Université A. Mira de Béjaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Année Universitaire 2021-2022

Examen de Remplacement de Maths 2. Durée :1h30

Remarque : *Les étapes de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 *(07points)*:

Soit M la matrice suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2.
2. Calculer $detM$ le déterminant de la matrice M.
3. La matrice M est-elle inversible?. Si oui, calculer M^{-1} la matrice inverse de M.

Exercice 2 *(06points)*:

1- Calculer la primitive suivante:

$$\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1} dx$$

2- Calculer la primitive suivante:

$$\int \frac{1}{x(lnx)^2} dx$$

3- Soit β un nombre réel. Trouver les valeurs de β telle que :

$$\int_0^{\beta} (3x^2 - 4) dx = 0$$

Exercice 3 *(07 points)*:

1- Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante:

$$y' = -y + x \ldots\ldots\ldots (E)$$

2- Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante:

$$y'' - 3y' + 2y = (x - 4)e^x \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{E})$$

Bonne chance

Corrigé de l'examen de Remplacement Maths 2

Exercice 1 : Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

07 points

1) Calculons M^2 :

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1

2) Calculons $\det M$:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2+1) - 3(1-1) - (-1-2)$$

$$= 6 - 0 + 3 = \boxed{9}$$

2

2) La matrice M est elle inversible ?

On a : $\det M = 9 \neq 0$, donc M est inversible.

1

Calculons M^{-1} la matrice inverse de M.

On a : $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}(\mathrm{Com}\, M)^t$.

0,5

où Com M la comatrice de M.

$$\text{Com}\,M = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$ 1

d'où :

$$\text{Com}\,M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ 0,5

Donc :

$$M^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}}$$ 1

Exercice 2 : 06 points

1) Calculons : $\int \frac{x^2+4x+4}{x+1}\,dx$

On décompose $\frac{x^2+4x+4}{x+1}$ en éléments simples.

On a : $\boxed{\frac{x^2+4x+4}{x+1} = x+3+\frac{1}{x+1}}$ 1

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x+4 & x+1 \\ \hline x^2+x & x+3 \\ \hline 3x+4 & \\ 3x+3 & \\ \hline \boxed{1} & \end{array}$$

Donc : $\int \frac{x^2+4x+4}{x+1}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx.$ 1

$$= \boxed{\frac{1}{2}x^2 + 3x + \ln|x+1| + C \,/\, C \in \mathbb{R}}$$

2) Calculons : $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$.

On a : $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{-2}\,dx.$ 1

$$= \frac{1}{-2+1}(\ln x)^{-2+1} + C \,/\, C \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \frac{-1}{\ln x} + C \,/\, C \in \mathbb{R}.}$$ 1

Remarque : On peut utiliser l'intégration par changement de variable

3) Soit β un nombre réel.

Trouvons les valeurs de β telle que : $\int_0^{\beta}(3x^2-4)\,dx$

on a : $\int_0^{\beta}(3x^2-4)\,dx = \left[x^3-4x\right]_0^{\beta}$

1

$$= \beta^3 - 4\beta$$

donc : $\int_0^{\beta}(3x^2-4)\,dx = 0 \Rightarrow \beta^3 - 4\beta = 0$

$$\Rightarrow \beta(\beta^2-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = 2 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

1

Alors les valeurs de β demandées sont : $\{-2, 0, 2\}$

Exercice 3 : 07 points

1) Résolution l'équation : $y' = -y + x \dots (E)$

⊛ Resolution l'equation homogène associée : $y' = -y \dots (EH)$

on a : $(EH) \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -1 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -1\, dx$.

d'où : $\ln|y| = -x + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}$.

donc : $\boxed{y_H(x) = k e^{-x} / k \in \mathbb{R}}$ est la solution de (EH).

1

⊛ on utilise la methode de variation de la constante :

on pose : $y = k(x) e^{-x}$ où k est une fonction de variable x.

$\Rightarrow y' = k'(x) e^{-x} - k(x) e^{-x}$

0,5

on remplace y et y' dans l'equation (E), on obtient :

$k'(x) e^{-x} \cancel{- k(x) e^{-x}} = \cancel{-k(x) e^{-x}} + x \Rightarrow k'(x) e^{-x} = x$.

$\Rightarrow k(x) = \int x e^{x} dx$.

on utilise l'intégration par parties : $\int u v' = uv - \int u' v$

on pose : $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = e^{x} \end{cases}$

0,5

donc : $k(x) = \int x e^{x} dx = x e^{x} - \int e^{x} dx = x e^{x} - e^{x} + c \mid c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{k(x) = (x-1) e^{x} + c / c \in \mathbb{R}}$

0,5

d'où : $y = k(x) e^{-x} = [(x-1) e^{x} + c] e^{-x} / c \in \mathbb{R}$

Alors $\boxed{y(x) = c e^{-x} + x - 1 \quad c \in \mathbb{R}}$ est la solution générale de (E).

1

2) Résolution l'équation : $y'' - 3y' + 2y = (x-4)e^{x}$ .... (E)

⊛ L'équation homogène est : $y'' - 3y' + 2y = 0$ .... (EH)

L'équation caractéristique est : $r^2 - 3r + 2 = 0$ .... (EC)

$\Delta = 3^2 - 4(1)(2) = \boxed{1}$, $r_1 = \frac{+3-1}{2} = \boxed{1}$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = \boxed{2}$

donc : $\boxed{y_H(x) = Ae^{x} + Be^{2x} \,/\, A, B \in \mathbb{R}}$ est la solution générale de (EH)

1

⊛ Recherche y_p la solution particulière de (E) :

On a le second membre de (E) est $f(x) = (x-4)e^{1x}$, comme 1 est une racine simple de (EC), donc on pose :

1

$y_p = x(ax+b)e^{x} = \boxed{(ax^2+bx)e^{x}}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

d'où : $y_p' = (2ax+b)e^{x} + (ax^2+bx)e^{x} = \boxed{(ax^2+(2a+b)x+b)e^{x}}$

et $y_p'' = (ax^2+(2a+b)x+b)e^{x} + (2ax+2a+b)e^{x} = \boxed{(ax^2+(4a+b)x+2a+2b)e^{x}}$

Remplaçons y_p, y_p' et y_p'' dans l'équation (E), on obtient

$(ax^2+(4a+b)x+2a+2b)\cancel{e^{x}} - 3(ax^2+(2a+b)x+b)\cancel{e^{x}} + 2(ax^2+bx)\cancel{e^{x}} = (x-4)\cancel{e^{x}}$

$\Rightarrow (4a+\cancel{b}-6a-\cancel{3b}+\cancel{2b})x + (2b-3b+2a) = x-4$

$\Rightarrow -2ax + b + \cancel{2a} = x-4 \Rightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ -b+2a = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$ et $\boxed{b = 3}$

0,5

Alors : $\boxed{y_p = \left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)e^{x}}$ est la solution particulière de (E)

Donc : $\boxed{y(x) = y_H + y_p = Ae^{x} + Be^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right) \,/\, A, B \in \mathbb{R}}$

est la solution générale de (E).

1