Corrigé type Économétrie II — Mr HADRA.Y — 2021/2022 — 05 juin 2022

Exo 1 : (04 points)

1. C'est la matrice des variances-covariances des erreurs. (0,5)
justification : (0,5) $\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon')$

2. Les variances des erreurs (diagonale) ne sont pas constantes, il se pose le problème d'hétéroscédasticité des erreurs. (0,5)
- Les ε_i ne sont pas autocorrélés puisque $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$. (0,5)

3. Pour rendre le modèle homoscédastique, il faut procéder à la transformation suivante ; on pose :

$$V_1 = \varepsilon_1 \ ; \ V_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \ ; \ V_3 = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{3}} \ ; \ \dots \ ; \ V_{25} = \frac{\varepsilon_{25}}{\sqrt{25}}$$

ainsi : $V(V_1) = V(V_2) = \dots = V(V_{25}) = 4$ (0,5)

$$y_1 = a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + V_1$$

$$\frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1\frac{x_{11}}{\sqrt{2}} + a_2\frac{x_{21}}{\sqrt{2}} + V_2$$

$$\frac{y_3}{\sqrt{3}} = \frac{a_0}{\sqrt{3}} + a_1\frac{x_{11}}{\sqrt{3}} + a_2\frac{x_{21}}{\sqrt{3}} + V_3$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_{25}}{\sqrt{25}} = \frac{a_0}{\sqrt{25}} + a_1\frac{x_{11}}{\sqrt{25}} + a_2\frac{x_{21}}{\sqrt{25}} + V_{25}$$

(0,5)

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2/\sqrt{2} \\ y_3/\sqrt{3} \\ \vdots \\ y_{25}/\sqrt{25} \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{x_{12}}{\sqrt{2}} & \frac{x_{22}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{x_{13}}{\sqrt{3}} & \frac{x_{23}}{\sqrt{3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{25}} & \frac{x_{1\,25}}{\sqrt{25}} & \frac{x_{2\,25}}{\sqrt{25}} \end{pmatrix} ; \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{25} \end{pmatrix}$$ (0,5)

ainsi $\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$ (0,5)

Exo 2 (12 points)

1/ Tableau des calculs (1)

- $\sum_{t=2}^{20}(e_t - e_{t-1})^2 = 11346,86$ (1) ; $\sum_{t=1}^{20} e_t^2 = 11303,87$ (1)

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{20}(e_t-e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{20} e_t^2} = \boxed{1,004}$$ (1)

$DW < d_1 = 1,10$, On est en présence d'autocorrélation positive des erreurs. (1)
On rejette H_0 " $\rho = 0$ " et on accepte H_1 " $\rho \neq 0$ ".

2) $\rho = 1 - \frac{DW}{2} = \boxed{0,498}$ (1) ou $\rho = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2} = \frac{5225,75}{11303,87}$

3)

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & \dots & \dots & E(\varepsilon_n\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

- $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma_\varepsilon^2$

$E(\varepsilon_t^2) = E(\rho\varepsilon_{t-1} + V_t)^2 = \rho^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) + E(V_t^2)$

$\sigma_\varepsilon^2(1-\rho^2) = \sigma_V^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_V^2}{1-\rho^2}$ (0,5)

- $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}) = \rho\sigma_\varepsilon^2$ (0,5)
- $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+2}) = \rho^2\sigma_\varepsilon^2$ (0,5)
- $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+i}) = \rho^i\sigma_\varepsilon^2$ (0,5)

$$\Omega_\varepsilon = \frac{\sigma_V^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{19} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{18} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \rho^{19} & \rho^{18} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ (1)

avec $\rho = 0,521$ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-k-1} = 664,93$ (0,5)

$\hat{\sigma}_V^2 = (1-\rho^2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = (1-0,498^2) \cdot 664,93 = 500,02$

$\boxed{\hat{\sigma}_V^2 = 500,02}$ (0,5)

4. Ω_ε^{-1}

$$\Omega_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\sigma_V^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & & & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$ (2)

On remplace ρ par 0,521 et $\hat{\sigma}_V^2 = 500,02$.

Exo 3 (04 points)

1. $y_t = \frac{k}{1+e^{-\left(\frac{t-a}{b}\right)}} \Rightarrow \left(\frac{k}{y_t} - 1\right) = e^{-\left(\frac{t-a}{b}\right)}$ (0,5)

$\Rightarrow \log\left(\frac{k}{y_t} - 1\right) = -\left(\frac{t-a}{b}\right) = -\frac{1}{b}t + \frac{a}{b}$ (0,5)

On pose $z = \log\left(\frac{k}{y_t} - 1\right)$; $\alpha_1 = -\frac{1}{b}$; $\alpha_0 = \frac{a}{b}$ (0,5)

On aura $z = \alpha_0 + \alpha_1 t$ (0,5)

2. $\frac{k}{y_t} > 1 \Rightarrow k > y_t$ (1) et $1/b \neq 0$ avec $(b \neq 0)$ (1)