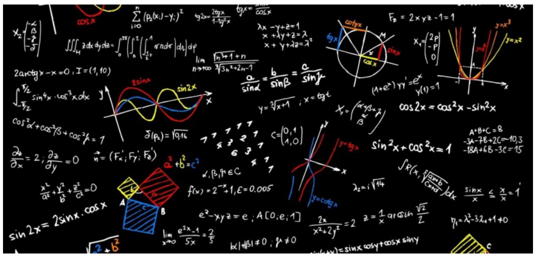
Mathématiques 2



Dr. Naima Mehenaoui

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté de Technologie

Département de Technologie

Émail : naima.mehenaoui@univ-bejaia.dz

Avril 2022

Table des matières

Objectifs

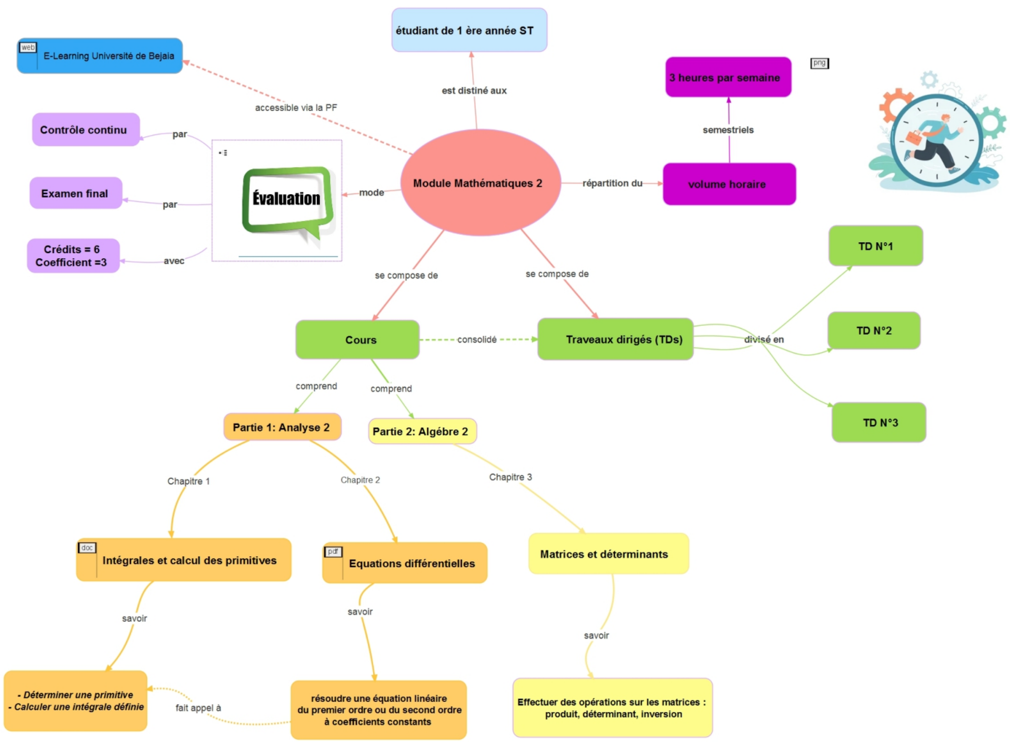
Le cours " Mathématique 2 " vise à

- Consolider des acquis du calcul différentiel et intégral vus au secondaire.
- Découvrir les bases fondamentales du calcul d'intégrales et des primitives
- Résoudre des équations différentielles.

Introduction

Ce cours de mathématiques II s'adresse aux étudiants du 1ère année Licence, domaine Science et Technologie.

La partie analyse permet à l'étudiant d'acquérir les méthodes de calcul de d'intégrales et les méthodes menant à la résolution d'équations différentielles nécessaires pour la résolution des problèmes de physique, et la partie algèbre lui permet de savoir comment effectuer des opérations sur les matrices et d'appréhender l'étude d'un système d'équations.



I Pré-requis / Connaissances préalables nécessaires.

Vous devrez avoir assimilé les concepts de chapitre 3 "***fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles***" du module Mathématiques I.

Il est recommandé aux apprenants de :

- Connaître les fonctions de référence.
- Savoir dériver une fonction.

II Pré-tests

Exercice

La dérivée de $\sqrt{x}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
- $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
- $2\sqrt{x}$

Exercice

La dérivée de $f(x) = x^3$ est

Exercice

Répondre par oui ou non. La fonction exponentielle est une fonction continue.

- Oui
- Non

III Intégrales et calcul des primitives

Nous avons vu dans le premier semestre les fonctions dérivable: étant donnée une fonction F, trouver sa dérivée f c'est à dire la fonction $f(x) = F'(x)$. Dans ce chapitre, nous considérons le problème inverse : étant donnée une fonction f, trouver une fonction F telle que sa dérivée soit égale à f, c'est à dire $F'(x) = f(x)$.

1. Objectifs spécifiques

A l'issue de chapitre I "Intégrales et calcul des primitives" l'apprenant sera capable de :

- Connaître notion de la primitive.
- Connaître notation intégrale.
- Connaître les primitives de références.
- Déterminer une primitive d'une fonction continue.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par changement de variable.
- Calculer l'intégrale de certaines fonctions.

2. Les primitives

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle à une variable réelle sur I.

Définition

Une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f dans I si et seulement si F est dérivable sur I et $F' = f$ dans$I$.

Une primitive d'une fonction f, représentée par $\int f ds$ s'appelle aussi une intégrale indéfinie de f.

L'ensemble de toutes les primitives de f s'écrit $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Exemple

La primitive de la fonction $x \mapsto 3x^2$ est la fonction $x \mapsto x^3$ et toutes les primitives de la fonction$x \mapsto 3x^2$ sont $x \mapsto x^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

On écrit $\int 3x^2dx = x^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

La primitive de la fonction $x \mapsto \cos x$ est

la fonction $x \mapsto \sin x$ et toutes les primitives de la fonction $x \mapsto \cos x$ sont $x \mapsto \sin x + c,\ c \in \mathbb{R}$.

On écrit $\int \cos x\, dx = \sin x + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Remarque : non unicité de primitives

Soit $f(x) = 6x + 2$. On a

$F(x) = 3x^2 + 2x,\ G(x) = 3x^2 + 2x + c$,

c est une constante, sont deux primitives de f.

Soit $f(x) = 2e^{2x}$. On a

$F(x) = e^{2x} - 1,\ G(x) = e^{2x} + 8,$

et $H(x) = e^{2x}$ sont trois primitives de f.

La primitive de la fonction $x \mapsto 2e^{2x}$ est la fonction $x \mapsto 2e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}$.

Propriétés fondamentales:

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ Alors :

1. $\int (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + G(x) \quad \forall x \in I.$
2. $\int (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda F(x) \quad \forall x \in I.$
3. $\int (f\,G + F\,g)(x)\,\mathrm{d}x = (F \cdot G)(x) \quad \forall x \in I.$
4. $\int \left(\dfrac{f\,G - F\,g}{G^2}\right)(x)\,\mathrm{d}x = \left(\dfrac{F}{G}\right)(x) \quad \forall x \in I$, (avec$G(x) \neq 0\ \forall x \in I$).

Complément : Primitives des fonctions usuelles

1. $\int \lambda\,\mathrm{d}x = \lambda x + c, \lambda \in \mathbb{R},$
2. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} - \{-1\},$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, \lambda \in \mathbb{R},$
4. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,$
5. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$
6. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c,$

où c est une constante dans $\mathbb{R}$.

3. Exercice

On définit les fonctions$F$ et$f$ sur $\mathbb{R}$ par$F(x) = e^{\cos x}$ et $f(x) = -\sin xe^{\cos(x)}$

Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4. Intégrale définie

Proposition

Si F est une primitive de la fonction continue f sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

✎ *Remarque*

Si la fonction f admet des primitives $F + c, c \in \mathbb{R}$, alors la famille de ces primitives est généralement notée $\int f(x)\,dx$ et appelé l'intégrale indéfinie de$f$ qu'est une fonction de x. Il ne faut pas confondre avec $\int_a^b f(x)\,dx$ appelé l'intégrale définie de f, qui est un nombre réel.

✎ *Remarque*

$\int_a^b f'(x)dx = [fx)]_a^b = f(b) - f(a).$

Exemple

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

On a $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_2^4 = 4 - 2\sqrt{2}.$

5. Exercice

Calculer $\int_0^1 (x^2 + 3)dx$

- 1
- 3
- 4
- 0

6. Techniques de calcul des primitives

6.1. Intégration par parties

La méthode d'intégration par parties permet dans certains cas de trouver une primitive du produit de deux fonctions.

Fondamental : Proposition

Soient $F,\ G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors

$$\int F(x)\,G'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\,G(x) - \int F'(x)\,G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque : Intégration par partie d'une intégrale définie

$\int_a^b F(x)\,G'(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)\,G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)\,G(x)\,\mathrm{d}x.$

Exemple

Calculer $\int xe^{4x}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 xe^{4x}\,\mathrm{d}x.$

On pose:

$$\begin{cases} F(x) = x, \\ G'(x) = e^{4x}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = 1, \\ G(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x}, \end{cases}$$

donc

$$\int xe^{4x}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{4}e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

et

$$\int_0^1 xe^{4x}\,\mathrm{d}x = \left[x\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}\right]_0^1 = \frac{3}{16}e^4 + \frac{1}{16}.$$

Remarque

- Le choix de la fonction F et G doit être judicieux.
- Pour calculer ce type d'intégrale: $\int P(x)\cos(\alpha x)dx, \int P(x)\sin(\alpha x)dx,\ \int P(x)e^{\alpha x}dx$ où P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$, il est recommander de poser $F(x) = P(x)$.

6.2. Intégration par changement de variable

La technique d'intégration par changement de variable, appelée aussi intégration par substitution, découle de la formule de dérivation des fonctions composées.

Définition : Formule du changement de variable

Si on pose$t = g(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}t = g'(x)\, d\, \mathrm{d}x$, alors on a

$\int f(g(x))\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t.$

Attention

Le choix de la variable doit être conditionné par l'obtention d'une forme à intégrer proche de celles listées précédemment.

Exemple

Calculer $\int x \sin(x^2)\, \mathrm{d}x$

6.3. Exercice

Calculer $\int xe^{-x}dx$

- $-e^{-x}(x-1)+c$
- $-e^{-x}(x+1)+c$
- $e^{-x}(x-1)+c$

7. Compléments sur le calcul des primitives

7.1. Intégration des fractions rationnelles

Méthode

1. ***Intégrale du type:*** $\int f(x)\,dx$ ***où*** f ***est un polynôme :***
   Dans ce cas on intègre terme à terme :
   $f = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$
   alors
   $$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}x &= a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n\,\mathrm{d}x \\ &= a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + c.\end{aligned}$$
2. Intégrale du type: $\int \frac{1}{x+\lambda},\ \lambda \in \mathbb{R}$
   $$\int \frac{1}{x+\lambda}dx = \ln|x+\lambda| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
3. Intégrale du type: $\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx,\ n > 1$
   $$\int \frac{1}{(x+\lambda)^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x+\lambda)^{n-1}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
4. Intégrale du type: $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$ où $a, b, p, q \in \mathbb{R}$

   - Premier cas: $x^2 + px + q$ admet deux racines réelles α et β. On a

   $$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

   Il en résulte que

   $$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{A}{x-\alpha}dx + \int \frac{B}{x-\beta}dx \\ &= A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   - Second cas: x^2+px+q n'admet pas de racines réelles. On écrit : $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$

     En posant: $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta^2 = q - \frac{p^2}{4}$. On obtient
     $x^2 + px + q = (x-\alpha)^2 + \beta^2.$

     En faisant le changement de variable suivant:
     $x - \alpha = \beta t \Rightarrow dx = \beta dt,$

     On aura
     $(x-\alpha)^2 + \beta^2 = \beta^2(t^2+1),$

     On se ramène au calcul des intégrales suivantes:
     $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx = \int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$

$$= \int \frac{Mt+N}{t^2+1}dt$$
$$= \int \frac{Mt}{t^2+1}dt + \int \frac{N}{t^2+1}dt$$
$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+1\right) + N\ \arctan(t) + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Puis on remplace t par $\dfrac{x-\alpha}{\beta}$.

5. Intégration des fractions rationnelles en e^x:

   On utilise le changement de variable $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. D'où $dx = \dfrac{1}{t}dt$. On obtient alors une intégrale d'une fonction rationnelle, que l'on sait calculer.

Exemple

Calculer $\int \dfrac{1}{x^2-1}dx$

On a:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}.$$

Par identification, on a:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A, \\ A+A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Donc:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

Par suite, on a

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{2(x-1)}dx - \int \frac{1}{2(x+1)}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple

Calculer $\int \dfrac{3x+1}{x^2-2x+10}dx$

On a: $x^2-2x+10 = (x-1)^2+9$. On pose: $x-1=3t \Rightarrow dx = 3\,dt$, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2-2x+10}dx &= \int \frac{3(3t+1)+1}{9t^2+9}3dt\\ &= \int \frac{27t+12}{9(t^2+1)}dt\\ &= 3\int \frac{t}{t^2+1}dt + \frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+1}dt\\ &= \frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{4}{3}\arctan(t) + c,\ c\in\mathbb{R},\\ &= \frac{3}{2}\ln\left(\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1\right) + \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple

Calculer $\int \frac{3}{4e^x-1}dx$

On pose $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. D'où $dx = \frac{1}{t}dt$. On a :

$$\int \frac{3}{4e^x-1}dx = \int \frac{3}{(4t-1)\,t}dt,$$

et

$$\frac{3}{(4t-1)\,t} = \frac{A}{(4t-1)} + \frac{B}{t} = \frac{At+4Bt-B}{(4t-1)\,t} = \frac{(4+4B)t-B}{(4t-1)\,t}.$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} A+4B=0,\\ -B=3,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4B,\\ B=-3,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=12,\\ B=-3.\end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{4e^x-1}dx = \int \frac{3}{(4t-1)\,t}dt &= \int \frac{12}{(4t-1)}dt + \int \frac{-3}{t}dt\\ &= 3\ln|4t-1| - 3\ln|t| + c,\ c\in\mathbb{R},\\ &= 3\ln|4e^x-1| - 3x + c,\ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

7.2. Intégrales du type Intégrales du type: ∫P(x)exp(ʎ x)dx où P est un polynôme et ʎ est un réel

Méthode

Dans le cas où le degré du polynôme P est petit, on peut effectuer des intégrations par partie successives selon le degré de P. Mais cette technique n'est pas adaptée aux polynômes de degré grand. Dans ce cas, il est plus commode d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive $P(x)e^{\lambda x}$ sous la forme $Q(x)e^{\lambda x}$, avec $deg\ P = deg\ Q$.

Exemple

Calculer $\int \left(3x^2 - 5x + 2\right) e^{2x} dx$

On sait que:

$$\left(3x^2 - 5x + 2\right) e^{2x} = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{2x}$$

Déterminons a, b, c en utilisant la formule suivante:

$$\left[\left(ax^2 + bx + c\right) e^{2x}\right]' = \left[2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c\right] e^{2x} = \left(3x^2 - 5x + 2\right) e^{2x}$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} 2a = 3 \\ 2b + 2a = -5 \\ b + 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{5 + 2a}{2} \\ c = \dfrac{2 - b}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -4 \\ c = 3. \end{cases}$$

Ainsi

$$\int \left(3x^2 - 5x + 2\right) e^{2x} dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x + 3\right) e^{2x} + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

7.3. Intégration de certains fonctions trigonométriques

Méthode

1. ***Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles***

   Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin x, \cos x) dx$. En effectuant un changement de variable: $t = \tan \frac{x}{2}$, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ s'écrit alors sous formes de fonctions rationnelles.

   On utilise donc les substitutions suivantes :

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{2}{1 + t^2} dt, & \sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}, \\ \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, & \tan x = \dfrac{2t}{1 - t^2}, \end{cases}$$

2. ***Intégrale de type*** $\int \cos^P x \sin^q x\, dx,\ (p, q \in \mathbb{N})$

   - ***Premier cas:*** p ***est impair***

     Soit $p = 2k + 1$,

$$\int \cos^P x \sin^q x\, dx = \int \cos^{2k+1} x \sin^q x\, dx$$
$$= \int \left(1 - \sin^2 x\right)^k \sin^q x \cos x\, dx$$

     En utilisant le changement de variable $t = \sin x$, on est donc ramené à calculer la primitive du polynôme: $\int \left(1 - t^2\right)^k t^q\, dt$

   - ***Deuxième cas:*** q ***est impair***

D'une manière analogue le changement de variable $t = \cos x$ permet de ramener le calcul de $\int \cos^P x \sin^q x \, dx$ à la recherche de la primitive d'un polynôme.

- ***Troisième cas:***

  Si p et q sont tous les deux pairs, le changement de variable $t = tan\frac{x}{2}$ ramène le calcul de $\int \cos^P x \sin^q x \, dx$ la recherche de la primitive d'une

  fraction rationnelle.

3. ***Intégrale de type*** $\int \cos(\alpha\, x) \sin(\beta\, x) \, dx, \ \int \cos(\alpha\, x) \cos(\beta\, x) \, dx, \ \int \sin(\alpha\, x) \sin(\beta\, x) \, dx$

   On utilise les formule suivante

$$\cos(\alpha\, x) \sin(\beta\, x) = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x]$$
$$\cos(\alpha\, x) \cos(\beta\, x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x]$$
$$\sin(\alpha\, x) \sin(\beta\, x) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int \cos(\alpha\, x) \sin(\beta\, x) \, dx &= \int \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x] \, dx \\
&= \frac{-1}{2(\alpha + \beta)} \cos(\alpha + \beta)x - \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \cos(\alpha - \beta)x + c, \ c \in \mathbb{R}, \\
\int \cos(\alpha\, x) \cos(\beta\, x) &= \int \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x] \\
&= \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \sin(\alpha + \beta)x + \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \sin(\alpha - \beta)x + c, \ c \in \mathbb{R}, \\
\int \sin(\alpha\, x) \sin(\beta\, x) &= \int \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] \\
&= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \sin(\alpha - \beta)x - \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \sin(\alpha + \beta)x + c, \ c \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

avec $\alpha, \ \beta \in \mathbb{R}^*, \ \alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$.

Exemple

Calculer $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx.$

On pose $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ et $dx = \frac{2}{1 + t^2} \, dt$. Alors

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-\sin x} dx &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{1-\frac{2t}{1+t^2}}, \\
&= \int \frac{2}{1-t^2-2t}\,dt, \\
&= \int \frac{2}{(t-1)^2}\,dt, \\
&= -2\frac{1}{t-1} + c,\ c \in \mathbb{R}, \\
&= \frac{2}{1-t} + c,\ c \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Exemple

Calculer $\displaystyle\int \cos^5 x \sin^4 x\, dx$

On pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$. Donc

$$
\begin{aligned}
\int \cos^5 x \sin^4 x\, dx &= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^4 x \cos x\, dx \\
&= \int \left(1-t^2\right)^2 t^4 dt \\
&= \int \left(1+t^4-2t^2\right) t^4 dt \\
&= \int \left(t^4+t^8-2t^6\right) dt \\
&= \frac{1}{9}t^9 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{5}t^5 + c,\ c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c,\ c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Exemple

Calculer $\int \cos(3x)\sin(5x)\, dx$, $\int \cos(4x)\cos(2x)\, dx$, $\int \sin(3x)\sin(7x)\, dx$

On a:

$$\begin{aligned}
\int \cos(3x)\sin(5x)\,dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(8x)+\sin(-2x)]\,dx \\
&= \frac{-1}{16}\cos(8x)+\frac{1}{4}\cos(-2x)+c,\ c\in\mathbb{R}, \\
&= \frac{-1}{16}\cos(8x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+c,\ c\in\mathbb{R}. \\
\int \cos(4x)\cos(2x) &= \int \frac{1}{2}[\cos(6x)+\cos(2x)] \\
&= \frac{1}{12}\sin(6x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+c,\ c\in\mathbb{R}, \\
\int \sin(3x)\sin(7x) &= \int \frac{1}{2}[\cos(-4x)-\cos(10x)] \\
&= \frac{-1}{8}\sin(-4x)-\frac{1}{20}\sin(-4)x)+c,\ c\in\mathbb{R}, \\
&= \frac{1}{8}\sin(4x)-\frac{1}{20}\sin(-4)x)+c,\ c\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

7.4. Exercice

Calculer $I = \int \frac{2x}{x^2+3}$

- $\ln(x^2+3)$
- x^2+3

7.5. Exercice

Calculer$I = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

- $\ln x$
- $x+1$
- $\arctan x$
- $\arctan x + c$

8. Test d'acquisitions -Chapitre 1-

Exercice

La primitive de la fonctionx^3 est

- [ ] $\frac{1}{4}x^4$
- [ ] $\frac{1}{4}x^5$

- ▢ $\frac{1}{4}x^4 + 8$
- ▢ $\frac{1}{4}x^4 + c$
- ▢ $\frac{1}{4}x^3$

Exercice

La fonction $F(x) = \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}$ est primitive de la fonction

- ○ $5 \ln |x| + \frac{1}{x}$
- ○ $5 \ln |x| + 1$
- ○ $\ln |5x| + \frac{1}{x}$

Exercice

$I = \int_0^2 3x\,dx =$