Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnele

Lience 2 (Licence à programme national)

Analyse complexe

Série de TD N°2

Exercice 1:

1. Calculer u et v $(z = x + i\,y\ ,\ w = u + i\,v)$ si $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$
2. Déterminer l'image du cercle unité par cette transformation.
3. Mêmes questions pour les transformations
   $w = z^3 \quad , \quad w = (2z-1)/(2-z)\ ,\ \ w = (1+z)/(1-z).$

Solution :

1. On a $\quad u = \dfrac{1}{2}\dfrac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}$ et $v = \dfrac{1}{2}\dfrac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}.$
2. En posant $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$, on obtient $u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos t$ et $v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin t$

   ce qui représente une ellipse si $r \neq 1$ et le segment $[-1, 1]$ si $r = 1$.
3. Pour les trois autres transformations:
   - Pour $w = z^3$, on a $u = x(x^2 - 3y^2)$ et $v = y(3x^2 - y^2)$. Si $|z| = r$, $|w| = r^3$.
   - Pour $w = (2z-1)/(2-z)$, on a $u = \dfrac{-2x^2 + 2y^2 + 5x - 2}{(2-x)^2 + y^2}$ et $v = \dfrac{y(5-4x)}{(2-x)^2+y^2}$.

     Lorsque $z = e^{it}$, on obtient $\left|\dfrac{2 - e^{-it}}{2 - e^{it}}\, e^{it}\right| = 1.$
   - Pour $w = (1+z)/(1-z)$, on a $u = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}$ et $v = \dfrac{2y}{(1-x)^2+y^2}$.

     Lorsque $|z| = 1$, $u = 0$ et $-\infty < v < +\infty$.

Exercice 2: Trouver les solutions des deux équations suivantes :

$$\bullet \ e^z = -a \ (a > 0) \quad \bullet \ e^{iz} = e^{i\bar{z}}.$$

Solution :

• En comparant les modules dans $e^x(\cos y + i \sin y) = -a$, on obtient:

$x = \ln a$ puis $(\cos y + i \sin y) = -1$ entraîne $y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, donc: $z = \ln a + i(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

• L'équation s'écrit $e^y(\cos x + i \sin x) = e^{-y}(\cos x - i \sin x)$.

Si $x \neq (2k+1)(\pi/2)$, il faut que $e^y = e^{-y}$, donc que $y = 0$ et $\sin x = -\sin x$ c'est-à-dire que $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Quant à l'équation $e^y(-1)^k = -e^{-y}(-1)^k$, elle n'admet aucune solution. Finalement, $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3:

Si $ae^{is} + be^{it} = ce^{iu}$ $(a, b, c > 0)$, exprimer c et u en terme de a, s, b et t.

Solution :

Des relations $a\cos s + b\cos t = c\cos u$, $a\sin s + b\sin t = c\sin u$,

on tire $c = \sqrt{a^2 + 2ab\cos(s-t) + b^2}$ et $\tan u = \dfrac{a\sin s + b\sin t}{a\cos s + b\cos t}$.

Exercice 4:

Déduire la formule $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$ de la relation $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Solution :

$$\text{On a } \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{1}{4}\left((e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}\right) = \cos(z_1 + z_2).$$

Exercice 5:

Montrer que $$\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}.$$

Solution :

On a $\left|e^{2z+i}\right| = e^{2x}$, $\left|e^{iz^2}\right| = e^{-2xy}$ et le résultat suit de l'inégalité du triangle.