Série de TD n°2 d'analyse 2

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = 2x^2 - 1\ ;\ y' - xy = 0; xy' - y = 0; y' - e^x y = 0;\ \sqrt{4 - x^2}y' - xy = 0;$$

$$(1 + x^2)y' + 3xy = 0\ ; xy' = y + xy$$

Déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :

$$x^2y' - y = 0$$

vérifiant la condition $y(2) = 1$.

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = -5y + 3\ ;\ y' = -y + xe^{-x} + 1\ ; y' = 3y + \sin(3x)\ \ ; y' = y + \sin x + 2\cos x\ ;$$

$$3y' = -2y + x^3 + 6x + 1$$

Déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :

$$y' = -3y + 4e^x$$

vérifiant la condition $y(0) = -2$.

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2\ ; y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

Exercice 4 :

On appelle équation de Bernoulli, l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n\ (n > 0 \text{ et } n \neq 1)$$

En utilisant le changement de variable $z(x) = y(x)^{1-n}$, montrer que l'équation de Bernoulli se réduit à une équation différentielle linéaire du premier ordre. <u>Application :</u> $y' = y + y^2$

Exercice 5 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 6y - 1 = 0\ ; 3y'' + 2y + 4y = 0\ ;\ y'' - 6y + 3 = 0\ ;\ 4y'' + 4y' + y = (x^3 + 1)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y'' - 4y' + 5y = xe^x\cos(2x)\ \ ; y'' + 4y' + 4 = xe^{-2x}\ln x\ ;\ y'' + y' + 2y = \frac{2xe^{2x}}{1 + x^2}$$

Exercice 6 : (à faire) Résoudre l'équation différentielle $\cos(x)\, y'' - 2\sin(x)\, y' - 2\cos(x)\, y = e^x$ en posant $y(x) = z(x)/\cos(x)$.

Corrigé de la série n°2 d'analyse 2

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = 2x^2 - 1 \to y = \int (2x^2 - 1)dx = \frac{2}{3}x^3 - x + C$$

$$y' - xy = 0 \to y' = xy \to \frac{y'}{y} = x \to \frac{dy}{y} = xdx\left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \to \int \frac{dy}{y} = \int xdx \to \ln y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\to y = Ae^{\frac{1}{2}x^2}\ (A = e^C)$$

$$xy' - y = 0 \to xy' = y \to \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \to \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}\left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \to \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \to \ln y = \ln x + C$$

$$\to y = Ax\ (A = e^C)$$

$$y' - e^x y = 0 \to y' = e^x y \to \frac{y'}{y} = e^x \to \frac{dy}{y} = e^x dx\left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \to \int \frac{dy}{y} = \int e^x dx$$

$$\to \ln y = e^x + C \to y = Ae^{e^x}\ (A = e^C)$$

$$\sqrt{4 - x^2}y' - xy = 0 \to \sqrt{4 - x^2}y' = xy \to \frac{y'}{y} = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \to \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}} \to \ln y = -\sqrt{4 - x^2} + C \to y = Ae^{-\sqrt{4-x^2}}\ (A = e^C)$$

$$(1 + x^2)y' + 3xy = 0 \to (1 + x^2)y' = -3xy \to \frac{y'}{y} = -\frac{3x}{1 + x^2}\left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \to \frac{dy}{y} = -\frac{3xdx}{1 + x^2}$$

$$\to \ln y = -\frac{3}{2}\ln(1 + x^2) + C \to y = A(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{A}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

$$xy' = y + xy \to xy' = (1 + x)y \to \frac{y'}{y} = \frac{1 + x}{x} = 1 + \frac{1}{x}\left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \to \frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\to \int \frac{dy}{y} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \to\to \ln y = x + \ln x + C = \ln e^x + \ln x + C = \ln(xe^x) + C \to y = Axe^x\ (A = e^C)$$

Déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :

$$x^2y' - y = 0$$

Vérifiant la condition $y(2) = 1$.

$$x^2y' - y = 0 \to x^2y' = y \to \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2}\left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \to \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2} \to \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2} \to \ln y = -\frac{1}{x} + C$$

$$\to y = Ae^{-\frac{1}{x}}\,(A = e^C)$$

Solution particulière $y(2) = 1$:

$$y(2) = Ae^{-\frac{1}{2}} = 1 \to A = e^{\frac{1}{2}} \to y = e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}$$

<u>Exercice 2 :</u>

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' = -5y + 3 \to \frac{dy}{dx} = -5\left(y - \frac{3}{5}\right) \to \frac{dy}{y - \frac{3}{5}} = -5dx \to \int \frac{dy}{y - \frac{3}{5}} = \int -5dx$$

$$\to \ln\left(y - \frac{3}{5}\right) = -5x + C \to y - \frac{3}{5} = Ae^{-\frac{3}{5}x} \to y = Ae^{-\frac{3}{5}x} + \frac{3}{5}\,(A = e^C)$$

$$y' = -y + xe^{-x} \to y' + y = xe^{-x} \to y' + y = 0\,(eq.\text{hom}) \to \frac{dy}{dx} = -y \to \frac{dy}{y} = -dx$$

$$\to \int \frac{dy}{y} = -\int dx \to \ln y = -x + C \to y = Ae^{-x}\,(A = e^C)$$

$$var.const \to A = A(x) \to y = A(x)e^{-x} \to y' = A'(x)e^{-x} - A(x)e^{-x}$$

$$y' = -y + xe^{-x} \to A'(x)e^{-x} - A(x)e^{-x} = -A(x)e^{-x} + xe^{-x} \to A'(x) = x \to A(x) = \frac{1}{2}x^2 + C'$$

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C'\right)e^{-x}$$

$$y' = 3y + \sin(3x) \to y' = 3y\,(eq.hom) \to y = Ae^{3x}\,(A = e^C)$$

$$var.const \to A = A(x) \to y = A(x)e^{3x} \to y' = A'(x)e^{3x} + 3A(x)e^{3x}$$

$$y' = 3y + \sin(3x) \to A'(x)e^{3x} + 3A(x)e^{3x} = 3A(x)e^{3x} + \sin(3x) \to A'(x) = \sin(3x)\,e^{-3x}$$

$$intég.partie \to A(x) = -\frac{1}{6}\cos(3x)\,e^{-3x} - \frac{1}{6}\sin(3x)\,e^{-3x} + C'$$

$$\to y = \left(-\frac{1}{6}\cos(3x)\,e^{-3x} - \frac{1}{6}\sin(3x)\,e^{-3x} + C'\right)e^{3x} = -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{6}\sin(3x) + C'e^{3x}$$

$$y' = y + \sin x + 2\cos x \rightarrow y' = y\ (eq.hom) \rightarrow y = Ae^{x}\ (A = e^{C})$$

$$var.const \rightarrow A = A(x) \rightarrow y = A(x)e^{x} \rightarrow y' = A'(x)e^{x} + A(x)e^{x}$$

$$y' = y + \sin x + 2\cos x \rightarrow A'(x)e^{x} + A(x)e^{x} = A(x)e^{x} + \sin x + 2\cos x$$

$$\rightarrow A'(x) = (sin\,x + 2\,cos\,x)e^{-x} \rightarrow intég.partie \rightarrow A(x) = -\frac{3}{2}e^{-x}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin x + C'$$

$$\rightarrow y = \left(-\frac{3}{2}e^{-x}\cos x + \frac{1}{2}e^{-x}\sin x + C'\right)e^{x} = -\frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + C'e^{x}$$

$$3y' = -2y + x^3 + 6x + 1 \rightarrow 3y' = -2y\ (eq.hom) \rightarrow y = Ae^{-\frac{2}{3}x}\ (A = e^{C})$$

$$var.const \rightarrow A = A(x) \rightarrow y = A(x)e^{-\frac{2}{3}x} \rightarrow y' = A'(x)e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3}A(x)e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$3y' = -2y + x^3 + 6x + 1 \rightarrow 3A'(x)e^{-\frac{2}{3}x} - 2A(x)e^{-\frac{2}{3}x} = -2A(x)e^{-\frac{2}{3}x} + x^3 + 6x + 1$$

$$\rightarrow A'(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 6x + 1)e^{\frac{2}{3}x} \rightarrow int.partie \rightarrow A(x) = \frac{1}{8}e^{\frac{2}{3}x}(4x^3 - 18x^2 + 126x - 177) + C'$$

$$y = \left(\frac{1}{8}e^{\frac{2}{3}x}(4x^3 - 18x^2 + 126x - 177) + C'\right)e^{-\frac{2}{3}x}$$

Déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :

$$y' = -3y + 4e^{x} \rightarrow y' = -3y\ (eq.hom) \rightarrow y = Ae^{-3x}\ (A = e^{C})$$

$$var.const \rightarrow A = A(x) \rightarrow y = A(x)e^{-3x} \rightarrow y' = A'(x)e^{-3x} - 3A(x)e^{-3x}$$

$$y' = -3y + 4e^{x} \rightarrow A'(x)e^{-3x} - 3A(x)e^{-3x} = -3A(x)e^{-3x} + 4e^{x} \rightarrow A'(x) = 4e^{4x}$$

$$\rightarrow A(x) = e^{4x} + C' \rightarrow y = (e^{4x} + C')e^{-3x} = e^{x} + C'e^{-3x}$$

Solution particulière $y(0) = -2$:

$$y(0) = 1 + C' = -2 \rightarrow C' = -3 \rightarrow y = e^{x} - 3e^{-3x}$$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2 \rightarrow (1 + x^2)y' - 2xy = 0\ (eq.hom) \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1 + x^2}$$

$$y \rightarrow \ln y = \ln(1 + x^2) + C \rightarrow y = A(1 + x^2)$$

$$var.const \rightarrow A = A(x) \rightarrow y = A(x)(1 + x^2) \rightarrow y' = A'(x)(1 + x^2) + 2xA(x)$$

$$(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2 \rightarrow A'(x)(1 + x^2)^2 + 2x(1 + x^2)A(x) - 2xA(x)(1 + x^2)$$

$$= (1 + x^2)^2 \rightarrow A'(x) = 1 \rightarrow A(x) = x + C' \rightarrow y = (x + C')(1 + x^2)$$

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \to y' + 2xy = 0\ (eq.hom) \to \frac{dy}{y} = -2xdx \to \ln y = -x^2 + C$$

$$\to y = Ae^{-x^2}\ (A = e^C)$$

$$var.const \to A = A(x) \to y = A(x)e^{-x^2} \to y' = A'(x)e^{-x^2} - 2xA(x)e^{-x^2}$$

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \to A'(x)e^{-x^2} - 2xA(x)e^{-x^2} + 2xA(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

$$\to A'(x) = 2x \to A(x) = x^2 + C' \to y = (x^2 + C')e^{-x^2}$$

Exercice 4 :

On appelle équation de Bernoulli, l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n\ (n > 0 \text{ et } n \neq 1)$$

En utilisant le changement de variable $z(x) = y(x)^{1-n}$, montrer que l'équation de Bernoulli se réduit à une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$z(x) = y(x)^{1-n} \to y = z^{\frac{1}{1-n}} \to y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} \frac{dz}{dx}$$

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n \to \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}} \frac{dz}{dx} = a(x)z^{\frac{1}{1-n}} + b(x)z^{\frac{n}{1-n}}$$

Divisons les deux cotés par $\left(z^{\frac{n}{1-n}}\right)$, on obtient :

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} = a(x)z^{\frac{1}{1-n}-\frac{n}{1-n}} + b(x) = a(x)z^{\frac{1-n}{1-n}} + b(x)$$

Soit une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz(x)}{dx} = a(x)z(x) + b(x)$$

<u>Application :</u> $y' = y + y^2$

$$n = 2 \to y = z^{-1} = \frac{1}{z} \to -\frac{dz}{dx} = z + 1 \to \frac{dz}{z+1} = -dx \to \ln(z+1) = -x + C \to z + 1$$

$$= Ae^{-x}(A = e^C) \to z = Ae^{-x} - 1 \to y = \frac{1}{Ae^{-x} - 1}$$

Exercice 5 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 6y - 1 = 0 \to k^2 + 6k - 1 = 0 \to \Delta = 40 > 0 \to k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{10}$$

$$\to y = C_1 e^{(-3+\sqrt{10})x} + C_2 e^{(-3-\sqrt{10})x}$$

$$3y'' + 2y + 4y = 0 \to \Delta' = -11 < 0 \to k_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{3} = -\frac{1}{3} \pm i\frac{\sqrt{11}}{3}$$

$$\rightarrow y = e^{-\frac{1}{3}x}\left[C_1 \cos\left(\sqrt{11}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{11}x\right)\right]$$

$$y'' - 6y + 9 = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 3 \rightarrow y = (C_1 x + C_2)e^{3x}$$

$$4y'' + 4y' + y = (x^3 + 1)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{80}x^2(x^3 + 10)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$y'' - 4y' + 5y = xe^x \cos(2x)$$

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} \sin x + C_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos x + e^x \left[\frac{1}{34225}(-2035x + 2588)\cos(2x) + \frac{8}{185}\left(x + \frac{202}{185}\right)\sin(2x)\right]$$

$$y'' + 4y' + 4 = xe^{-2x} \ln x \text{ (à faire)}$$