Corrigé de la série spéciale

Exercice 01 :

1. Dimension d'une énergie

On a par exemple :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \to [E] = \left[\frac{1}{2}\right][m][v]^2 = M(LT^{-1})^2 = ML^2T^{-2}$$

2. Condition d'homogénéité :

$$[v] = [v_0]\left[\exp(-\frac{t}{\tau})\right] \Longrightarrow [v] = [v_0] \text{ et } \left[\frac{t}{\tau}\right] = 1$$

Donc $[v_0] = LT^{-1}$ et $[\tau] = [t] = T$.

L'unité en SI de v_0 est $\left(\frac{m}{s}\right)$

L'unité en SI de τ est (s)

Exercice 02 :

2. Les modules :

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Le produit scalaire:

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 3.1 + 3.3 + 0.1 = 12$$

Le produit vectoriel :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

3. L'angle formé entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{V}_1.\vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\|} = \frac{12}{3\sqrt{2}.\sqrt{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \qquad \to \alpha = 58.52$$

4. Montrons que le vecteur $\vec{V}_3$ est perpendiculaire au plan (P) formé par $\vec{V}_1$et $\vec{V}_2$:

$$\begin{cases} \vec{V}_3 \perp \vec{V}_1 \\ \wedge \\ \vec{V}_3 \perp \vec{V}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_1 . \vec{V}_3 = 0 \\ \wedge \\ \vec{V}_3 . \vec{V}_2 = 0 \end{cases}$$

On peut utiliser aussi la relation : $\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{0}$

5. le vecteur $\vec{V}_4$ appartient au plan (P) :

$$\vec{V}_4 = \alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_4 = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

On peut utiliser aussi la relation $\vec{V}_4 . (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = 0$

6. Le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}_1 + \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\|} = \frac{4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{53}}$$

7. Le produit mixte :

On a déjà $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, donc :

$$\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) . \vec{V}_3 = \left(3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}\right) . (\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 0$$

On peut aussi le calculer par la relation :

$$\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) . \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 03 :

Le vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = t - 1 & (1) \\ y = \dfrac{t^2}{2} & (2) \end{cases}$$

1. L'équation de la trajectoire :

de (1): $t = x + 1$ on remplace dans (2) :

$$y = \frac{(x+1)^2}{2}$$

La trajectoire est une parabole.

2. Les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\imath} + t.\vec{\jmath} \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{1+t^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \vec{\jmath} \Rightarrow \|\vec{a}\| = 1$$

3. Accélération tangentielle :

$$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

4. L'accélération normale :

$$a_n = \sqrt{a^2 - {a_t}^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

5. Le rayon de courbure :

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = (1+t^2)^{3/2}$$

Exercice 04 :

1. Dans la base des coordonnées polaires :

1.1. Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho = bcos(\omega t)\vec{e}_\rho$$

1.2. Les vitesses vitesse et accélération ainsi que leurs normes :

$$\rho = bcos(\omega t) \rightarrow \dot{\rho} = -b\omega sin(\omega t) \rightarrow \ddot{\rho} = -b\omega^2 cos(\omega t)$$

$$\theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \omega \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -b\omega sin(\omega t)\vec{e}_\rho + b\omega cos(\omega t)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta = -2b\omega^2 cos(\omega t)\vec{e}_\rho - 2b\omega^2 sin(\omega t)\vec{e}_\theta$$

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{(-b\omega sin(\omega t))^2 + (b\omega cos(\omega t))^2} = b\omega$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(-2b\omega^2 cos(\omega t)\right)^2 + (-2b\omega^2 sin(\omega t))^2} = 2b\omega^2$$

2. Les vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs normes dans le système des coordonnées intrinsèques :

$$\vec{v} = v\vec{u}_t = (b\omega)\vec{u}_t$$

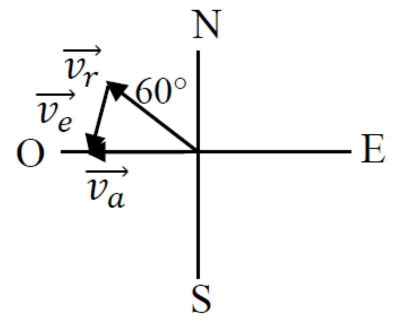
$$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0\ ;\ a_n = a = 2b\omega^2$$

$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n = (2b\omega^2)\vec{u}_n$$

Le rayon de courbure :

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{b}{2}$$

Exercice 05 :



1. Repère fixe (R) : la terre, Repère mobile (R') : le courant (l'eau), le mobile (M) : le bateau.

La vitesse absolue : vitesse du bateau par rapport à la terre

$$v_a = v(Mobile/R) = 5km/h$$

La vitesse relative : vitesse du bateau par rapport au courant d'eau

$$v_r = v(Mobile/R') = 4km/h$$

La vitesse d'entrainement : vitesse du courant d'eau par rapport à la terre

$$v_e = v(R'/R) =?$$

2. La vitesse et la direction du courant d'eau (v_e) :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad \rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \quad \rightarrow (\vec{v}_e)^2 = (\vec{v}_a - \vec{v}_r)^2 \rightarrow v_e^2 = v_a^2 + v_r^2 + 2\vec{v}_a.\vec{v}_r$$
$$= v_a^2 + v_r^2 + 2v_a v_a \cos(30°)$$

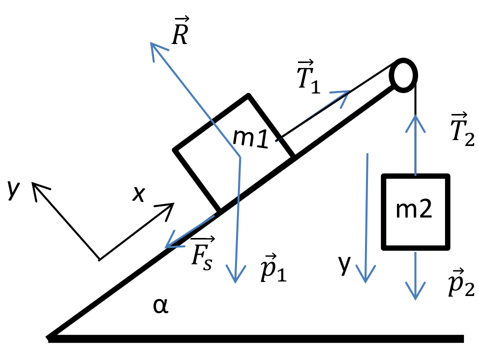
Donc :

$$v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 + 2v_a v_a \cos(30°)} = 2.52km/h$$

La direction. En utilisant la loi des sinus :

$$\frac{v_e}{sin30} = \frac{v_a}{sin\alpha} \rightarrow sin\alpha = \frac{v_a}{v_e} sin30 \rightarrow \alpha = 23.6°$$

Exercice 06



1. La masse minimale m_{2min} de S_2 :

En appliquant le PDF :

Sur S1 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F_s} = \vec{0}$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX) : -P_1 \sin\alpha + T_1 - F_s = 0 \quad (1) \\ (OY) : -P_1 \cos\alpha + R = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Sachant que :

$$F_s = \mu_s R = \mu_s P_1 \cos\alpha$$

L'équation (1) devient :

$$P_1\,(\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha) + T_1 = 0 \ \rightarrow T_1 = \ P_1\,(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) \quad (3)$$

Sur S2 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Projections :

$$(OY) : \quad P_2 - T_2 = 0$$

$$T_2 = P_2 \ (4)$$

Le fil est inextensible et de mass négligeable $T_2 = T_1$

$$P_2 = P_1\,(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) \rightarrow m_{2min} = \ m_1\,(\sin\alpha + \mu_s \cos\alpha) = 1.1kg$$

2. On prend $m_2 = 1.5\ kg$:
2.1. L'accélération prise par les deux masses :

On a $m_2 > m_{2min}$ le mouvement se fait dans le sens de m_2 on applique le principe fondamental de la dynamique :

Sur S_1:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_1\vec{a} \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{F_s} = m_1\vec{a}$$

Projections :

$$\begin{cases} (OX): -P_1\sin\alpha + T_1 - F_s = m_1 a & (1) \\ (OY): \quad -P_1\cos\alpha + R = 0 & (2) \end{cases}$$

Sachant que :

$$F_s = \mu_c R = \mu_c P_1 \cos\alpha$$

L'équation (1) devient :

$$-P_1\,(\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha) + T_1 = m_1 a \quad (3)$$

Sur S2 :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$$

Projections :

$$(OY): \quad P_2 - T_2 = m_2 a (4)$$

Le fil est inextensible et de masse négligeable $T_2 = T_1$, $(3) + (4)$

$$-P_1\,(\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha) + P_2 = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \frac{m_2 + m_1\,(\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g = 2.91 m/s^2$$

2.2. La hauteur h

$$h = \frac{1}{2} a t_h^2 = 5.83m$$

La vitesse des deux masses lorsque la masse m_2 heurte le sol :

$$v = a t_h = 2.91 m/s$$

Exercice 07 :

1. La force $\vec{F}$ est conservative :

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 & 2x^2y & 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

2. Le travail de la force $\vec{F}$:

le travail élémentaire dW de la $\vec{F}$ égale :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Sachant que :

$$\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Alors :

$$dW = 2xy^2dx + 2x^2ydy$$

a. Le travail suivant le segment OB :

L'équation de segment est :

$$y = x \rightarrow dy = dx$$

Par conséquent :

$$dW = 2x(x)^2dx + 2x^2(x)dx = 4x^3dx$$

$$W_{OB}(\vec{F}) = \int_0^3 4x^3dx = x^4|_0^3 = 81\,J$$

b. Le travail suivant le segment OA ensuite suivant le segment AB avec $A(3,0)$

$$W_{OB}(\vec{F}) = W_{OA}(\vec{F}) + W_{AB}(\vec{F})$$

Le chemin OA : $y = 0$, $dy = 0$ et x varie de 0 à 3

$$W_{OA}(\vec{F}) = 0$$

Le chemin AB : $x = 3, dx = 0$ et y varie de 0 à 3

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_0^3 2.3^2ydy = 81\text{ J}$$

c. Le travail est indépendant du chemin suivi. Par conséquent, la force $\vec{F}$ n'est pas conservative.

Exercice 08 :

1. La vitesse au point B :

En appliquant théorème de l'énergie mécanique

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{NC})$$

Dans notre cas : $\vec{F}_{NC} = \vec{0}$ (pas de frottement). Donc :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right) = 0$$

L'énergie mécanique est conservée :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = 0 \to E_M(B) = E_M(A)$$

$$E_M(A) = E_C(A) + E_P(A)\ ;\ E_M(B) = E_C(B) + E_P(B)$$

$$E_C(A) = 0$$

$$E_P(A) = mgh$$

$$E_C(B) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$E_P(B) = 0$$

L'origine des énergies potentielles est prise au niveau du sol (axe OX). Par conséquent :

$$E_M(B) = E_M(A) \to \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \ \to v_B = \sqrt{2gh} \ \to v_B = 10m/s$$

2. Vitesse au point M :

$$\Delta E_M = E_M(M) - E_M(A) = 0$$

On peut utiliser aussi ($\Delta E_M = E_M(M) - E_M(B) = 0$). On a :

$$mgh = \frac{1}{2}mv_M^2 + mgh'$$

Avec $h' = R(1+\cos\theta)$. Par conséquent :

$$v_M = \sqrt{2g\big(h - R(1+\cos\theta)\big)}$$

3. L'expression de la force de réaction $\vec{N}$:

PFD:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \ \to \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Projections dans la base intrinsèque $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_n : \ P_N - N = ma_N \Rightarrow mg\cos\theta - N = \dfrac{mv_M^2}{R} \ \ (1) \\ \vec{u}_t : \ P_T = ma_T \ \ (2) \end{cases}$$

de l'équation (1), on a :

$$N = m\left(g\cos\theta - \frac{v_M^2}{R}\right)$$