Université A. Mira de Béjaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Année Universitaire 2021-2022

Examen de Maths 2

***Remarque :** Les étapes de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 *(07points)*:

Soit M la matrice suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2.
2. Calculer $detM$ le déterminant de la matrice M.
3. La matrice M est-elle inversible?. Si oui, calculer M^{-1} la matrice inverse de M.

Exercice 2 *(07points)*:

1- Calculer la primitive suivante:

$$\int \frac{6}{x^2 + 5x + 4} dx$$

2- Calculer l'intégrale suivante:

$$\int_0^{\pi} (sinx)(cosx)^2 dx$$

3- En utilisant l'intégration par parties, calculer:

$$I = \int (sinx)e^x dx$$

Exercice 3 *(06 points)*:

1- Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante:

$$y' = 2y + 3 \ldots\ldots\ldots (E)$$

2- Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante:

$$y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Bonne chance

Corrigé de l'examen maths 2

Exercice 1 : Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

07 points

1) Calculons M^2 :

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 9 & 11 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$ 1

2) Calculons det M :

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2-6) - (-1-3) - 2(-2-2)$$

$$= -8 + 4 + 8 = \boxed{4}$$ 2

3) La matrice M est elle inversible ? 1

on a : $\det M = 4 \neq 0$, donc M est inversible.

Calculons M^{-1} la matrice inverse de M.

on a : $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}(\text{Com}\, M)^t$ 0,5

$$\text{Com}\, M = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$ 1

$$\text{Com}\, M = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -5 & 4 & -3 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$ 0,5

d'où : $M^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -5 & 7 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}}$$ 1

Exercice 2 : (7 points)

1) Calculons $\int \frac{6}{x^2+5x+4}dx$

On a: $x^2+5x+4=0$, $\Delta = 25-4(1)(4) = 9$

$x_1 = \frac{-5-3}{2} = \boxed{-4}$ et $x_2 = \frac{-5+3}{2} = \boxed{-1}$

On pose: $\frac{6}{x^2+5x+4} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x+1}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \frac{(a+b)x+a+4b}{(x+4)(x+1)} = \frac{(a+b)x+a+4b}{x^2+5x+4}$ 0,5

par identification on a: $\begin{cases} a+b=0 \\ a+4b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-a \\ -3a=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$

donc $\boxed{\frac{6}{x^2+5x+4} = \frac{-2}{x+4} + \frac{2}{x+1}}$ 0,5

d'où: $\int \frac{6}{x^2+5x+4}dx = -2\int \frac{1}{x+4}dx + 2\int \frac{1}{x+1}dx$

$= \boxed{-2\ln|x+4| + 2\ln|x+1| + c \,/\, c \in \mathbb{R}}$

1

2) Calculons: $\int_0^{\pi} (\sin x)(\cos x)^2 dx$ 1

On a: $\int_0^{\pi} (\sin x)(\cos x)^2 dx = \frac{-1}{3}\int_0^{\pi} 3(-\sin x)(\cos x)^2 dx = \left[\frac{-1}{3}(\cos x)^3\right]_0^{\pi}$

$= \frac{-1}{3}(\cos\pi)^3 + \frac{1}{3}(\cos 0)^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$ 1

3) Calculons: $I = \int (\sin x)e^x dx$

$\int uv' = uv - \int u'v$

On pose: $\begin{cases} u = \sin x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \cos x \\ v = e^x \end{cases}$ 0,5

Donc: $\boxed{I = \int (\sin x)e^x dx = (\sin x)e^x - \int (\cos x)e^x dx}$ .... ① 0,5

Calculons $\int \cos x\, e^x dx$ par l'integration par parties

On pose: $\begin{cases} u = \cos x \\ v' = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\sin x \\ v = e^x \end{cases}$ 0,5

Donc: $\boxed{\int (\cos x)e^x dx = (\cos x)e^x + \underbrace{\int (\sin x)e^x dx}_{I}}$ .... ② 0,5

En remplace ② dans on obtient

$I = (\sin x)e^x - ((\cos x)e^x + I)$

$\Rightarrow 2I = (\sin x)e^x - (\cos x)e^x$ 0,5

Alors: $\boxed{I = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + c \,/\, c \in \mathbb{R}}$ 0,5

06 points

Exercice 3 1) Résolution l'équation : $y' = 2y + 3 \;....(E)$

⊛ Résolution l'equation homogène associée : $y' = 2y \;...(EH)$

On a : $(EH) \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = 2 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx.$

$\Rightarrow \ln|y| = 2x + C \,/\, C \in \mathbb{R}$

d'où : $\boxed{y_H = k e^{2x} \,/\, k \in \mathbb{R}}$ est la solution de (EH)

1

⊛ On utilise la methode de variation de la Constante :

on pose : $y = k(x)e^{2x}$ où k est une fonction de variable x

0,5

$\Rightarrow y' = k'(x)e^{2x} + 2k(x)e^{2x}$

on remplace y et y' dans l'équation (E), on obtient :

$k'(x)e^{2x} + \cancel{2k(x)e^{2x}} = \cancel{2k(x)e^{2x}} + 3$

$\Rightarrow k'(x) = 3e^{-2x}$

$\Rightarrow k(x) = 3\displaystyle\int e^{-2x}dx = \frac{-3}{2}e^{-2x} + \lambda \,/\, \lambda \in \mathbb{R}.$

d'où : $y = \left(\dfrac{-3}{2}e^{-2x} + \lambda\right)e^{2x} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}$

0,5

Alors $\boxed{y(x) = \lambda e^{2x} - \dfrac{3}{2} \,/\, \lambda \in \mathbb{R}}$ est la solution générale de (E)

1

2) Résolution l'équation : $y'' - 4y' + 3y = xe^{2x} \;....(E)$

L'équation homogène est : $y'' - 4y' + 3y = 0 \;....(EH)$

L'équation caractéristique est : $r^2 - 4r + 3 = 0 \;...(EC)$

$\Delta = 16 - 4(1)(3) = 4 > 0, \quad r_1 = \dfrac{4-2}{2} = \boxed{1}$ et $r_2 = \dfrac{4+2}{2} = \boxed{3}.$

donc : $\boxed{y_H = Ae^{x} + Be^{3x} \,/\, A, B \in \mathbb{R}}$ est la solution générale de (EH)

1

⊛ Recherche y_p la solution particulière de (E) :

On a le second membre de (E) est $f(x) = xe^{2x}$, Comme 2 n'est pas une racine de (EC) on pose donc : $\boxed{y_p = (ax+b)e^{2x}} \,/\, a, b \in \mathbb{R}$

d'où : $y'_p = ae^{2x} + (2ax+2b)e^{2x} \Rightarrow \boxed{y'_p = (2ax + a + 2b)e^{2x}}$

1

et $y''_p = 2ae^{2x} + (4ax + 2a + 4b)e^{2x} \Rightarrow \boxed{y''_p = (4ax + 4a + 4b)e^{2x}}$

Remplaçons y_p, y'_p et y''_p dans (E) on obtient :

$(4ax+4a+4b)\cancel{e^{2x}} - 4(2ax + a + 2b)\cancel{e^{2x}} + 3(ax+b)\cancel{e^{2x}} = x\cancel{e^{2x}}$

$\Rightarrow (4a - 8a + 3a)x + (\cancel{4a} + 4b - \cancel{4a} - 8b + 3b) = x.$

$\Rightarrow -ax - b = x \Rightarrow \begin{cases} -a = +1 \\ -b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

donc : $\boxed{y_p = -xe^{2x}}$ est la solution particulière de (E)

1

Alors : $\boxed{y = y_H + y_p = Ae^{x} + Be^{3x} - xe^{2x} \,/\, A, B \in \mathbb{R}}$

est la solution générale de (E).