiant* $u_n = v_{n+1} - v_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Alors la série* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *est de même nature que la suite* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.4 Exercices avec solutions

Exercice 189 *Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, donnez la valeur de la série.*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n+2}2^{n+1}$,
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Solution :

1. Le terme général peut être décomposé comme suit

$$u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

et la somme partielle de n-ième ordre :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \to \frac{1}{2}.$$

Donc la série est convergente et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}.$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n+2}2^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-(n-2)}2^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}}.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n+2}2^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}2^2}{3^{n-1}3^{-1}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n+2}2^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 4(3)\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Donc, c'est une série géométrique de raison $q = \frac{2}{3} < 1$.
Par conséquent, la série converge et sa valeur est

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n+2}2^{n+1} = \frac{12}{1-\frac{2}{3}} = 36.$$

3. On commence par calculer la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}.$$

Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+2)(k+1)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}.$$

Par un simple calcul, on aura

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1.$$

Donc la série est convergente et a une valeur de 1.

Exercice 190 *Testez la convergence des séries suivantes en utilisant le test D'Alembert :*

i) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \ldots$

ii) $1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \ldots$

iii) $\frac{1}{2} + \frac{3!}{2\cdot 4} + \frac{5!}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$

Solution :

i) On a le terme général est défini par $u_n = \frac{2n}{3^n}, n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}} \frac{3^n}{2n} = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3} < 1.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

ii) On a $u_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}$ et $\frac{u_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$, donc le test D'Alambert n'est pas concluant.
Mais $n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} < 1$ et selon le test de Raabe-Duhamel, la série diverge.

Exercice 191 *Tester la convergence des séries suivantes à l'aide du test d'intégral :*

i) $\frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$

ii) $\frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$

iii) $\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \frac{1}{4\ln^2 4} + \dots$

Solution :

i) *Le terme général est donné par* $u_n = \frac{n}{(n+1)^3} = f(n)$ *où* $f(x) = \frac{x}{(x+1)^3}$, $f : [1,\infty] \to \mathbb{R}_+$ *et l'intégrale impropre*

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{x}{(x+1)^3}dx = \\ &= \textstyle\int_1^\infty \frac{x+1-1}{(x+1)^3}dx = \int_1^\infty \left[(x+1)^{-2} - (x+1)^{-3}\right]dx = \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < \infty.\end{aligned}$$

Par conséquent, la série converge. La même conclusion peut être obtenue en observant que $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ *ont la même nature puisque* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n}} = 1$. *Donc la divergence de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

ii) *Le terme général peut s'écrire* $u_n = \frac{n}{1+n^2} = f(n)$, *où* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f : [1,\infty] \to \mathbb{R}$ *et* $\int_1^\infty f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^\infty = \infty$, *donc* $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{1+n^2}$ *diverge. D'ailleurs :* $\frac{u_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2+1} \to 1 \in (0,\infty)$ *et d'après le test de comparaison, la série diverge.*

iii) *On a* $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n} = f(n)$, *où* $f : [2,\infty] \to (0,\infty), f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ *et*

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_2^\infty \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^\infty = \frac{1}{\ln 2} < \infty.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=2}^\infty u_n$ *converge.*

Exercice 192 *En comparant avec une série harmonique, vérifiez la convergence des séries suivantes :*

i) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}} + \dots$

ii) $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots$

iii) $1 + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5^2} + \dots$

Solution :

i) Le terme général de la série est $u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}$.
Pour $v_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$, on a $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} \to 1$. Mais v_n est le terme général d'une série harmonique avec $\alpha = \frac{1}{6} < 1$ et la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge. Par conséquent la série donnée diverge aussi.

ii) En utilisant l'inégalité bien connue $\ln x < x$, $\forall\ x > 1$, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

donc par test de comparaison, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge.

iii) Le terme général de la série est $u_n = \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*$.
On a $u_n \leq \frac{1}{5^{n-1}}$ et comme la série géométrique $\sum \frac{1}{5^{n-1}}$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}$ est une série convergente.

Exercice 193 *Étudier la convergence des séries suivantes :*

i) $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{(n+3)^n}$,

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+1}{5n^3+n^2}$,

iii) $\sum_{n=1} \frac{\cos\left(n^3+1\right)}{n^2}$,

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+4}}$,

v) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^3 4^{-n}$,

vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+1}\right)^n$.

Solution :

i) On se base sur le critère de Cauchy pour montrer la convergence de cette série.
En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4^n}{(n+3)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(4^n)^{\frac{1}{n}}}{((n+3)^n)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n+3} = 0.$$

Comme $l = 0 < 1$, on déduit que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{n \cdot n^n}$ est convergente.

ii) On a $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{5n^3+n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$. Donc selon le test de divergence, la série diverge.

iii) On a $\left|\frac{\cos\left(n^2+1\right)}{n^2}\right| \leq n^{-2}, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ est une série convergente. Par conséquent, la série est convergente par le test de comparaison.

iv) On a $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5+4}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5}} = n^{-2}, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ est une série convergente. Donc, par le test de comparaison, la série est convergente.

v) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{((n+1)!)^3 4^n}{(n!)^3 4^{n+1}} = \frac{(n+1)^3 (n!)^4}{(n!)^3 4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{4} = +\infty$. Donc par le test d'Alembert, la série diverge.

vi) On a $\left|\left(\frac{2n}{4n+1}\right)^n\right| \leq \left|\left(\frac{2n}{4n}\right)^n\right| = (1/2)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ et la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ est convergente puisque $0 < q = 1/3 < 1$. Par conséquent, la série est convergente par le test de comparaison.

Exercice 194 *Montrer que les séries de terme général*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} \qquad et \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{n}$$

ne sont pas de même nature et que pourtant $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Solution :
On a
• $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ est décroissant et tend vers 0, donc d'après la règle de Leibniz, la série de terme général u_n est une série convergente.
• On sait que la sérié de terme général $\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente donc la série de terme général v_n est la somme d'une série convergente et d'une série divergente. Par conséquent, elle diverge.
D'autre part, on a

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}} = 1 + \frac{\sqrt{2n+1}}{(-1)^n n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}} \to 1.$$

Ce qui montre l'équivalence de ces deux séries.
Les deux séries ne sont pas de même nature puisque les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas de signes constants.

Bibliographie

[1] A. El Kaabouci, D. Essayed, Mathématiques, Edition ellipses, 2013.

[2] J.M. Monier, Analyse PC-PSI-PT, Dunod, Paris 2004.

[3] A. Bégyn, S. Pelletier, K. Jullian-Dupoiron, F. Desveaux, Mathématiques, Edition Dunod, 2011.

[4] Y. Bougrov, S. Nikolski, Cours de Mathématiques Supérieures, Editions Mir, Moscou, 1983.

[5] P. Dupont, Exercices corrigés de mathématiques, tome 2, 3^e, 2008.

[6] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.

[7] N. PISKOUNOV, Calcul différentiel et intégral, tome 2, 9^e, 1980.

[8] K. Allab, Eléments d'Analyse, OPU, Alger, 1984.

[9] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Cours d'analyse, Librairie Armand Colin, Paris, 1976.

[10] J. Lelong-Ferrand, J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 4, Edition Dunod, 1992.