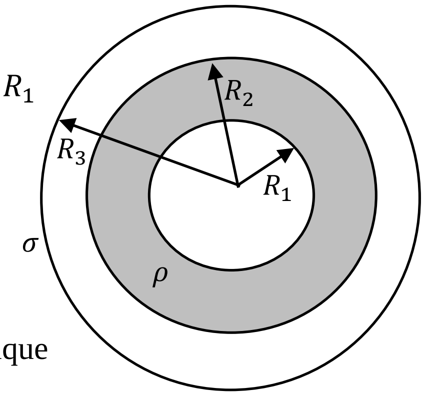
Série de TD 04

Exercice 01

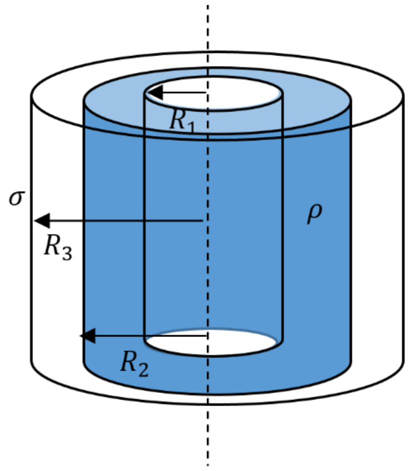


Soit deux sphères concentriques, la première de rayon intérieur R_1 et extérieure R_2 uniformément chargée en volume avec une densité volumique uniforme ρ positive entourée par une deuxième sphère creuses de rayon R_3 ($R_3 > R_2$) uniformément chargée en surface avec une densité surfacique de charge positive σ.

1- En utilisant le théorème Gauss, calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$. Distinguer les régions : $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$, $r > R_3$.

2- Trouver le potentiel électrostatique en tout point M de l'espace.

Exercice 02 :



On considère deux cylindres infinis et coaxiaux. Le premier chargé positivement avec une densité de charge positive ρ comprise entre son rayon intérieure R_1 et extérieure R_2. Le deuxième chargé positivement en surface avec une densité surfacique de charge positive σ.

1- En utilisant le théorème Gauss, calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en tout point M de l'espace,
tel que $OM = r$. Distinguer les régions : $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $R_2 < r < R_3$, $r > R_3$.

2- Trouver le potentiel électrostatique en tout point M de l'espace sachant que $V(r = 0) = 0$.

Exercice 03 :

Un cylindre de hauteur infini et de rayon R est chargé en volume avec une densité volumique $\rho = \rho(r)$. Le potentiel électrique crée par cette distribution de charge est :

$$\begin{cases} r \leq R: V_1 = -\frac{A}{9\varepsilon_0} r^3 + C_1 \\ r \geq R: V_2 = -\frac{A}{3\varepsilon_0} R^3 \ln(r) + C_2 \end{cases}$$

avec, A une constante positive, C_1 et C_2 des constantes quelconques

1. Déterminer pour $r \leq R$ et $r \geq R$:

2. Le champ électrique et vérifier s'il est continu en $r = R$

3. La densité de charge volumique $\rho(r)$ et en déduire la charge totale portée par le cylindre.

Exercice 01 :

Le théorème de Gauss énonce que :

$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

En raison de la symétrie sphérique de la distribution, le champ est radial (Le champ est porté par la droite (OM)) :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss, la surface S d'une sphère imaginaire de centre O et de rayon $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Considérons une surface élémentaire dS centré en M. Le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est perpendiculaire à **la** tangente en M et se dirige vers l'extérieur de la surface de Gauss.

$$\overrightarrow{dS} = dS.\vec{e}_r$$

Le flux du champ à travers la surface de Gauss est donc:

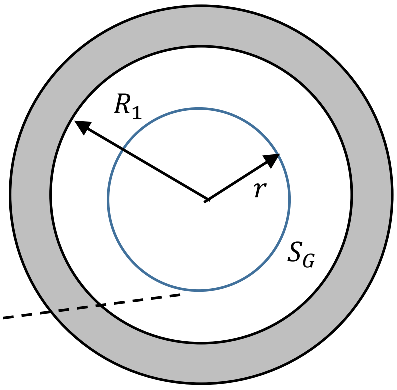
$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \oiint E_r.dS = E_r \oiint dS = E_r.4\pi r^2$$

La loi de Gauss nous donne le champ radial :

$$E_r = \frac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss dépend de la position du point M dans l'espace. D'après la distribution de charges, on distingue 4 régions :

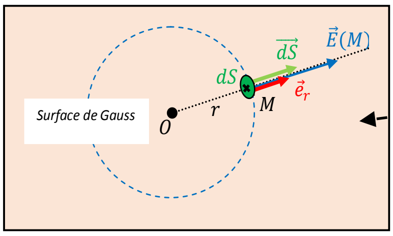
Région 1 ($r < R_1$)



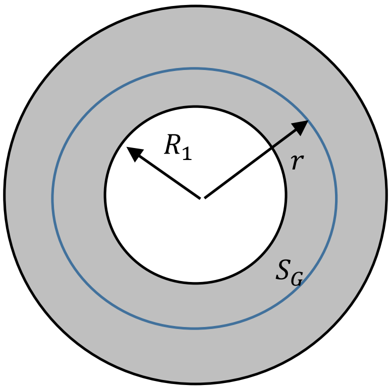
$$q_{int} = 0$$

Le champ créé dans cette région est :

$$E_r = 0$$



Région 2 ($R_1 < r < R_2$)



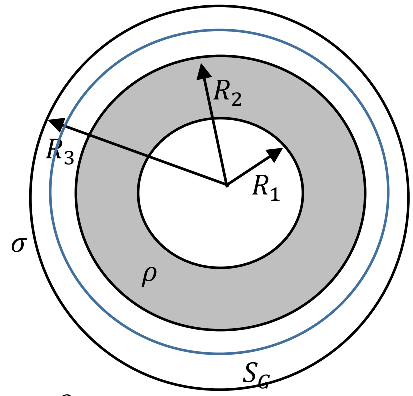
$$q_{int} = \rho(V_G - V_1) = \frac{4\pi}{3}\rho(r^3 - R_1^3)$$

On obtient le champ suivant :

$$E_r = \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2(\boldsymbol{M}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_r$$

Région 3 $(R_2 < r < R_3)$



$$q_{int} = \rho(V_2 - V_1) = \frac{4\pi}{3}\rho(R_2^3 - R_1^3)$$

Le champ sera donné par:

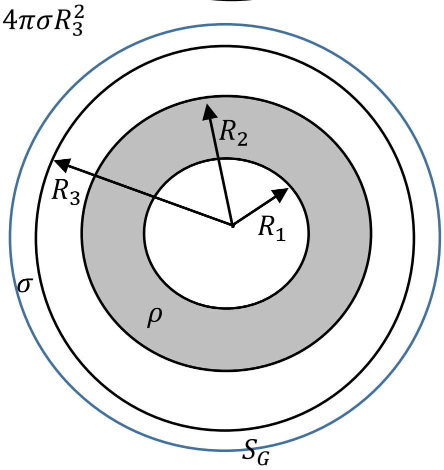
$$E_r = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_3(M) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

Région 4 $(r > R_3)$

$$q_{int} = \rho(V_2 - V_1) + \sigma S_3 = \frac{4\pi}{3}\rho(R_2^3 - R_1^3) + 4\pi\sigma R_3^2$$

Le champ sera donné par:



$$E_r = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_4(M) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

2. Calcul du potentiel

- **région 4 $(r > R_3)$**

En coordonnées sphériques, le potentiel est donné par:

$$V_4(r) = -\int \vec{E}_4.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_4(r) = -\int \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

Apres intégration, nous obtenons :

$$V_4(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r} + C$$

On a :

$$V_4(+\infty) = 0 + C = 0$$

On trouve :

$$V_4(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 r}$$

- **région 3 $(R_2 < r < R_3)$**

$$V_3(r) = -\int \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_3(r) = -\int \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

Apres intégration, nous obtenons :

$$V_3(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r} + C$$

La continuité de potentiel $V_3(r = R_3) = V_4(r = R_3)$

$$\frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_3} + C = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3) + 3\sigma R_3^2}{3\varepsilon_0 R_3}$$

$$C = \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_3(r) = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

- **région 2 $(R_1 < r < R_2)$**

$$V_2(r) = -\int \vec{E}_2.\overrightarrow{dl}$$

$$V_2(r) = -\int \frac{\rho(r^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 r^2}.dr$$

$$V_2(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(-\int r.dr + \int \frac{R_1^3}{r^2}.dr\right)$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + C$$

La continuité de potentiel $V_2(r = R_2) = V_3(r = R_2)$

$$-\frac{\rho R_2^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{R_2} + C = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3\varepsilon_0 R_2} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_2(r) = \frac{\rho(3R_2^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

- **région 1 $(r < R_1)$**

$$V_1(r) = -\int \vec{E}_1.\overrightarrow{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_1(r) = C$$

La continuité de potentiel $V_1(r = R_1) = V_2(r = R_1)$

$$C = \frac{\rho(3R_2^2 - R_1^2)}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R_1^3}{R_1} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

$$V_1(r) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}$$

Exercice 02:

Le théorème de Gauss énonce que :

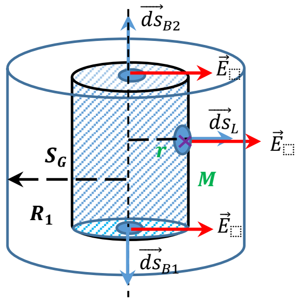
$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

En raison de la symétrie cylindrique de la distribution, le champ est radial (Le champ est porté par la droite (OM)) :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss, la surface S d'un cylindre imaginaire de rayon $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et de hauteur h.

Le flux du champ à travers la surface de Gauss est donc:



$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B1} + \iint_{S_{B2}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B2} + \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{S_L} = E_r.4\pi r^2$$

$\iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B1} = \iint_{S_{B2}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{B2} = 0$ puisque $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{B1}$ et $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}_{B2}$

$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{S_L} = \iint_{S_{B1}} E\,dS_L$ puisque $\vec{E}\,//\,\overrightarrow{dS}_L$.

Sur la surface latérale du cylindre $r = cst$ donc le champ E est constant

$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{S_L} = \iint_{S_{B1}} E\,dS_L = E\iint_{S_{B1}} dS_L = ES_L$ ($S_L$la surface latérale du cylindre) ;
$S_L = 4\pi rh$ (h la hauteur du cylindre de gauss)

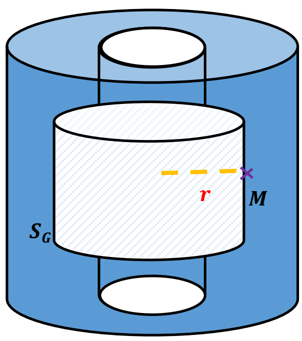
$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = ES_L = E4\pi rh$$

1- Région I: Si $r < R_1$

$$\oiint \vec{E}_I(M).\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_I S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{int} = 0$$
$$E_I = 0$$

2- Région II : Si $R_1 \leq r < R_2$



$$E_{II}S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (S_L = 2\pi rh)$$

q_{int} est la charge comprise dans la couche entre le cylindre de Gauss et le cylindre de rayon R_1

$$q_{int} = \rho(V_G - V_1)$$

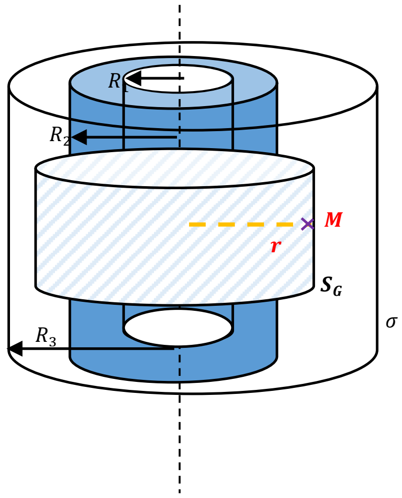
V_G Le volume du cylindre de Gauss
V_1 Le volume du cylindre de de rayon R_1

$$q_{int} = \rho(\pi r^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$E_{II}.2\pi rh = \frac{\rho(\pi r^2 h - \pi R_1^2 h)}{\varepsilon_0} \rightarrow E_{II} = \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{II}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

3- Région III :Si $R_2 \leq r < R_3$



$$E_{III}S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (S_L = 2\pi rh)$$

q_{int} est la charge comprise dans la couche entre le cylindre de rayon R_2et le cylindre de rayon R_1

$$q_{int} = \rho(V_2 - V_1)$$

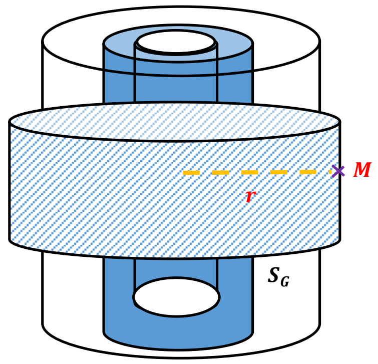
V_2 Le volume du cylindre de de rayon R_2
V_1 Le volume du cylindre de de rayon R_1

$$q_{int} = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$E_{II}.2\pi rh = \frac{\rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)}{\varepsilon_0} \to E_{II} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{III}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

4- Région IV: Si $r \geq R_3$



$$E_{IV}S_L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (S_L = 2\pi rh)$$

q_{int} est la charge $q_1$comprise dans la couche entre le cylindre de rayon R_2et le cylindre de rayon R_1plus la charge $q_2$qui se trouve sur le cylindre de rayon R_3

$$q_{int} = q_1 + q_2$$

$$q_1 = \rho(V_2 - V_1)$$

V_2 Le volume du cylindre de de rayon R_2
V_1 Le volume du cylindre de de rayon R_1

$$q_1 = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$q_2 = \sigma S_3$$

S_3 La surface latérale du cylindre de rayon R_3

$$q_2 = \sigma S_3 = 2\pi\sigma R_3 h$$

$$q_{int} = q_1 + q_2 = \rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h) + 2\pi\sigma R_3 h$$

$$E_{IV}.2\pi rh = \frac{\rho(\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h) + 2\pi\sigma R_3 h}{\varepsilon_0} \to E_{IV} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{IV}}(\boldsymbol{M}) = \left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}\right)\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}}$$

2. Calcul du potentiel

- **région I ($r < R_1$)**

En coordonnées cylindriques, le potentiel est donné par:

$$V_I(r) = -\int \vec{E}_I.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_I(r) = C$$

On a :

$$V_I(r=0) = 0 \rightarrow C = 0$$

On trouve :

$$V_I(r) = 0$$

- **région II ($R_1 \leq r < R_2$)**

$$V_{II}(r) = -\int \vec{E}_{II}.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient:

$$V_{II}(r) = -\int \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} dr$$

Apres intégration, nous obtenons :

$$V_{II}(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) + C$$

La continuité de potentiel $V_{II}(r = R_1) = V_I(r = R_1)$

$$-\frac{\rho}{4\varepsilon_0} R_1^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln(R_1) + C = 0$$

$$C = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R_1^2 - \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln(R_1)$$

$$V_{II}(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) + \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R_1^2 - \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln(R_1)$$

$$V_{II}(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} (r^2 - R_1^2) + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right)$$

- **région III ($R_2 \leq r < R_3$)**

$$V_{III}(r) = -\int \vec{E}_{III}.\vec{dl}$$

$$V_{III}(r) = -\int \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} . dr$$

$$V_{III}(r) = -\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \ln(r) + C$$

La continuité de potentiel $V_{II}(r = R_2) = V_{III}(r = R_2)$

$$-\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \ln(R_2) + C = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$C = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \ln(R_2)$$

$$C = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 \ln(R_2) - R_1^2 \ln(R_1))$$

$$V_{III}(r) = -\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \ln(r) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (R_2^2 \ln(R_2) - R_1^2 \ln(R_1))$$

- **région IV $(r \geq R_3)$**

$$V_{IV}(r) = -\int \vec{E}_{IV}.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

$$V_{IV}(r) = -\int \left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0 r}\right).dr$$

$$V_{IV}(r) = -\left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\right)\ln(r) + C$$

La continuité de potentiel $V_{IV}(r = R_3) = V_{III}(r = R_3)$

$$-\left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\right)\ln(R_3) + C$$

$$= -\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0}\ln(R_3) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$

$$C = \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln(R_3) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$

$$V_{IV}(r) = -\left(\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\right)\ln(r) + \frac{\sigma R_3}{\varepsilon_0}\ln(R_3) - \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2\ln(R_2) - R_1^2\ln(R_1))$$

Exercice 03 :

1- **Détermination du champ** :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

En coordonnées cylindrique le gradient est donné par :

$$\overrightarrow{grad} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- Si $r < R$

$$\vec{E}_1(r) = -\left(\frac{\partial V_1(r)}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V_1(r)}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V_1(r)}{\partial z}\vec{k}\right) = -\frac{\partial V_1(r)}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{A}{3\varepsilon_0}r^2\vec{e}_r$$

- Si $r \geq R$

$$\vec{E}_2(r) = -\left(\frac{\partial V_2(r)}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V_2(r)}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V_2(r)}{\partial z}\vec{k}\right) = -\frac{\partial V_2(r)}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{A}{3\varepsilon_0}R^3\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_r$$

2- **La continuité du champ pour $r = R$:**

pour $r = R$: $\begin{cases} E_1(R) = \frac{A}{3\varepsilon_0}R^2 \\ E_2(R) = \frac{A}{3\varepsilon_0}R^3\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{A}{3\varepsilon_0}R^2 \end{cases}$ donc, $E_1(R) = E_1(R)$ le champ électrique est continu au point $r = R$.

3- **La densité de charge volumique $\rho(r)$ et la charge totale portée par le cylindre :**

Selon le théorème de gauss le flux ϕ du champ est donné par :

$$\phi = \oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Donc,

$$d\phi = \frac{dq_{int}}{\varepsilon_0}$$

La distribution des charge est volumique donc, $\frac{dq_{int}}{dV} = \rho \rightarrow dq_{int} = \rho dV$ avec $dV = rdrd\theta dz$

Or ρ ne depend que de r donc on intègre sur la variable $\theta\ et\ z$

$$dV = rdr\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi hrdr$$

$$d\phi = \frac{\rho(r).2\pi hrdr}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\rho(r).2\pi hr}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$\phi = \oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \iint_{S_{B1}} \vec{E}\,\overrightarrow{dS}_{S_L} = \iint_{S_{B1}} E(r)\,dS_L = E(r)\iint_{S_{B1}} dS_L = E(r)S_L$ ($S_L$la surface latérale du cylindre) ; $S_L = 4\pi rh$ (h la hauteur du cylindre de gauss)

$$\phi = E(r)S_L = E(r)2\pi rh$$

$$\frac{d\phi}{dr} = E(r)S_L = \frac{2\pi hd(E(r)r)}{dr} \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \rightarrow \frac{\rho.\,2\pi hr}{\varepsilon_0} = 2\pi h\frac{d(E(r)r)}{dr} \rightarrow \rho(r) = \varepsilon_0\frac{1}{r}\frac{d(E(r)r)}{dr}$$

pour $r < R$: $\rho(r) = \varepsilon_0\frac{d(E_1(r)r)}{dr} = \varepsilon_0\frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{A}{3\varepsilon_0}r^2.r\right)}{dr} = Ar$

pour $r > R$ $\rho(r) = \varepsilon_0\frac{d(E_2(r)r)}{dr} = \varepsilon_0\frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{A}{3\varepsilon_0}R^3\left(\frac{1}{r}\right).r\right)}{dr} = 0$

La charge totale porté par le cylindre:

$$Q_T = \iiint_V \rho(r)dV = \int_0^R Ar(rdr)\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h dz = 2\pi hA\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2\pi hAR^3}{3}$$