Série de TD n°3 d'Analyse 2

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs réelles définie par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suite à valeurs réelles définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \quad \text{et} \quad w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire une expression de v_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. En déduire une expression de w_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
3. Calculer $v_n + w_n$ de deux façons différentes et en déduire u_n en fonction de n, de u_0 et de u_1.
4. Selon les valeurs de u_0 et de u_1 déterminer si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et le cas échéant déterminer sa limite.

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{5}$
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = \frac{3}{2}$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 :

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ **2.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ **3.** $u_n = n\sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5.** $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n^2+1}$ **6.** $u_n = \dfrac{1}{n!}$

7. $u_n = \dfrac{3^n + n^4}{5^n - 2^n}$

Corrigé de la série n°3 d'analyse 3

Exercice 1 :

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $(1/2)$:

$$\begin{cases} v_{n+1} = 3u_{n+1} - \frac{3}{2}u_{n+2} \\ u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n \end{cases} \rightarrow v_{n+1} = 3u_{n+1} - \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1} - u_n\right) = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}u_n$$
$$= \frac{1}{2}\left(3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1}\right) = \frac{1}{2}v_n$$
$$v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. Montrer que (w_n) est une suite géométique de raison 2 :

$$\begin{cases} w_{n+1} = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}u_{n+2} \\ u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n \end{cases} \rightarrow w_{n+1} = -\frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}u_{n+1} - u_n\right) = 3u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n$$
$$= 2\left(-\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}\right) = 2w_n$$
$$w_n = w_0 2^n = \left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)2^n$$

3. Calculer $v_n + w_n$ de deux façons différentes et en déduire u_n en fonction de n, u_0 et u_1 :

$$\begin{cases} v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \\ w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1} \end{cases} \rightarrow v_n + w_n = \left(\frac{9}{4}\right)u_n \rightarrow u_n = \frac{4}{9}(v_n + w_n)$$
$$v_n + w_n = \left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)2^n$$

Ce qui donne :

$$u_n = \frac{4}{9}(v_n + w_n) = \frac{4}{9}\left[\left(3u_0 - \frac{3}{2}u_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{3}{4}u_0 + \frac{3}{2}u_1\right)2^n\right]$$
$$= \left(\frac{4}{3}u_0 - \frac{2}{3}u_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1\right)2^n$$

4. Selon les valeurs de u_0 et u_1, déterminer si la suite (u_n) converge et le cas échéant déterminer sa limite :

Pour n'importe quelles valeurs de u_0 et u_1, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}u_0 - \frac{2}{3}u_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \ \left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$$

- Si $-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1\right)2^n = +\infty$$

La suite (u_n) diverge.

- Si $-\frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}u_0 - \frac{2}{3}u_1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Exercice 2 :

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison (-3/5) :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{u_n+8}{2u_n+1}-2}{\frac{u_n+8}{2u_n+1}+2} = \frac{-3u_n+6}{5u_n+10} = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{u_n-2}{u_n+2}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)v_n$$

2. Exprimer v_n en fonction de n :

$$v_n = v_0\left(-\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{u_0-2}{u_0+2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

3. Exprimer u_n en fonction de n :

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+2} \to u_n - 2 = u_n v_n + 2v_n \to (1-v_n)u_n = 2(v_n+1) \to u_n = 2\frac{v_n+1}{1-v_n}$$

$$\to u_n = 2\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)^n + 1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)^n}$$

4. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite :

La suite (v_n) est une convergente $\left(-1 < -\frac{3}{5} < 1\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$$

Donc la suite (u_n) est également convergente :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(2\frac{v_n+1}{1-v_n}\right) = 2$$

Exercice 3 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n < 2$

On va utiliser le raisonnement par récurrence :

Pour $n = 0$: $1 < \frac{3}{2} < 2$

On suppose que : $1 < u_n < 2$

Montrons que : $1 < u_{n+1} < 2$

$$1 < u_n < 2 \to 0 < u_n - 1 < 1 \to 0 < (u_n-1)^2 < 1 \to 1 < (u_n-1)^2 + 1 < 2 \to 1 < u_{n+1} < 2$$

2. Montrer que (u_n) est strictement monotone :

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n = (u_n - 1)^2 - (u_n - 1) = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

$$1 < u_n < 2 \rightarrow (u_n - 1)(u_n - 2) < 0 \rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \rightarrow u_{n+1} < u_n$$

La suite (u_n) est strictement décroissante.

3. En déduire que est convergente te déterminer sa limite :

La suite est décroissante et minorée $(u_n > 1)$, donc elle est convergente.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 1$$

Exercice 4 :

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \frac{n}{n^3+1}$

On a au voisinage de l'infini :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente $(\alpha = 2 > 1)$, cette série est également convergente.

2. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$

Le raisonnement est identique :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente $(\alpha = 3/2 > 1)$, cette série est également convergente.

3. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

En effectuant le changement de variable $p = \frac{1}{n}$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{p\to 0} \frac{\sin p}{p} = 1$$

La série est divergente (son terme générale ne tend pas vers 0).

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

En effectuant le changement de variable $p = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{p\to 0} p \ln(1+p) = 0$$

Au voisinage de 0, on a $\ln(1+p) \sim 0$. Par conséquent :

$$u_p \sim_0 p^2$$

Au voisinage de l'infini, on aura :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente $(\alpha = 1)$, cette série est également divergente.

5. $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$

Au voisinage de l'infini, on a :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente $(\alpha = 1)$, cette série est également divergente.

6. $u_n = \frac{1}{n!}$

Pour $n \geq 2$, on a $n! \geq 2^{n-1}$ (ceci se démontre par récurrence). On en déduit que :

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par comparaison avec la série géométrique convergente $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$, cette série est également convergente.

7. $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n}$

Au voisinage de l'infini, on a :

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Par comparaison avec la série géométrique convergente $\left(-1 < \frac{3}{5} < 1\right)$, cette série est également convergente.