Université A. Mira de Béjaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Année Universitaire 2021-2022

Examen de Rattrapage de Maths 2. Durée :1h30

Remarque : *Les étapes de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 *(07points)*:

Soit M la matrice suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer M^2.
2. Calculer $detM$ le déterminant de la matrice M.
3. La matrice M est-elle inversible?. Si oui, calculer M^{-1} la matrice inverse de M.

Exercice 2 *(06points)*:

1- Calculer la primitive suivante:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} dx$$

2- Calculer la primitive suivante:

$$\int (x + 2)e^{-x} dx$$

3- Soit β un nombre réel. Trouver les valeurs de β telle que :

$$\int_0^{\beta} (5x^4 - 3x^2) dx = 0$$

Exercice 3 *(07 points)*:

1- Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante:

$$y' = y + x + 2 \ldots\ldots\ldots (E)$$

2- Résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante:

$$y'' + 6y' + 13y = 26x - 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Bonne chance

Corrigé : Rattrapage de Maths 2

Exercice 1 (7 points). Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculons M^2

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 5 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ 1

2) Calculons $\det M$:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 14 + 12 = \boxed{-1}$$ 2

3) La matrice M est inversible car $\det M = -1 \neq 0$ 1

Calculons M^{-1} : On a : $M^{-1} = \frac{1}{\det M}(\text{Com}\, M)^t$ 0,5

$$\text{Com}\, M = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & +8 & -5 \end{pmatrix}$$ 1 0,5

donc : $$M^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}^t$$

d'où : $$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & -5 & -8 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$$ 1

Exercice 2 : (6 points) : 1) Calculons $\int \frac{x^2+2x-3}{x-4}\,dx$

On a : $\boxed{\frac{x^2+2x-3}{x-4} = x+6+\frac{21}{x-4}}$ (1)

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-3 & x-4 \\ \hline x^2-4x & x+6 \\ \hline 6x-3 & \\ 6x-24 & \\ \hline 21 & \end{array}$$

Alors : $\int \frac{x^2+2x-3}{x-4}\,dx = \int (x+6)\,dx + 21\int \frac{1}{x-4}\,dx$

$= \boxed{\frac{1}{2}x^2+6x+21\ln|x-4|+c \,/\, c\in\mathbb{R}}$ (1)

2) Calculons $\int (x+2)e^{-x}\,dx$:

On utilise l'intégration par parties : $\int uv' = uv - \int u'v$

On pose : $\begin{cases} u = x+2 \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ (1)

Donc : $\int (x+2)e^{-x}\,dx = -(x+2)e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -(x+2)e^{-x} - e^{-x} + c \,/\, c\in\mathbb{R}$

$= \boxed{(-x-3)e^{-x} + c \,/\, c\in\mathbb{R}}$ (1)

3) Soit $\beta \in \mathbb{R}$, trouvons les valeurs de β telle que $\int_0^{\beta} (5x^4-3x^2)\,dx = 0$

On a : $\int_0^{\beta} (5x^4-3x^2)\,dx = \left[x^5-x^3\right]_0^{\beta} = \beta^5-\beta^3$ (1)

$\beta^5-\beta^3 = 0 \Rightarrow \beta^3(\beta^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta^3 = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm 1 \end{cases}$

Donc les valeurs de β sont : $\boxed{\{-1, 0, 1\}}$ (1)

Exercice 3 (07 points) :

1) Résolution l'équation : $y' = y + x + 2$ ...... (E)

⊛ Résolution l'équation homogène associée : $y' = y$ .... (EH)

On a : (EH) $\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 1$ d'où $\int \frac{dy}{y} = \int 1 dx$.

donc $\boxed{y_H(x) = k e^{x} / k \in \mathbb{R}}$ 1

⊛⊛ On utilise la méthode de variation de la constante :

on pose : $y = k(x) e^{x}$ où k une fonction de variable x.

$\Rightarrow y' = k'(x) e^{x} + k(x) e^{x}$ 0,5

on remplace y et y' dans l'équation (E), on obtient :

$$k'(x) e^{x} + \cancel{k(x) e^{x}} = \cancel{k(x) e^{x}} + x + 2$$

$$\Rightarrow k'(x) = \int (x+2) e^{-x} dx$$ 1

$$= \boxed{(-x-3) e^{-x} + c / c \in \mathbb{R}}$$ (d'après la réponse 2 de l'exercice 2)

Donc : $y = \left[(-x-3) e^{-x} + c \right] e^{x} / c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -x - 3 + c e^{x} / c \in \mathbb{R}}$$ 1

est la solution générale de (E)

2) Résolution l'équation : $y'' + 6y' + 13y = 26x - 13 \ldots (E)$

⊛ L'équation homogène est : $y'' + 6y' + 13y = 0 \ldots (EH)$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 6r + 13 = 0 \ldots (EC)$

$\Delta = 36 - 4(1)(13) = -16 = (4i)^2$

$r_1 = \frac{-6-4i}{2} = \boxed{-3-2i}$ et $r_2 = \frac{-6+4i}{2} = \boxed{-3+2i}$

donc : $\boxed{y_H(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-3x} \;/\; A, B \in \mathbb{R}}$ 1

est la solution générale de (EH).

⊛⊛ Recherche y_p la solution particulière de (E).

On a le second membre $f(x) = (26x-13)e^{0.x}$, comme 0 n'est pas une racine de (EC) on pose : $y_p = ax + b \;/\; a, b \in \mathbb{R}$. 1

d'où $y'_p = a$ et $y''_p = 0$.

On remplace y_p, y'_p et y''_p dans l'équation (E), on obtient

$0 + 6.a + 13(ax+b) = 26x - 13$

$\Rightarrow \begin{cases} 13a = 26 \\ 6a + 13b = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{-25}{13} \end{cases}$ 0,5

Alors : $\boxed{y_p(x) = 2x - \frac{25}{13}}$ est la solution particulière de y_p.

Donc : $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ 1

$= \boxed{(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{-3x} + 2x - \frac{25}{13} \;/\; A, B \in \mathbb{R}}$

est la solution générale de (E).