République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE D'ORAN - Mohamed Boudiaf
FACULTE DE PHYSIQUE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE

Cours et Exercices de mécanique du point matériel

Elaboré par : Dr. R. RAHMANI
Dr. H. SEDIKI

Première année LMD
- sciences de la matière.
- sciences et technologie.

Année Universitaire : 2019/2020

AVANT–PROPOS

Ce recueil de cours d'exercices et problèmes d'examens de mécanique du point matériel est un support pédagogique pour les étudiants de 1ere année LMD du domaine sciences et technologie ainsi que sciences de la matière.

Ces exercices couvrent les cinq chapitres des programmes de cours de la mécanique qui englobe l'outil mathématique, Cinématique du point matériel, mouvement relatif et dynamique du point matériel ainsi que l'énergie et travail.

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs visés et des pré- requis nécessaires. C'est aussi un support utile à nos étudiants en L1- SM et ST pour bien préparer leurs contrôles continus et examens du Semestre 1.

TABLE DES MATIERES

Chapitre III : Mouvement relatif

Chapitre IV : Dynamique du point matériel

Chapitre V : Travail et énergie

Chapitre I

Rappels mathématiques

I.1. Analyse dimensionnelle

- **Unités de base du système international**

Le système international (S.I) est constitué par les unités du système MKSA rationalisé (m : mètre, kg : kilogramme, s : seconde et a : ampère) et comporte des définitions supplémentaires de l'unité de température et de l'unité d'intensité lumineuse.

Le tableau suivant présente les unités SI les plus communément utilisées. Celles-ci ont une définition stricte et chacune d'elle est associée à un symbole particulier non substituable.

Les relations entre les unités des différents systèmes peuvent être facilement établies en utilisant les équations aux dimensions

Quantité de base		Unité de base SI	
Nom	**Symbol**	**Nom**	**Symbol**
longueur	*l, x, r, etc.*	mètre	m
masse	*m*	kilogramme	kg
Temps, durée	*t*	seconde	s
Courant electrique	*L, i*	ampere	A
température thermodynamique	*T*	kelvin	K
Quantité d'une substance	*n*	mole	mol
Intensité lunineuse	*lu*	candela	cd

I. 1.1. Equations aux Dimensions

a) Définition

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T.

b) Utilités des équations aux dimensions

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules :

Ainsi : $\frac{1}{2}mv^2$ est homogène à une énergie (c'est-à-dire un travail),

$E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow [E] = [1/2][m][v]^2 = 1M\,L^2T^{-2}$

Grandeur	Formule de base	Dimension
Surface	$S = l.l$	L^2
Volume	$V = l.l.l$	L^3
Vitesse	$v = \frac{l}{t}$	LT^{-1}
Accélération	$\Upsilon = \frac{v}{t}$	LT^{-2}
Force	$F = m\gamma$	MLT^{-2}
Quantité de mouvement	$P = mv$	MLT^{-1}

I. 2. Calcul d'erreurs

I. 2.1. Définition

Pour toute grandeur mesurable A, il est possible de définir :

- sa valeur mesurée a
- sa valeur exacte a_0 qu'on ne peut pas atteindre

I. 2.2. L'incertitude absolue Δa

L'erreur Absolue est définit alors par $\delta a = |a - a_0|$, elle est la résultante de plusieurs erreurs (systématiques, accidentelles…….).

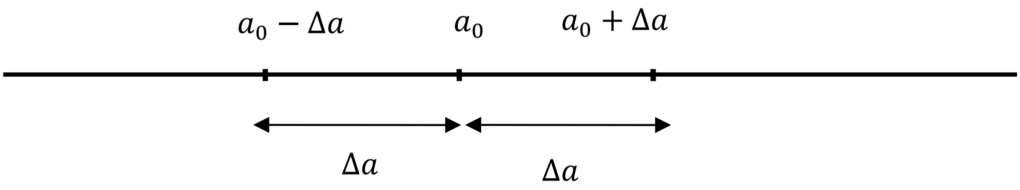
L'erreur absolue δa n'étant pas connue, on se contente de donner une limite supérieure Δa appelée incertitude absolue telle que :

$\delta a \leq \Delta a \Rightarrow \Delta a > 0$ (l'incertitude absolue est toujours >0)

Cela veut dire que l'incertitude absolue est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue. Alors une mesure *a* est toujours accompagnée d'une incertitude Δa.

$a = (a_0 \pm \Delta a)$ signifie que la valeur de a est comprise dans l'intervalle :

$a_0 - \Delta a \leq a_0 \leq a_0 + \Delta a$



Souvent l'incertitude absolue correspond à la plus petite graduation de l'instrument de mesure utilisé. Elle est donc liée à la qualité et au prix de ce dernier.

Exemples :

$d = (354 \pm 3)$ (km) $\Rightarrow$ 351(km) < d < 357 (km)

$m = (5,25 \pm 0,02)$ (kg) $\Rightarrow$ 5,23 (kg) < m < 5,27 (kg)

Toutefois, il est erroné d'écrire :

$d = (15,83379 \pm 0,173)$ (m),

Puisqu'il y a une incertitude, il faut écrire :

$d = (15,8 \pm 0,2)$ [m].

I. 2.3. L'incertitude relative : Δa/a

L'incertitude relative est le quotient de l'erreur absolue par la valeur mesurée. Elle est indiquée en % ou en ‰.

Exemple : Si *m = (25,4 ± 0,2) (m)* ⇒ *Δm/m = 0 ,2 /25, 4 = 0, 8%*

I. 2.4. L'incertitude résultant d'un calcul :

a) Addition ou soustraction de plusieurs mesures :

m = m1 + m2 + m3 ou m = m1 - m2 - m3

⇒Δm = Δm1 + Δm2 + Δm3

Les incertitudes absolues s'additionnent en présence de ces deux opérations.

b) Multiplication ou division de plusieurs mesures :

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

On utilise la méthode de différentiel logarithmique : On prend le logarithme népérien de l'expression de *R*

$$lnR = ln\rho + lnL + lnS$$

Puis on prend la différentielle de l'expression précédente

$$d(lnR) = d(ln\rho) + d(lnL) + d(lnS)$$

On obtient ;

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} + \frac{dS}{S}$$

Puis On remplace le *d* par Δ et on prend les valeurs absolues des coefficients de ΔR, ΔS, $\Delta\rho$ et ΔL car cela correspond à la valeur maximale que l'on peut avoir sur l'incertitude

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta S}{S}$$

I. 3. Calcul vectoriel

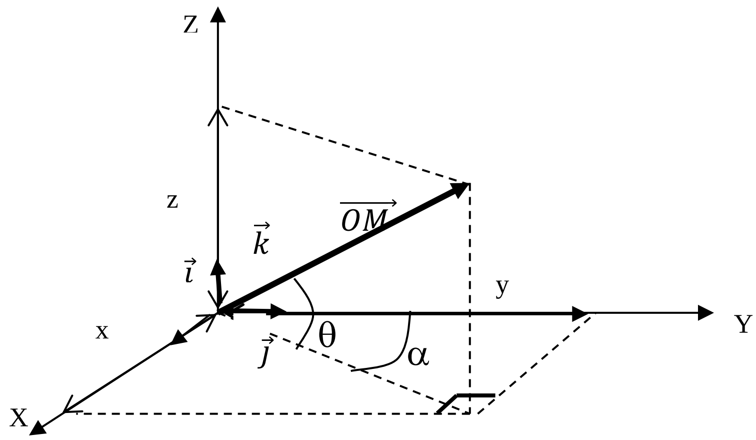
La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan) ou trois (l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension quelconque. Cette notion, devenue abstraite et introduite par un système d'axiomes, est le fondement de la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire. Le vecteur permet, en physique, de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre ou une fonction numérique seuls. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, une force ou un champ électrique, la direction et le sens sont indispensables. Les vecteurs s'opposent aux grandeurs scalaires décrites par un simple nombre, comme la masse, la température, etc.

I. 3.1. Définition d'un vecteur

En termes simples, un vecteur est une grandeur qui a une intensité, une direction et un sens. Il est commode de le représenter par une flèche

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

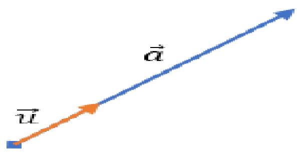
Les réels uniques *x* et *y* sont les coordonnées u point M dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).



I. 3.2. Notion de vecteur unitaire

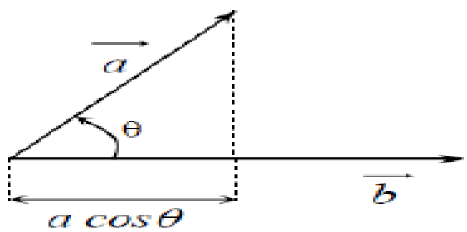
A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire $\vec{u}$ qui a la même direction que $\vec{a}$ et de orme égale à un. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module :

$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}$



I.3.3. Le produit scalaire

Le produit scalaire est une opération algébrique s'ajoutant aux lois s'appliquant aux vecteurs. À deux vecteurs, elle associe leur produit, qui est un nombre (ou scalaire, d'où son nom). Elle permet d'exploiter les notions de la géométrie euclidienne traditionnelle : longueurs, angles, orthogonalité.



$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos \alpha$

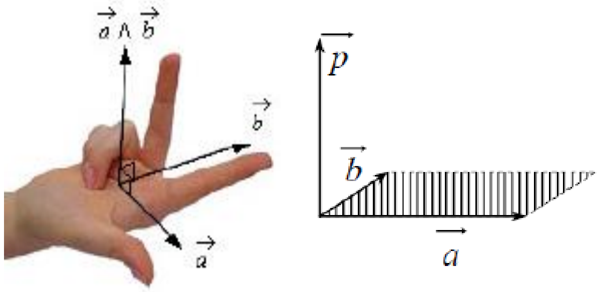
I.3.4. Le produit vectoriel

Le produit vectoriel est une opération vectorielle effectuée dans les espaces euclidiens orientés à trois dimensions. Le formalisme utilisé actuellement est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Günter Grassmann et William Rowan Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ formant un angle α. Par définition, le produit vectoriel de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ tel que :

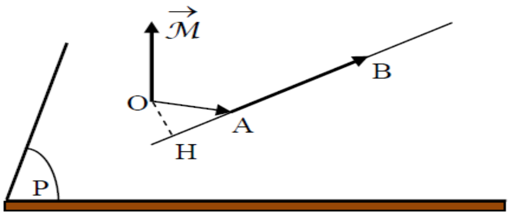
1. la direction de $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs.
2. le sens de $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ donne au triplet $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})$ une orientation directe : cette orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustrée ci-dessous
3. la norme de $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$:

$||\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}|| = ||\overrightarrow{a}|| \cdot ||\overrightarrow{b}|| \cdot |\sin(\alpha)|$



I.3.5. Applications du produit vectoriel en physique

Par définition, le moment d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un point O est :



$$\vec{M}_{(\overrightarrow{AB}/O)} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Son module est

$$\left|\vec{M}_{(\overrightarrow{AB}/O)}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})\right|$$

$$= \underbrace{\left|\overrightarrow{OA}\right| \sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB})}_{OH} \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

Soit $\left|\vec{M}_{(\overrightarrow{AB}/O)}\right| = OH \left|\overrightarrow{AB}\right|$

I. 4. Exercices résolus

EXERCICE 1 : Donner la dimension et les unités dans le système international (SI) des grandeurs suivantes :

Longueur, Temps, Masse, Intensité de courant, Masse Volumique, Vitesse, Force, Quantité de mouvement, Energie et Puissance Pression.

SOLUTION

La dimension et les unités dans le système international (SI) des grandeurs suivantes sont

Grandeur	Dimension	Unité
Longueur	L	mètre (m)
Masse	M	Kilogramme (kg)
Temps	T	Seconde (s)
Intensité de courant	I	A
Vitesse	$v = dx/dt \Rightarrow [v]=LT^{-1}$	m/s
Accélération	$\gamma = dv/dt \Rightarrow [\gamma]= LT^{-2}$	m/s^2
Force	$F=m\,\gamma \Rightarrow [F]=M\,LT^{-2}$	Newton (N)
Quantité du mouvement	$P=mv \Rightarrow [P]=M\,LT^{-1}$	*Kg m/s*
Energie	$E = FL \Rightarrow [E]= M\,L^{2}T^{-2}$	*Joule*
Puissance	$P= E/t \Rightarrow [P]= M\,L^{2}T^{-3}$	*Watt*
Pression	$P_r= F/S \Rightarrow [P_r]= M\,L^{-1}T^{-2}$	*Pascal*

EXERCICE 2 : Dire les quelles de ces formules sont homogènes :

T est la Période (temps), **l** la longueur, **g** la pesanteur, **P** la quantité de mouvement (masse multiplier par vitesse), **m** la masse, **c** la vitesse de la lumière et **E** l'énergie.

$$\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}\ ,\ \mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}},\ \mathbf{T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}},\ \mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{l+g}{lg}}}$$

$$\mathbf{E = \sqrt{pc^2 + m^2c^4}},\ \mathbf{E^2 - \frac{P^2C^4}{m} = m^2}\ ,\ \ \mathbf{E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}.$$

SOLUTION

On **vérifie** l'homogénéité de ces formules en utilisant les équations aux dimensions

- $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$ $\Rightarrow [T]= [2\pi]\,\frac{[l]^{1/2}}{[g]^{1/2}} = \frac{L^{1/2}}{(LT^{-2})^{1/2}} = T$ l'expression est homogène.

- $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}}$ $\Rightarrow [T] = [2\pi]\,\frac{[g]^{1/2}}{[l]^{1/2}} = \frac{(LT^{-2})^{1/2}}{(L)^{1/2}} \neq T^{-1}$ l'expression n'est pas homogène.

-$\mathbf{T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{l}{g}}}$ $\Rightarrow [T] = [\frac{1}{2\pi}]\,\frac{[l]^{1/2}}{[g]^{1/2}} = \frac{L^{1/2}}{(LT^{-2})^{1/2}} = T$ l'expression est homogène.

-$\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{l+g}{lg}}}$ $\Rightarrow [T] = [2\pi]\,\frac{[l]^{1/2}+[g]^{1/2}}{[l]^{1/2}[g]^{1/2}} = \frac{L^{1/2}+(LT^{-2})^{1/2}}{L^{1/2}(LT^{-2})^{1/2}}$ l'expression n'est pas homogène

- $\mathbf{E = \sqrt{pc^2 + m^2c^4}}$

$$\begin{cases} E^2 = pc^2 + m^2c^4 \\ [E^2] = (ML^2T^{-2})^2 \end{cases} \Rightarrow [pc^2 + m^2c^4] = [p][c]^2 + [m]^2[c]^4$$

$$= [mv][c]^2 + [m]^2[c]^4$$

$$= (MLT^{-1})(LT^{-1})^2 + M^2L^2T^{-2}$$

$$(ML^2T^{-2})^2 \neq (ML^3T^{-3}) + M^2L^2T^{-2}$$

Donc l'expression n'est pas homogène.

- $\boldsymbol{E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}$

$\boldsymbol{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$

Avec $$\begin{cases} [E^2] = (ML^2T^{-2})^2 \\ [p^2c^2 + m^2c^4] = [p]^2[c]^2 + [m]^2[c]^4 \end{cases}$$

Sachant que $$\begin{cases} [m]^2[c]^4 = (M)^2(LT^{-1})^4 = M^2L^4T^{-4} \\ [mv]^2[c]^2 = (MLT^{-1})^2\,(LT^{-1})^2 = M^2L^4T^{-4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [E^2] = M^2L^4T^{-4} \\ [p^2c^2 + m^2c^4] = M^2L^4T^{-4} + M^2L^4T^{-4} \end{cases}$$

Elle est homogène.

EXERCICE 3 :

La loi de Stokes exprime la force de frottement **F** d'un fluide sur une sphère de rayon **r** en déplacement avec une vitesse **v** dans le fluide :

$$\boldsymbol{F = 6\pi\, \eta^a\, r^b\, v^c}$$

Où η est la viscosité dynamique du fluide tel que $[\boldsymbol{\eta}] = \mathbf{ML^{-1}T^{-1}}$.

En déduire les dimensions, trouver les exposants a, b et c

SOLUTION

$\boldsymbol{F = 6\pi\, \eta^a\, r^b\, v^c}$

Nous savons que $F = ma$
Ou m est la masse et a l'accélération
Donc $[F] = [ma] = [m][a] = MLT^{-2}$....................(1)

$$[6\pi\, \eta^a\, r^b\, v^c] = [6\pi][\eta]^{\boldsymbol{a}}[r]^{\boldsymbol{b}}[\boldsymbol{v}]^{\boldsymbol{c}}$$

$$= \mathbf{1}(ML^{-1}T^{-1})^a(L)^b(LT^{-1})^c$$

$$= M^a L^{b-a+c} T^{(-a-c)} \text{.................(2)}$$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - a + c = 1 \\ -a - c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Alors $\boldsymbol{F = 6\pi\, \eta\, r\, v}$

EXERCICE 4 :

L’énergie d’un mobile en mécanique relativiste est donnée par la relation suivante

$$E = \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Où m_0 est la masse du mobile, v sa vitesse et c vitesse de la lumière.

Sachant que : m_0= (1.000 ±0.001) *kg*, c = (2997280.0±0.8) *km/s* et v = (200000.0±0.8) *km/s*.

- Calculer l’incertitude relative $\frac{\Delta E}{E}$.

SOLUTION

$$lnE = ln\frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Alors $lnE = \ln(m_0\, c^2) - \ln\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \Rightarrow lnE = \ln(m_0\, c^2) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$

$$lnE = ln(m_0\,) + 2ln(c) - \frac{1}{2}ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{dE}{E} = \frac{dm_0}{m_0} + 2\frac{dc}{c} - \frac{1}{2}\frac{d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{dm_0}{m_0} + 2\frac{dc}{c} - \frac{1}{2}\frac{d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Posons $f = 1 - \frac{v^2}{c^2}$

La différentielle de f est donnée par

$$df = \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_c dv + \left.\frac{\partial f}{\partial c}\right|_v dc$$

Donc $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_c = -2\frac{v}{c^2}$ et $\left.\frac{\partial f}{\partial c}\right|_v = 2\frac{v^2}{c^3}$

$$\frac{dE}{E} = \frac{dm_0}{m_0} + 2\frac{dc}{c} - \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\left[-\frac{dv}{c^2} + \frac{vdc}{c^3}\right]$$

L'incertitude relative $\frac{\Delta E}{E}$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m_0}{m_0} + 2\frac{\Delta c}{c} + \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\left[\frac{\Delta v}{c^2} + \frac{v\Delta c}{c^3}\right]$$

AN: $\frac{\Delta E}{E} = 1.53\ 10^{-6}$

EXERCICE 5 : La période des oscillations *T*, d'un pendule de torsion composé d'une sphère de masse m et de rayon *R*, s'écrit :

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2}{C}}.$$

- Trouver la dimension de la constante *c*.
- Calculer l'incertitude relative sur c ($\frac{\Delta C}{C}$), sachant que *T*= (0.700±0.001)*s*, *m*=(0.960±0.001)*Kg* et *R*=(0.072±0.001)*m*.

SOLUTION

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2}{C}} \Rightarrow \boldsymbol{T^2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{\frac{2}{5}mR^2}{C}\right)$$

D'ou $c = \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{\frac{2}{5}mR^2}{\boldsymbol{T^2}}\right)$

Alors $[c] = \left[\frac{1}{(2\pi)^2}\right]\frac{\left[\frac{2}{5}mR^2\right]}{[\boldsymbol{T^2}]} = \frac{M\boldsymbol{L^2}}{\boldsymbol{T^2}} = M\boldsymbol{L^2T^{-2}}$

Calcul de l'incertitude

$$lnc = \mathbf{ln}\left(\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{\frac{2}{5}mR^2}{\boldsymbol{T^2}}\right)\right) = ln\frac{1}{(2\pi)^2} + ln\frac{2}{5} + ln\,m + 2lnR - 2ln\boldsymbol{T}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{dm}{m} + 2\frac{dR}{R} - 2\frac{dT}{T}$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta T}{T}$$

AN: $\frac{\Delta c}{c} = 0.031$

EXERCICE 6*:* Dans un système d'axes orthonormés, on donne les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{\boldsymbol{V_1}} = \boldsymbol{3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{V_2}} = \boldsymbol{-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}}$

1- Calculer les modules des vecteurs $\|\overrightarrow{V_1}\|$, $\|\overrightarrow{V_2}\|$ et $\|\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\|$.

2- Déterminer l'angle θ que font entre eux les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

3- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur ($\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$).

4- Déterminer les angles, β et γ que fait $\vec{u}$ avec les axes de coordonnées (ox), (oy) et (oz) respectivement.

5- Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$.

6- Soit le triangle (OAB) défini par les extrémités des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$: $\overrightarrow{V_1}=\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{OB}$.

Montrer que l'aire du triangle(OAB) peut s'exprimer en fonction de $\|\overrightarrow{V_1}\|$ et $\|\overrightarrow{V_2}\|$ et θ.

Vérifier qu'elle peut aussi être obtenue par la relation : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\|$.

SOLUTION

1- Calculons les modules

$$\|\overrightarrow{V_1}\| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25}$$
$$\|\overrightarrow{V_2}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \binom{3-1}{4+2} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} \quad \Longrightarrow \|\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} = \sqrt{40}$$

2- D' après le produit scalaire

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}=\|\overrightarrow{V_1}\|\cdot\|\overrightarrow{V_2}\|\cdot\cos\theta$$

L'angle θ compris entre e les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est donné par

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}}{\|\overrightarrow{V_1}\|\cdot\|\overrightarrow{V_2}\|}$$

Donc $\cos\theta = \frac{-3+8}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \theta = \left(cos\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-1} = 63.43°$.

3- Les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur ($\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$) :

$P(\overrightarrow{V_2})\Big/_{\overrightarrow{V_1}} = Proj\ (\overrightarrow{V_2})/\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{U_1}$ Ou $\overrightarrow{U_1}$ est un vecteur unitaire de $\overrightarrow{V_1}$

$$Proj\ (\overrightarrow{V_2})\Big/\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_2}.\frac{\overrightarrow{V_1}}{\|\overrightarrow{V_1}\|} = \frac{5}{5} = 1$$

Alors le vecteur unitaire de($\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$) est :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}}{\left\|\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right\|} = \frac{2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}}{2\sqrt{10}} = \frac{\vec{\imath}}{\sqrt{10}} + \frac{3\vec{\jmath}}{\sqrt{10}}$$

4- Détermination des angles, β et γ avec $\vec{u}$:

A partir du produit scalaire, on a;

$$\vec{u}.\vec{\imath} = \|\vec{u}\|.\|\vec{\imath}\| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{\imath}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{\imath}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\vec{u}.\vec{\jmath} = \|\vec{u}\|.\|\vec{\jmath}\| cos\,\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\vec{u}.\vec{\jmath}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{\jmath}\|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\vec{u}.\vec{k} = \|\vec{u}\|.\|k\| cos\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{\vec{u}.\vec{k}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{k}\|} = 0$$

Donc $\begin{cases} \alpha = \left(cos\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^{-1} = 71.56° \\ \beta = \left(cos\ \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{-1} = 18.43° \\ \gamma = (cos\ 0)^{-1} = 90° \end{cases}$

5- Calculons le produit vectoriel de $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$:

$$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{k}.$$

6- L'aire Δ_{OAB}:

$$\Delta_{OAB} = S_\Delta = \frac{1}{2}\, b\,.h = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.h$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\| \sin\theta = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{V_2}\right\| \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} 5.\sqrt{5} \sin 63.43 = 4.56$$

Vérification de la relation :

Comme $S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{V_2}\right\| \sin\theta$ or $\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{V_2}\right\| \sin\theta = \left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\|$

Donc $S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\|$

EXERCICE 7 *:*

On donne les vecteurs suivants :

$\vec{A} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\,\vec{k}$ et $\vec{B} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$

1- Calculer les modules des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ainsi que leurs vecteurs unitaires

2- Déterminer la projection de $\vec{B}$ le long de la direction$\vec{A}$.

3- Calculer le produit scalaire ($\vec{A}.\vec{B}$). En deduire l'angle α formé entre eux.

4- Calculer le produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$.

5- Montrer que les angles, β et γ formés respectivement entre le vecteur $\vec{A}$ et les axes (ox), (oy) et (oz) sont donnés par :

$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\vec{\imath}}{\|\vec{A}\|}$, $\cos\beta = \frac{\vec{A}\vec{\jmath}}{\|\vec{A}\|}$, $\cos\gamma = \frac{\vec{A}\vec{k}}{\|\vec{A}\|}$.

Calculer$\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ et vérifier que :

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

SOLUTION

Calculons $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$ et leurs vecteurs unitaires :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$$

Et les vecteurs unitaires ;

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\,\vec{k}}{\sqrt{17}} = \frac{2\vec{\imath}}{\sqrt{17}} - \frac{3\vec{\jmath}}{\sqrt{17}} + \frac{2\,\vec{k}}{\sqrt{17}}$$

$$\overrightarrow{u_2} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}}{\sqrt{30}} = \frac{5\vec{\imath}}{\sqrt{30}} + \frac{2\vec{\jmath}}{\sqrt{30}} - \frac{\vec{k}}{\sqrt{30}}$$

2- La projection de $\vec{B}$ le long de la direction $\vec{A}$:

$$Proj\,(\vec{B})/\overrightarrow{A} = \vec{B}.\overrightarrow{u_1} = (5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k})(\frac{2\vec{\imath}}{\sqrt{17}} - \frac{3\vec{\jmath}}{\sqrt{17}} + \frac{2\,\vec{k}}{\sqrt{17}})$$

$$Proj\,(\vec{B})/\overrightarrow{A} = \frac{10\vec{\imath}}{\sqrt{17}} - \frac{6\vec{\jmath}}{\sqrt{17}} - \frac{2\,\vec{k}}{\sqrt{17}}$$

3- Le produit scalaire ($\vec{A}.\vec{B}$) :

$$\vec{A}.\vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = (2\times 5) + (-3\times 2) + (2\times -1) = 2$$

L'angle α est donné par

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|} = \frac{2}{\sqrt{17}\sqrt{30}} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \left(cos\,\frac{2}{\sqrt{17}\sqrt{30}}\right)^{-1} = 84.91°\,.$$

4- Le produit vectoriel

$$\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 19\vec{k}.$$

5- Montrons l'expression des angles (cosinus directeurs) :

A partir du produit scalaire, on aura :

$$\vec{A}.\vec{\imath} = \|\vec{A}\|.\|\vec{\imath}\|\cos\alpha \qquad\Longrightarrow\qquad \cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{\imath}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{\imath}\|}$$

$$\vec{A}.\vec{\jmath} = \|\vec{A}\|.\|\vec{\jmath}\|cos\,\beta \qquad\Longrightarrow\qquad \cos\beta = \frac{\vec{A}.\vec{\jmath}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{\jmath}\|}$$

$\vec{A}.\vec{k} = \|\vec{A}\|.\|\vec{k}\|cos\,\beta \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\gamma = \frac{\vec{A}.\vec{k}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{k}\|}$

Donc $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\vec{A}.\vec{\imath}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{\imath}\|} = \frac{2}{\sqrt{17}} \\ \cos\beta = \frac{\vec{A}.\vec{\jmath}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{\jmath}\|} = \frac{-3}{\sqrt{17}} \\ \cos\gamma = \frac{\vec{A}.\vec{k}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{k}\|} = \frac{2}{\sqrt{17}} \end{cases}$

Alors $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 = 1$

I. 5. Exercices supplémentaires sans solution

EXERCICE 8 :

La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\rho = \frac{m^x}{\pi l^y\ R^2}}$$

1- En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$

2- En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

EXERCICE 9 : On donne l'équation des gaz réels par la loi de Vanderwaals :

$$\boldsymbol{c = (P + \frac{a}{V^2})(V - b)}$$

Où P et V sont la pression et le volume respectivement.

1- Déterminer les dimensions de **a, b** et **c**

2- Calculer l'incertitude relative $\frac{\Delta \mathbf{c}}{\mathbf{c}}$ en utilisant la méthode des différentielles logarithmiques

EXERCICE 10

La vitesse limite atteinte par un parachute lesté est fonction de son poids *P* et de sa surface *S* est $v = \sqrt{\frac{P}{K\,S}}$

1- Donner les dimensions de la constante *k*.

2- Calculer la vitesse limite d'un parachute ayant les caractéristiques suivantes :

M = 90 kg, S = 80 m^2, g = 9, 81 m/s^2, et *k* = 1,15 MKS.

3- Le poids étant connu à 2 % près et la surface à 3 %, calculer l'incertitude absolue Δv sur la vitesse, ainsi que l'incertitude relative $\frac{\Delta v}{v}$

EXERCICE 11

On donne les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{r_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{r_2} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{r_3} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$

1- Calculer leurs modules.

2- Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$\vec{A} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}$, $\vec{B} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}$

3- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{U}$ porté par le vecteur $\vec{C} = \overrightarrow{r_1} + 2\overrightarrow{r_2}$

4- Calculer le produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$.

5- Calculer les produits $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$.

6- Calculer l'angle compris entre les vecteurs $\overrightarrow{r_2}$ et $\overrightarrow{r_3}$.

EXERCICE 12

On donne les vecteurs suivants :

$\vec{w} = \frac{3\vec{k}}{t^2+9}$, $\vec{v} = \frac{t\vec{i} - 3\vec{j}}{\sqrt{t^2+9}}$ et $\vec{u} = \frac{3\vec{i} + t\vec{j}}{\sqrt{t^2+9}}$

1- Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires.

2- Calculer $\frac{d\vec{u}}{dt}$, $\frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{w} \wedge \vec{u}$ et $\vec{w} \wedge \vec{v}$.

Chapitre II

CINEMATIQUE DU POINT

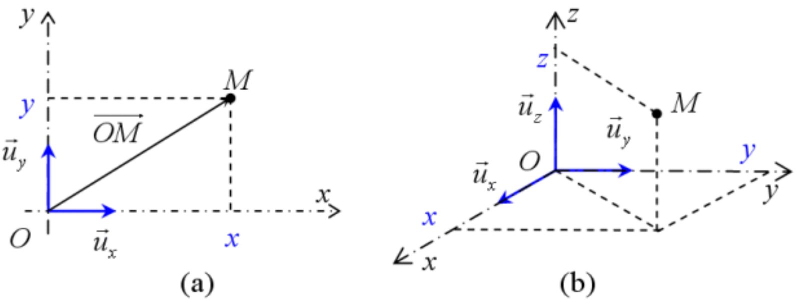
Introduction

L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent le mouvement. Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques tels que les vecteurs d'accélération, vitesse, position et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

II.1 Rappel

II.1.1. Repère d'espace

Un repère d'espace est défini par une origine *O* qui est fixe dans le référentiel et des axes de référence orthonormés c'est-à-dire orthogonaux et munis d'une unité de longueur (vecteur unitaire de norme égale à 1) qui vont permettre à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve le point. Les trois axes forment un trièdre direct



Repère dans un plan (a) et dans l'espace (b)

II.1.2. Les coordonnées cartésiennes

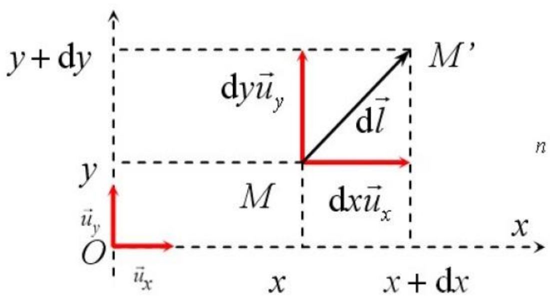
On considère une base orthonormée notée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. C'est une base qui ne change pas au cours du temps.

La connaissance du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ permet aussi de repérer le point *M* qui est donné par

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$

En utilisant l'expression du vecteur position, la vitesse est

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$$



Son module et donné par ;

$$|\vec{V}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

L'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$$

Et son module ;

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$

Toutefois pour des raison pratiques (en particulier lors de calculs de produits scalaires et produits vectoriels), il est important que la base utilisée soit orthonormée directe.

Orthonormée signifie:

- Ortho: $\overrightarrow{u_x}.\overrightarrow{u_y} = 0$, $\overrightarrow{u_x}.\overrightarrow{u_z} = 0$ et $\overrightarrow{u_y}.\overrightarrow{u_z} = 0$.

- Normé: $|\overrightarrow{u_x}| = |\overrightarrow{u_y}| = |\overrightarrow{u_z}|$.

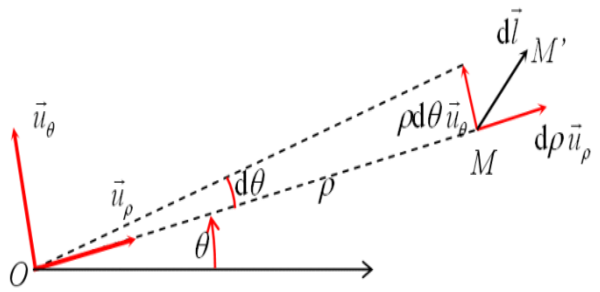
Cette base est de plus directe si: $\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{u_y} \wedge \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{u_y}$

La base orthonormée étant directe, la règle des trois doigts peut être utilisée.

II.1.3. Les coordonnées polaires (dans un plan)

Le vecteur position dans ce repère s'écrit

$\vec{\rho} = \overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| \overrightarrow{u_\rho} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$



Relation entre les coordonnées polaires et cartésiennes

$\boldsymbol{x = \rho cos\theta}$

$\boldsymbol{y = \rho sin\theta}$

Donc

$\vec{u}_x = (\cos\theta)\,\overrightarrow{u_\rho} + (\sin\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

$\vec{u}_y = (\sin\theta)\,\overrightarrow{u_\rho} + (\cos\theta)\overrightarrow{u_\theta}$

Passage des coordonnées polaires aux cartésiennes

$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\tan\theta = \frac{y}{x}$

Donc

$\vec{u}_\rho = (\cos\theta)\overrightarrow{u_x} + (\sin\theta)\overrightarrow{u_y}$

$\vec{u}_\theta = (-\sin\theta)\overrightarrow{u_x} + (\cos\theta)\overrightarrow{u_y}$

Alors les coordonnées du vecteur vitesse sont :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + r\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

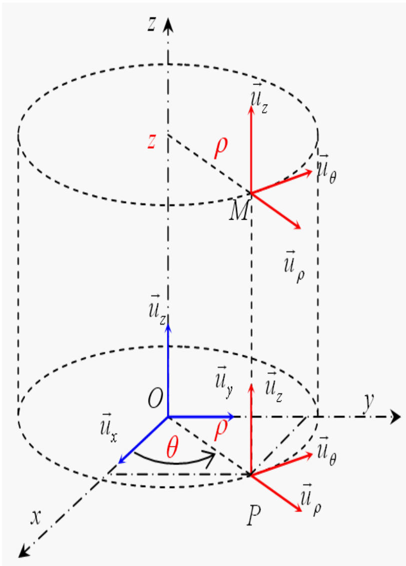
Avec $\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{u_\rho}$

L'accélération est donnée par

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$$

II.1.4. Les coordonnées cylindriques (dans l'espace)

Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques il suffit de compléter le système de coordonnées polaires (dans le plan *xOy*) par un troisième axe : l'axe *Oz* avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote)



r

Les coordonnées cylindriques sont $(\rho,\ \theta, z)$, le vecteur position s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$$

Alors

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Les coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques sont

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\vec{k}$$

Et pour l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\rho} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\vec{k}$$

II.1.5. Les coordonnées sphériques (dans l'espace)

Les coordonnées sphériques permettent de repérer un point sur une sphère de rayon *OM*= *r* . C'est typiquement le repérage d'un point sur la Terre pour lequel il suffit alors de préciser deux angles : latitude et la longitude. Ces Vecteurs unitaires sont : $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_\phi}$

On définit *M* par la longueur

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ et les deux angles ϕ et θ.

avec x = $r\cos\theta\,\sin\phi$

$y = r\sin\theta\,\sin\phi$

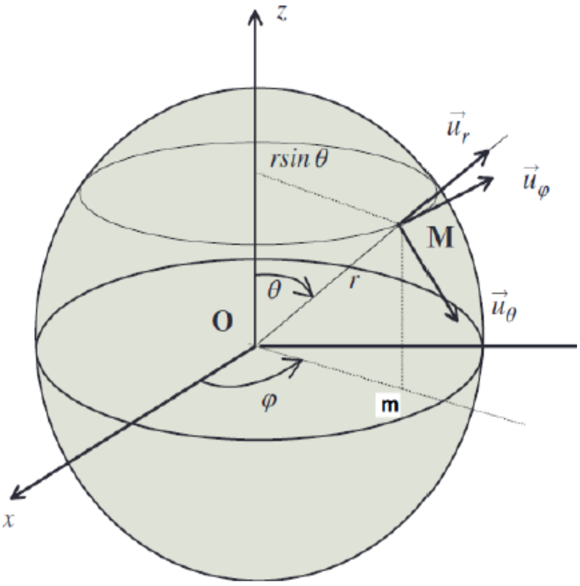
$z = r\sin\theta$

le vecteur position s'ecrit

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + r\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$

Dans le système des coordonnées sphériques, la vitesse est donné par la relation suivante

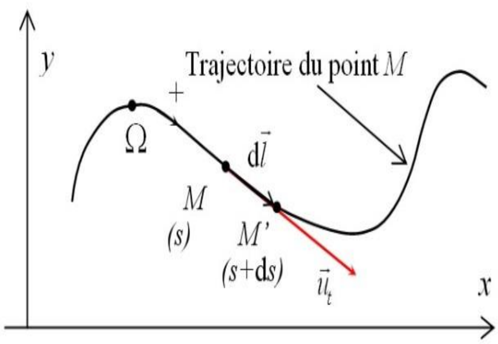
$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi}$



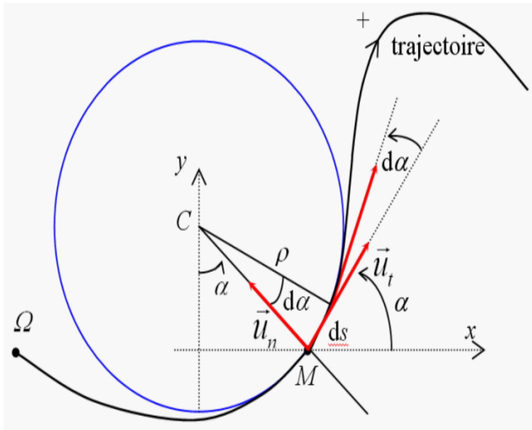
II.1.6. Abscisse curviligne et base de Frenet (dans un plan)

Lorsque la trajectoire que suit le point *M* est connue il est possible de repérer le point sur la courbe représentant cette trajectoire. On choisit sur la courbe orientée un point origine Ω et on définit l'abscisse curviligne *S* comme la mesure algébrique sur la courbe de la distance:

Ω*M* *S*= $\overline{\Omega M}$ (mesure sur la courbe)



Le cercle de centre C et de rayon ρ qui tangente localement en M la trajectoire du point est appelée cercle osculateur. Le rayon ρ de ce cercle correspond alors au rayon de courbure de la trajectoire au point considéré et C est le centre de courbure. En chaque point M de la courbe on définit la base de Frenet $(\overrightarrow{u_t},\ \overrightarrow{u_n})$:



- **Expression dans la base de Frenet**

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point M en décrivant la trajectoire, 'abscisse curviligne'.Le point M passe de s à $s+ds$ entre l'instant t et l'instant $t+dt$. Le déplacement élémentaire est tangent à la trajectoire et s'écrit alors :

$$\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\overrightarrow{u_t}$$

Le vecteur vitesse dans la base de Frenet a pour expression :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_t} = \dot{s}\overrightarrow{u_t} = V\overrightarrow{u_t}$$

Le vecteur accélération s'obtient en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\dot{s}\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt}\overrightarrow{u_t} + \dot{s}\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

À un instant t , au point M de la trajectoire, le vecteur de base $\overrightarrow{u_t}$ fait un angle α avec la direction de l'axe des x . À l'instant $t+dt$, ce vecteur tourne d'un angle $d\alpha$. La dérivée, par rapport au temps, de ce vecteur unitaire est donc donnée par (voir la règle de dérivation par rapport au temps d'un vecteur tournant de norme constante) :

$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \dot{\alpha}\overrightarrow{u_n}$$

$$ds = \rho d\alpha \quad \text{avec} \quad CM = \rho \Longrightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{V}{\rho}$$

$$\dot{s}\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \dot{s}\dot{\alpha}\overrightarrow{u_n} = \dot{s}\frac{\dot{s}}{\rho}\overrightarrow{u_n} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overrightarrow{u_n} = \frac{V^2}{\rho}\overrightarrow{u_n}$$

Finalement l'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{V^2}{\rho}\overrightarrow{u_n}$$

II.2. Exercices résolus

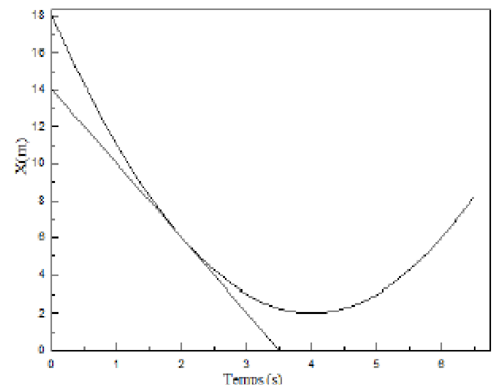
EXERCICE 1

Le diagramme position-temps d'un mobile se déplaçant le long d'un axe est donné sur le schéma ci-contre.

1) Trouver la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps t = 1 s et t = 3 s.

2) Déterminer la vitesse à l'instant t = 2 s en calculant la pente de la droite indiqué sur le schéma.

3) A quel instant la vitesse s'annule, décrire le mouvement du mobile à cet instant



SOLUTION

1) La vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 :

$x_1(t_1 = 1s) = 12m$

$x_2(t_1 = 3s) = 3m$ $\qquad v_m = \frac{x_{1-} x_2}{t_1 - t_2} = -4{,}5 m/s$

2) La vitesse instantanée est calculée en prenant la tangente a la courbe à l'instant $t = 2s$

$v_{inst} = \tan\alpha = \frac{0-14}{3.5-0} = -4\ m.s^{-1}$

3) La vitesse s'annule à$t = 4s$. A cet instant, le mobile s'arrête, puis il change de direction.

EXERCICE 2

Un point matériel se déplace sur une ligne droite suivant l'équation horaire suivante :

$x(t) = -6t^2+16t$ (t en seconde)

1- Quelle est la position de ce corps à t=1s

2- A quel instant t, il passe par la position O (origine)

3- Quelle est la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris entre 0 et 2 s

4- Quelle est l'expression de la vitesse moyenne dans l'intervalle de temps compris

$t_0 < t < \Delta t + t_0$

5- Donner l'expression de la vitesse instantanée, déduire sa valeur a $t = 0$

6- Quelle est l'expression de l'accélération moyenne durant le temps $t_0 < t < \Delta t + t_0$

7- Donner l'expression de l'accélération instantanée.

SOLUTION

1- *La* position du point matériel est: x (1s)=10 m

2- à $x = 0 \implies 6t^2+16t = 0$, il existe deux solutions. Il passe par l'origine à t = 0s puis à

t = 8/3s = 2.7s

3- $v_{moy} = \frac{x(t=2)-x(t=0)}{2-0} = 4\, m/s$

4- $v_{moy} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = 16 - 12t_0 - 6\Delta t$

5- $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = 16 - 12t$, v (0) =16m/s

6- $\gamma_{moy} = \frac{v(t=2)-v(t=0)}{2-0} = -12\, m/s^2$

7- $\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \gamma_{moy} = -12\, \text{m/s}^2$

EXERCICE 3:

La position du point matériel M est repérée dans un repère orthonormé direct R $(O,\vec{i},\vec{j})$, par :

x et y en cm et t en seconde

$$x(t) = 2t - 2$$
$$y(t) = t^2 - 2t + 3$$

1-Ecrire l'équation de la trajectoire du mouvement $y=f(x)$ et déterminer sa nature.

2-Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

3-Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ et en déduire sa norme$|\vec{v}|$.

4-Déterminer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$ ainsi que sa norme$|\vec{a}|$.

5-Calculer le rayon de courbure $\rho = \frac{v^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$ à l'instant t = 0.

SOLUTION

1) la trajectoire

$$x(t) = 2t - 2 \qquad \implies t = \frac{x+2}{2}$$

$$y(t) = t^2 - 2t + 3 \implies y(x) = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 - x + 1$$

la trajectoire est une parabole

2) $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (2t-2)\vec{\imath} + (t^2 - 2t + 3)\vec{\jmath}$

3) $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} + (2t-2)\vec{\jmath} \Longrightarrow \quad |\vec{V}| = 2\sqrt{(1)^2 + (t-1)^2} = 2\sqrt{t^2 - 2t + 2}$

4) $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\vec{\jmath} = 2\vec{\jmath} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a}| = 2m/s^2$

5) le rayon de courbure

$$\vec{V}\wedge\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2t-2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{V}\wedge\vec{a}| = 4m^2/s^3$$

Alors $\rho = \frac{V^3}{|\vec{V}\wedge\vec{a}|} = \frac{\left(2\sqrt{t^2+2t+2}\right)^3}{4} = 2\left(\sqrt{t^2+2t+2}\right)^3$

$$\rho(t=0) = \frac{V^3}{|\vec{V}\wedge\vec{a}|} = 2\left(\sqrt{2}\right)^3 m$$

EXERCICE 4:

Un point matériel A décrit une courbe plane de coordonnées polaires :

$\theta = 2t^3$ $\qquad$ $\boldsymbol{r = R}$ Tel que R constant

1) Trouver les composantes de la vitesse et de l'accélération. Déduire leurs normes.
2) Exprimer la vitesse et l'accélération dans la base intrinsèque (Frenet).
3) Quel est le rayon de courbure ρ de la trajectoire ?

Sachant que le centre de courbure est donné par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho^2}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)$. Déterminer les coordonnées de ce centre C.

4) Montrer que $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_r}$

SOLUTION

On sait que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = R\overrightarrow{u_r}$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dR}{dt}\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = 6Rt^2\overrightarrow{u_\theta} \quad \Longrightarrow |\vec{V}| = 6Rt^2$

Les coordonnées du vecteur accélération sont

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(6Rt^2\overrightarrow{u_\theta})$

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 12Rt\overrightarrow{u_\theta} - 36Rt^4\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(12Rt)^2 + (36Rt^4)^2} = 12Rt\sqrt{1+9t^6}$

2) Dans le repère de Frenet

$\vec{V} = |\vec{V}|\overrightarrow{u_t} = 6Rt^2\overrightarrow{u_t}$

$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d(62Rt^2)}{dt} = 12Rt$

On sait que $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

$a_n^2 = (12Rt)^2(1+9t^6) - (12Rt)^2$

Alors $a_n = \sqrt{(12Rt)^2(9t^6)} = 36Rt^4$

$\vec{a} = 12Rt\overrightarrow{u_t} - 36Rt^4\overrightarrow{u_n}$

3) Détermination du rayon de courbure

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(6Rt^2)^2}{36Rt^4} = R$$

Pour calculer le centre de courbure, on détermine le vecteur

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho}{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}}{V}\right) = R\overrightarrow{u_r} + \frac{R^2}{2Rt}\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = R\overrightarrow{u_r} - \frac{R^2}{6Rt^2}(6t^2)\overrightarrow{u_r} = \vec{0}$ C'est C(0,0)

5) $\vec{V} = 6Rt^2\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{V} = |\vec{V}|\overrightarrow{u_t} = 6Rt^2\overrightarrow{u_t}$ donc $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_t}$

De la même façon pour les accélérations on compare l'accélération des coordonnées polaires avec celle des coordonnées de Frenet on trouve $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_r}$.

EXERCICE 5 :

Dans un repère orthonormé direct R, les coordonnées d'un mobile M sont, à chaque instant t :

$$\begin{cases} x = a(2e^{-\omega t} - e^{-2\omega t}) \\ y = 2a(e^{-\omega t} - e^{-2\omega t}) \\ \quad z = 0 \end{cases}$$

a et ω sont des constantes positives. La constante a **possède** la dimension d'une longueur et ω celle de l'inverse du temps t).

a) Ecrire l'équation cartésienne de la trajectoire du point M

b) Trouver le vecteur vitesse du point M

c) Tracer la trajectoire pour t>0

d) Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ et l'accélération tangentielle $\overrightarrow{a_t}$

SOLUTION

a) Equation cartésienne de la trajectoire :

En posant *f* = $e^{-\omega t}$, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x = a(2f - f^2) \\ y = 2a(f - f^2) \\ z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x}{a} = (2f - f^2) \\ \frac{y}{2a} = (f - f^2) \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{2a} = f \qquad (1)$$

D'autre part

$$\begin{cases} x = a(2f - f^2) \\ y = 2a(f - f^2) \\ z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x}{a} = (2f - f^2) \\ \frac{y}{a} = 2(f - f^2) \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{a} = f^2 \qquad (2)$$

En élevant au carré la relation (1) : $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{2a}\right)^2 = f^2$

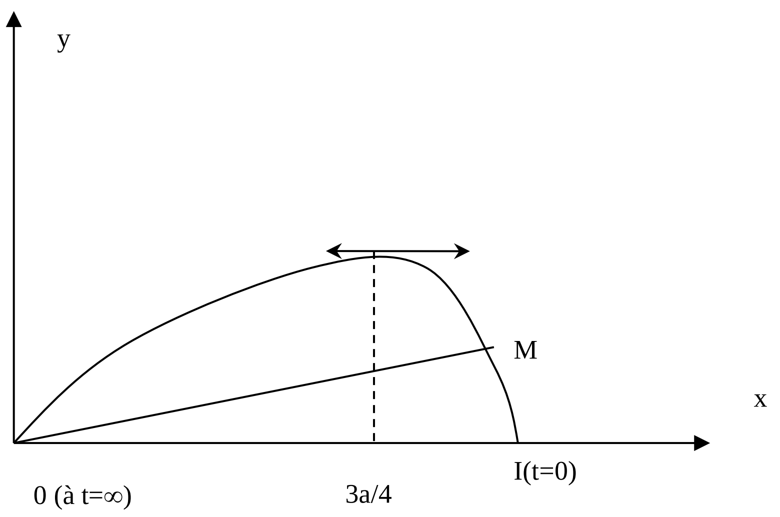
En posant (1)=(2), nous obtenant $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{2a}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{a}$

La trajectoire est une branche de parabole dont l'équation est : $(2x - y)^2 = 2a(x - y)$

b) Le vecteur vitesse est donne par

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = -2a\omega(e^{-\omega t} - e^{-2\omega t}) \\ V_y = \frac{dy}{dt} = -2a\omega(e^{-\omega t} - 2e^{-2\omega t}) \end{cases}$$

c) On étudie la variation de la courbe trajectoire comme on fait dans le traçage des courbes paramétriques.



d) Le vecteur accélération $\vec{a}$ est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = 2a\omega^2(e^{-\omega t} - 2e^{-2\omega t}) \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = 2a\omega^2(e^{-\omega t} - 4e^{-2\omega t}) \end{cases}$$

Et l'accélération tangentielle $\overrightarrow{a_t}$

$V^2 = 4a^2\omega^2 f^2(2 - 6f + 5f^2)$

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{4a^2\omega^2 f^2(2 - 6f + 5f^2)} = a\omega^2 f\left[\frac{-2 + 9f - 10f^2}{\sqrt{2 - 6f + 5f^2}}\right]$$

EXERCICE 6

Par rapport à un repère orthonormé, un point M est animé d'un mouvement défini en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} r = 1 + \cos\theta \\ \theta = \omega t \\ z = \sin\theta \end{cases}$$

1-Trouver les composantes en coordonnées cylindriques des vecteurs ; vitesse et accélération.

2- Soit m la projection orthogonale de M dans le plan xOy. Ecrire l'équation polaire de m.

SOLUTION

a) Les coordonnées cylindriques sont (r, θ, z), le vecteur position s'écrit
$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\vec{k}$

Alors $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

Les coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques sont

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\omega\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + (1 + \cos\theta)\omega\,\overrightarrow{u_\theta} + \omega\cos\theta\,\vec{k}$$

Les coordonnées du vecteur accélération sont

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(-\omega^2(1 + 2\cos\theta)\right)\overrightarrow{u_r} + (-2\omega^2 \sin\theta)\overrightarrow{u_\theta} - \omega^2 \sin\theta\, \vec{k}$$

b) Equation polaire de m, projection orthogonale de M dans le plan *xOy*.

Les équations paramétriques du point *m* sont :

$r=1+cos\theta$ et $\theta = \omega t$

L'équation polaire de *m* est $r=1+cos\theta$ qui est une cardioïde.

EXERCICE 7

Dans le système des coordonnées sphériques $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$. Un point *M* se déplace sur la surface d'une sphère de rayon *R*. Ses deux coordonnées sphériques sont :

$\theta = \left(\widehat{OZ, OM}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \omega t^2$ ω= constante positive

1) Trouver la vitesse et l'accélération de *M* dans la base sphérique.

2) Calculer les modules de la vitesse et de l'accélération,

3) en déduire l'accélération normale.

SOLUTION

Le vecteur position s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + r\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\varphi \sin\theta\, \overrightarrow{u_\varphi}$$

1) dans le système des coordonnées sphériques, la vitesse est donné par la relation suivante

$$\vec{V} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\varphi} \sin\varphi\, \overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\begin{cases} r = R \quad \Rightarrow \dot{r} = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \\ \varphi = \omega t^2 \Rightarrow \dot{\varphi} = 2\omega t \end{cases}$$

Donc la vitesse s'écrit

$$\vec{V} = 2R\omega t \sin\frac{\pi}{6}\overrightarrow{u_\varphi} = R\omega t\overrightarrow{u_\varphi}$$

Le vecteur accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\omega t\overrightarrow{u_\varphi}\right) = R\omega t\overrightarrow{u_\varphi} + R\omega t \frac{d}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}$$

Avec $\dot{\overrightarrow{u_\varphi}} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\, \overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$

Donc

$\vec{a} = R\omega\overrightarrow{u_\varphi} - R\omega\,\dot{\varphi}\left(\sin\frac{\pi}{6}\overrightarrow{u_r} + \cos\frac{\pi}{6}\overrightarrow{u_\theta}\right) = -R\omega^2t^2\overrightarrow{u_r} - \sqrt{3}R\omega^2t^2\overrightarrow{u_\theta} + R\omega\overrightarrow{u_\varphi}$

2) Les modules de la vitesse et de l'accélération

$\vec{V} = 2R\omega t\sin\frac{\pi}{6}\overrightarrow{u_\varphi} = r\omega t\overrightarrow{u_\varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad |\vec{V}| = R\omega t$

$|\vec{a}| = \sqrt{4R^2\omega^4t^4 + R^2\omega^2}$

3) L'accélération normale

$a^2 = a_t^2 + a_n^2$

Avec $a_t = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = R\omega$

Alors $a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t}$ $=2R \quad \omega^2t^2$

EXERCICE 8

On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel dans le système des coordonnées polaires, il décrit une trajectoire suivant une loi suivante : r=*2acosθ* avec ***θ=ωt*** (a et *ω* étant des constantes).

1- Déterminer la vitesse et l'accélération de *M* ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées polaires
2- Déterminer la vitesse et l'accélération de *M* ainsi que leur normes, dans le système des coordonnes intrinsèques (Frenet).
3- Déterminer le rayon de courbure
4- Déterminer le vecteur position dans le système des coordonnées cartésiennes.

SOLUTION

1) Le vecteur position en coordonnées polaires est donné par :$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} = 2acos\theta\overrightarrow{u_r}$

Les coordonnées du vecteur vitesse

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\omega 2a\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + 2a\omega cos\theta\overrightarrow{u_\theta} = 2a\omega(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$

$|\vec{V}| = 2a\omega$

Les coordonnées du vecteur accélération sont

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}2a\omega(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta}) = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = -4a\omega^2(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} + sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$$

Donc $|\vec{a}| = 4a\omega^2$

2) Dans le repère de frenet

$\vec{V} = |\vec{V}|\overrightarrow{u_t} = 2a\omega\overrightarrow{u_t}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{V^2}{\rho}\overrightarrow{u_n}$

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d(2a\omega)}{dt} = 0$$

On sait que $a^2 = a_t^2 + a_n^2$ alors $a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t}$ $=4a\omega^2$

3) Détermination du rayon de courbure

$$\rho = \frac{V^3}{|\vec{a}\wedge\vec{V}|}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_t} & \overrightarrow{u_n} & \vec{k} \\ 0 & 4a\omega^2 & 0 \\ 2a\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8a^2\omega^3\vec{k} \ , \quad |\vec{a}\wedge\vec{V}| = 8a^2\omega^3$$

Alors $\rho = \frac{V^3}{|\vec{a}\wedge\vec{V}|} = \frac{(2a\omega)^3}{8a^2\omega^3} = a$

C'est un cercle de rayon a

r=2acosθ *avec* *x=rcosθ* d'où $r^2=2ax$

Comme $r^2=x^2+y^2$ si on remplace l'expression de r dans cette dernière équation on aura $(x-a)^2+y^2=a^2$ c'est l'équation d'un cercle de rayon *a* et de centre (*a, 0*).

4) Dans le système des coordonnées cartésiennes :

x=r cosθ=2a cosθ cosθ

y=r sinθ=2 a cosθ sinθ

Alors $\overrightarrow{OM} = 2\ a\ cos\theta^2\overrightarrow{u_x} + 2\ a\ cos\theta\ sin\theta\overrightarrow{u_y}$

EXERCICE 9 : Un mouvement est représenté en coordonnées cylindriques par $r = a$, $\theta = 3b\,t^2$ *et* $z = 4ab\,t^2$, où a et b sont des constantes

1. Donner les dimensions de a et b.
2. Quelle est la trajectoire de ce mouvement ?
3. Calculez les vecteurs, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.

SOLUTION

1. r et a sont des longueurs, donc leurs dimension sont les mêmes : [r]= [a]= [L] et b possède la dimension de θ/t^2 donc l'inverse d'un temps au carré : [b]= $[\theta/t^2]=[T^{-2}]$.
2. De $r = a$, on en déduit que dans le plan *xoy*, la trajectoire est un cercle. Comme par ailleurs z= 4a $\theta/3$, on en déduit que la trajectoire est une hélice d'axe *Oz* de rayon a et de pas 8πa/3.
3.

De $\begin{cases} r = a \\ \dot{r} = a \\ \ddot{r} = a \end{cases}$; $\begin{cases} \theta = 3b\ t^2 \\ \dot{\theta} = 6bt \\ \ddot{\theta} = 6b \end{cases}$ et $\begin{cases} z = 4ab\ t^2 \\ \dot{z} = 8abt \\ \ddot{z} = 8ab \end{cases}$

Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{u_r} + 4ab\ t^2\overrightarrow{u_z}$

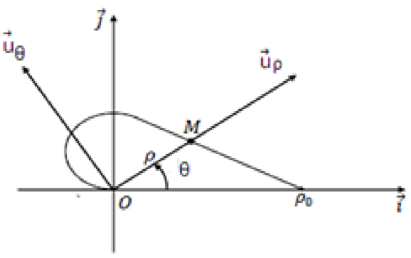
$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$ Alors $\vec{V} = 6bta\overrightarrow{u_\theta} + 8abt\overrightarrow{u_z}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = 6ba\overrightarrow{u_\theta} - 36ab^2t^2\overrightarrow{u_r} + 8ab\overrightarrow{u_z}$

EXERCICE 10

Soit R $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. Considérons un point matériel M qui décrit dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un mouvement suivant la trajectoire de la figure 1. L'équation de cette trajectoire est donnée en coordonnées polaires par : $\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta)$, Ou ρ_0 est une longueur donnée.

1. Déterminer le vecteur vitesse dans la base polaire ?
 Déduire son module ?
2. **Déterminer** le vecteur unitaire tangentiel dans la base de Frenet. Déduire que ce vecteur forme avec le vecteur unitaire polaire, un angle θ/2 ?



3. Déterminer l'accélération dans la base de Frenet (intrinsèque) ?
4. Déterminer le rayon de courbure ainsi que le vecteur unitaire normal ?
5. Déterminer la coordonnée curviligne s de M comptée à partir du point correspondant à θ=0 ?
6. En déduire la longueur totale de la trajectoire ?

SOLUTION

1. Soit R $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. Considérons un point matériel M qui décrit dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un mouvement suivant la trajectoire de la figure. L'équation de cette trajectoire est donnée en coordonnées polaires par : $\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta)$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta)\overrightarrow{u_\rho}$$

ρ_0 est une longueur donnée, $0 \le \varphi \le \pi$ et $\varphi > 0$.

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta))}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta)\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt}$$

$$\vec{V} = -\frac{1}{2}\rho_0\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta)\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

De même on a :

$\sin\theta = \sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\frac{\theta}{2})$ Et $1+\cos\theta = 2cos^2(\frac{\theta}{2})$

Donc $\vec{V} = \rho_0\dot{\theta}\ \cos(\frac{\theta}{2})[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\theta}]$

Le module du vecteur vitesse :

$$|\vec{V}| = \rho_0\dot{\theta}\ \cos(\frac{\theta}{2})$$

2. Le vecteur unitaire tangent à la trajectoire $\overrightarrow{u_t}$

On sait que : $\overrightarrow{u_t} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$

$$\overrightarrow{u_t} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

Déduire que ce vecteur forme avec le vecteur unitaire polaire, un angle θ/2 :

$$\overrightarrow{u_t}.\overrightarrow{u_\theta} = \left[-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\theta}\right]\overrightarrow{u_\theta} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donc l'angle entre le vecteur unitaire polaire et le vecteur unitaire tangent est de $\frac{\theta}{2}$.

3. Détermination de l'accélération dans la base de Frenet :

$$a_t\overrightarrow{u_t} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_t} = \frac{d}{dt}\left(\rho_0\dot{\theta}\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\overrightarrow{u_t} = [\ddot{\theta}\rho_0\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{\dot{\theta}^{\ 2}}{2}\rho_0\dot{\theta}\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)]\overrightarrow{u_t}$$

Et $a_n\overrightarrow{u_n} = V\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = [\rho_0\dot{\theta}\ \cos(\frac{\theta}{2})]\frac{d}{dt}(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\theta})$

$a_n\overrightarrow{u_n} = [\rho_0\dot{\theta}\ \cos(\frac{\theta}{2})][-\frac{\dot{\theta}}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho} - \dot{\theta}\ \sin(\frac{\theta}{2})\overrightarrow{u_\theta} - \frac{\dot{\theta}}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\theta}\ - \dot{\theta}\cos(\frac{\theta}{2})\overrightarrow{u_\rho}]$

Donc $a_n\overrightarrow{u_n} = [\frac{3}{2}\rho_0\dot{\theta}^{\,2}\cos(\frac{\theta}{2})][-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho} - \ \sin(\frac{\theta}{2})\overrightarrow{u_\theta}]$.

Et $a_n = \frac{3}{2}\rho_0\dot{\theta}^{\,2}\cos(\frac{\theta}{2})$

4. En déduire le rayon de courbure et le vecteur unitaire normal $\overrightarrow{u_n}$;

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\left(\rho_0\dot{\theta}\ \cos(\frac{\theta}{2})\right)^2}{\frac{3}{2}\rho_0\dot{\theta}^{\,2}\cos(\frac{\theta}{2})} = \frac{2}{3}\rho_0\cos(\frac{\theta}{2})$$

Et comme : $\overrightarrow{a_n} = a_n\overrightarrow{u_n}$ alors $\overrightarrow{u_n} = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u_\rho} - \ \sin(\frac{\theta}{2})\overrightarrow{u_\theta}$

5. Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne s de M comptée à partir du point correspondant à θ = 0. On donne S (θ = 0) = 0

$\frac{dS}{dt} = V$ Alors $S = \int V\,dt = \int \rho_0\dot{\theta}\ \cos(\frac{\theta}{2})\,dt = 2\rho_0\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c$

A θ = 0 ; nous avons S=0 donc $S = 2\rho_0\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

6. La longueur totale de la trajectoire correspond à $= \pi$, donc $l_{total} = S(\theta = \pi) = 2\rho_0$

EXERCICE 11

L'accélération d'un point matériel M est donnée par la relation suivante :

$\vec{\gamma} = e^t\vec{\imath} + coswt\vec{\jmath} + t^2\vec{k}$

A t=0s la position et la vitesse du mobile sont (1 ; (-1/ω^2) ;0) et (1 ;0 ;-1) respectivement. Donner les expressions des vecteurs ; vitesse et position du mobile à l'instant t.

SOLUTION

Pour trouver la vitesse il suffit d'intégrer l'accélération même chose pour la position c'est d'intégrer la vitesse :

$$\frac{dv_x}{dt} = e^t \quad \Rightarrow \quad v_x = \int e^t dt = e^t + C_x$$

A t=0 $v_x = 1$ donc $C_x = 0$ d'où $v_x = e^t$

$$\frac{dv_y}{dt} = cos\omega t \quad \Rightarrow \quad v_y = \int cos\omega t\ dt = \frac{1}{\omega}sin\omega t + C_y$$

A t=0 $v_y = 0$ donc $C_y = 0$ d'où $v_y = \frac{1}{\omega}sin\omega t$

$$\frac{dv_z}{dt} = t^2 \quad \Rightarrow \quad v_z = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C_z$$

A t=0 $v_z = -1$ donc $C_z = -1$ d'où $v_z = \frac{1}{3}t^3 - 1$

Donc La vitesse s'écrit

$$\vec{v} = e^t\vec{i} + \frac{1}{\omega}sin\omega t\vec{j} + \left(\frac{1}{3}t^3 - 1\right)\vec{k}$$

Pour trouver le vecteur position il suffit d'intégrer la vitesse.

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \Rightarrow \quad x = \int e^t dt = e^t + C'_x$$

A $t = 0,\ x = 1$ donc $C'_x = 0$ d'où $x = e^t$

$$\frac{dy}{dt} = sin\omega t \quad \Rightarrow \quad y = \int \frac{1}{\omega} sin\omega t\, dt = \frac{1}{\omega^2}cos\omega t + C'_y$$

A $t = 0,\ y = -\frac{1}{\omega^2}$ donc $C'_y = 0$ d'où $y = \frac{1}{\omega^2}cos\omega t$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}t^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad z = \int \left(\frac{1}{3}t^3 - 1\right)dt = \frac{1}{12}t^4 - t + C'_z$$

A $t = 0,\ z = 0$ donc $C'_z = 0$ d'où $z = \frac{1}{12}t^4 - t$

Donc $\overrightarrow{OM} = e^t\vec{i} - \frac{1}{\omega^2}cos\omega t\vec{j} + \left(\frac{1}{12}t^4 - t\right)\vec{k}$

II.3. Exercices supplémentaires sans solution

EXERCICE 12

Un point M décrit la courbe d'équations paramétriques :

$$x = t,\ \ z = t^2, y = t^3$$

a) Déterminer les vecteurs unitaires du repère de Frenet à t=1.

b) Former les équations de la tangente, de la normale et de la binormale en un point M de la trajectoire.

EXERCICE 13

Un joueur de base balle frappe une balle qui atteint une vitesse de 14m/s et fait un angle α=30° avec l'horizontale. Un autre joueur distant de x=30.5m du premier et dans le même plan de la trajectoire, commence à courir quand le premier frappe la balle.

1- Calculer la vitesse maximale pour que le deuxième joueur puisse attraper la balle, quand elle est à une hauteur de 2.44m, sachant que cette balle était à 0.6m au moment de sa frappe.

2- Quelle est la distance que doit parcourir.

EXERCICE 14

Le mouvement d'une particule M se déplaçant dans le plan (xoy) est décrit par les équations suivantes : $x(t) = t\ cost$ et $y(t) = t\ sint$

1- Déterminer les composantes du vecteur vitesse et son module.

2- Déterminer les composantes du vecteur accélération et son module.

3- Déterminer les expressions des composantes intrinsèques de l'accélération en fonction du temps t

4- Déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

EXERCICE 15

Soient $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère cartésien muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $\Re'(O,\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi,\vec{k})$ le repère cylindrique muni de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi,\vec{k})$. Considérons un point matériel M de coordonnées cartésiennes (x,y, z) et cylindriques (ρ,φ,z).

1) Donner les expressions du vecteur position OM et du déplacement élémentaire dOM dans les deux repères $\Re$ et $\Re'$. En déduire la surface et le volume d'un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon R.

2) Déterminer les expressions de x, y et z en fonction de ρ, φ et z.

3) Déterminer les expressions de ρ, φ et z en fonction de x, y et z.

4) Déterminer les expressions de, y et z en fonction de ρ, φ et z et leurs dérivées par rapport au temps , φ et z .

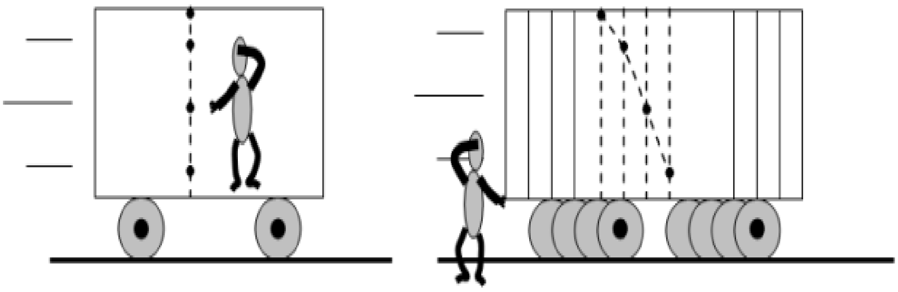
5) Déterminer les expressions des vecteurs de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ en fonction de celles de la base (O, $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi,\vec{k}$).

Chapitre III

Mouvement relatif

III.1 Notion de référentiel

L'étude du mouvement d'un point matériel implique nécessairement la présence d'un observateur qui analyse ce mouvement. Ainsi dans un train qui se déplace en ligne droite à vitesse constante un passager qui lâche verticalement une bille conclut celle-ci a un mouvement rectiligne. Une autre personne sur le quai observant la même scène lorsque le train passe devant elle conclut que le mouvement n'est pas rectiligne, pourtant il s'agit bien de la même bille.
Le mouvement du point matériel est donc relatif au référentiel d'étude.



Relativité du mouvement : pour l'observateur dans le wagon le mouvement de la balle est rectiligne, pour l'observateur sur le quai la trajectoire de la balle est curviligne.

En physique Newtonienne, on distingue :

- **Repère absolu** : mouvement d'un corps par rapport a un référentiel supposé fixe appelé référentiel absolu.
- **Repère relatif** : peut être animé de deux mouvement simples par rapport au repère fixe.

Soit un référentiel absolu dont le repère est $R\ \ (O,\vec{i},\ \vec{j},\vec{k})$ et $R'(O',\vec{i'},\ \vec{j'},\vec{k'})$ un référentiel mobile par rapport à R_0.
soit M un point matériel dans le repère $R(O,\vec{i'},\ \vec{j'},\ \vec{k'})$, on appellera*:*

- Mouvement relatif, le mouvement de M dans le repère $R'(O',\vec{i'},\ \vec{j'},\ \vec{k'})$.
- Mouvement absolu, le mouvement de M dans le repère fixe $R\ \ \left(O,\vec{i},\ \vec{j}\ ,\vec{k}\right)$.
- Mouvement d'entrainement, le mouvement de R' par rapport à R

III.2. Composition des vitesses

On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OO'}+x\vec{i'}+y\vec{j'}+z\vec{k'}$

le vecteur vitesse est donné par

$\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$, alors

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\overrightarrow{v_a}} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}}_{\overrightarrow{v_e}} + \underbrace{\frac{dx}{dt}\overrightarrow{i'} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j'} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k'}}_{\overrightarrow{v_r}}$$

soit $$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$$

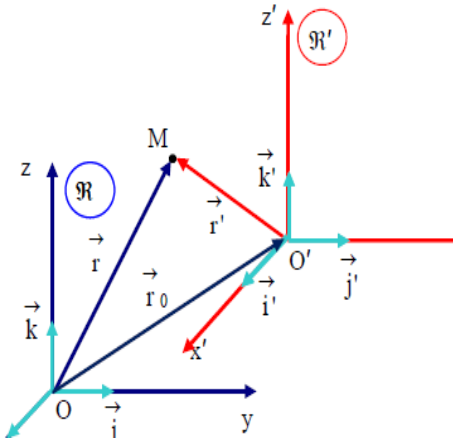
ou $\overrightarrow{v_a}$: vitesse absolu est La vitesse de M dans le référentiel R

$\overrightarrow{v_e}$: vitesse d'entrainement est définie comme étant la vitesse que le point M acquiert dans le repère absolu

$\overrightarrow{v_r}$: vitesse relative est la vitesse de M dans le référentiel R'

lorsque le mouvement du référentiel R' est une translation rectiligne par rapport au référentiel R alors

$$\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{0}$$



donc si R est en translation par rapport à R_0 on aura

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_a} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}(M)_{/R} \\ \overrightarrow{v_e} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{v}(R)_{/R} \\ \overrightarrow{v_r} = \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{v}(M)_{/R'} \end{cases}$$

III. 3. Composition des accélérations

L 'accélération est donnée par:

$$\overrightarrow{a_M} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} + x\overrightarrow{i'} + y\overrightarrow{j'} + z\overrightarrow{k'}\right)$$

On obtient

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_M} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} + y\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} + z\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\left(\dot{x}\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + \dot{y}\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + \dot{z}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{\ddot{x}\overrightarrow{i'} + \ddot{y}\overrightarrow{j'} + \ddot{z}\overrightarrow{k'}}_{\overrightarrow{a_r}}$$

Soit $$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$$

Ou $\overrightarrow{a_a}$: accélération absolu

$\overrightarrow{a_e}$: Accélération d'entrainement

$\overrightarrow{a_r}$: Accélération relative

$\overrightarrow{a_c}$: Accélération de Coriolis ou complémentaire qui est due à une force inertielle agissant perpendiculairement à la direction du mouvement d'un corps en déplacement dans un référentiel lui-même en rotation uniforme.

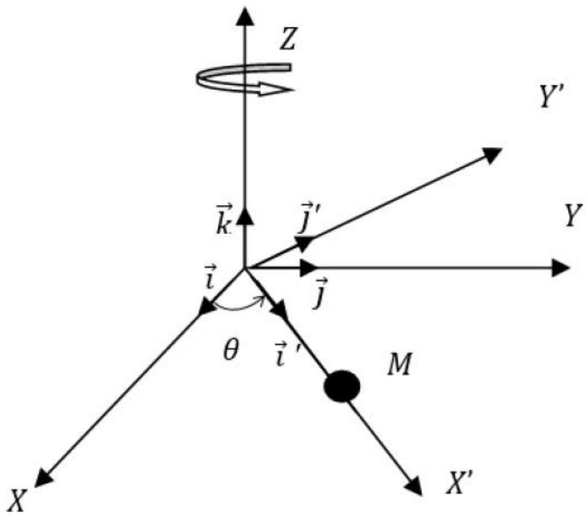
Les expressions des diverses composantes peuvent paraître effrayantes, mais dans la plupart des cas concrets, ces expressions se simplifient fortement

Le mouvement d'entraînement est une translation sans rotation de (R)

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_M} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}$$

Soit $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r}$

Si (R') est en rotation par rapport à (R), on définit un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\cdot\vec{k}$ (Ω est la vitesse angulaire), les relations deviennent ;



Ou

$$\overrightarrow{a_e} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}),$$

$$\overrightarrow{a_r} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM'}}{dt^2}\right|_{R'}$$

Et $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$

Donc

$$\overrightarrow{a_a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM'}}{dt^2}\right|_{R'}$$

III.4. Exercices résolus

EXERCICE 1

Une pirogue traverse une rivière d'une rive à l'autre à la vitesse$V_1 = 6km/h$. La vitesse du courant qui arrive perpendiculairement à la pirogue est $V_2 = 3km/h$ (ces vitesses sont mesurées par rapport au référentiel terrestre c'est-à-dire par un observateur placé sur une des rives). Dans quelle direction est dirigée la pirogue. Quel est l'angle de déviation de la pirogue

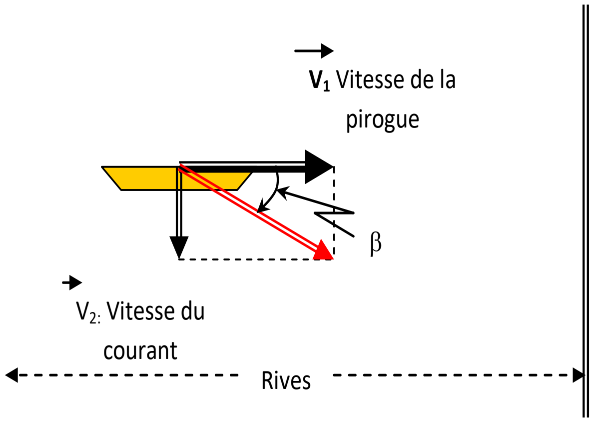
SOLUTION

$\vec{v_2} = \vec{v_e}$

$\vec{v_1} = \vec{v_r}$

La pirogue est déviée d'un angle β de sa direction initiale tel que

$$\tan\beta = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 26.56°$$



EXERCICE2

Un avion se dirige nord-ouest avec une vites

la terre. Si le vent souffle vers l'ouest avec une vitesse de 50km/h par rapport au même observateur. Trouver la vitesse de l'avion ?

SOLUTION

$\vec{v_a}$: vitesse de l'avion par rapport à un observateur lié à la terre

$v_a = 125km/h$

$\vec{v_e}$: vitesse d'entrainement (vitesse du vent), $v_e = 50km/h$

$$\vec{v_e} = \begin{pmatrix} -v_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v_a} = \begin{pmatrix} -v_a\ sin45 \\ v_a\ cos45 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r} \Rightarrow \vec{v_r} = \vec{v_a} - \vec{v_e} = -v_a\ sin45\vec{i} + v_a\ cos45\vec{j} - (-V_e\vec{i})$$

$$= -125\ sin45\vec{i} + 125\ cos45\vec{j} + 50\vec{i}$$

$$\vec{v_r} = -38.388\vec{i} + 88.388\vec{j}$$

$$|\vec{v_r}| = 96.36km/h$$

EXERCICE 3 :

Le vecteur position d'un point M est décrit par $\overrightarrow{OM} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + (2t+3)\vec{k}$ dans le repère fixe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.et par $\overrightarrow{OM'} = t\vec{i'} + t^2\vec{j'} + (4t+3)\vec{k'}$ ' dans le repère fixe $R'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$, on considère que R et R' sont parallèles.

1) Déterminer la vitesse absolue et la vitesse relative de *M*. en déduire la vitesse d'entraînement et la nature du mouvement de *R'* par rapport à *R*.

2) Déterminer l'accélération absolue, l'accélération relative, conclure

SOLUTION

1) Les vecteurs position dans le repère fixe et mobile sont

$\overrightarrow{OM} = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + (2t+3)\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM'} = t\vec{\imath'} + t^2\vec{\jmath'} + (4t+3)\vec{k}'$

alors les vitesses absolue et relative sont données par:

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt}/R' = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{\imath'} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k'} = \vec{\imath}' + 2t\vec{\jmath}' + 4\vec{k}'$$

En utilisant la relation de décomposition des vitesses

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_a} - \overrightarrow{v_r}$$

Puisque *R* et *R'* sont parallèles $\Rightarrow \begin{cases} \vec{\imath} = \vec{\imath}' \\ \vec{\jmath} = \vec{\jmath}' \\ \vec{k} = \vec{k}' \end{cases}$

Alors $\overrightarrow{v_e} = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath} + 2\vec{k} - \vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} - 4\vec{k} = -2\vec{k}$

$|\overrightarrow{v_e}| = 2$=cte *R'* est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à *R ?*

2) L'expression des accélérations :

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{\imath + 2t\jmath + 2k})}{dt} = 2\vec{\jmath}$$

De la même façon on trouve

$\overrightarrow{a_r} = 2\vec{\jmath}$

Donc $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r}$ l'accélération est invariante.

EXERCICEC4 :

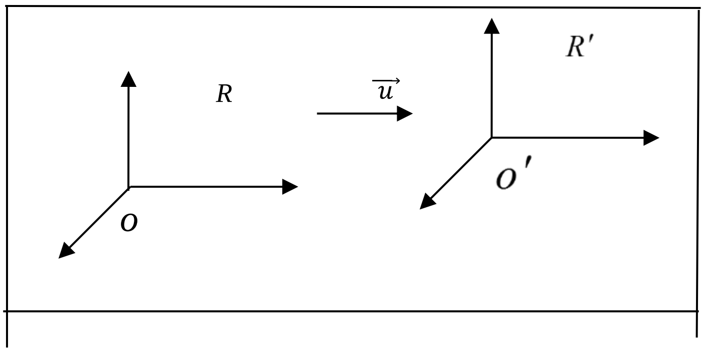
Dans un repère $R'(O, \vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$, les coordonnées cartésiennes d'un objet matériel *M* sont données en fonction du temps ; $x' = t^2 + 3t$; $y' = t$; $z' = -t^3$.

Le repère R' est en mouvement de translation rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\vec{u} = (-3,\ 0, +5)$ par rapport à un repère *R* (absolu).

1. Trouver l'expression du vecteur vitesse de *M* par rapport au repère *R*

2. En déduire les coordonnées de M dans le repère *R*, sachant qu'à l'instant $t = 0$, dans le repère *R*, *M* est au point$(0,\ 1, 0)$.

3. Calculer l'accélération relative et absolue de *M*.



SOLUTION

Puisque le repère R' est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère R on a $\begin{cases} \vec{i} = \vec{i}' \\ \vec{j} = \vec{j}' \\ \vec{k} = \vec{k}' \end{cases}$

1) le vecteur vitesse de *M* par rapport au repère *R* (absolu).

$$\overrightarrow{OM'} = (t^2 + 3t)\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k} \Longrightarrow \overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt}/R' = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_r} = (2t + 3)\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \vec{u} = -3\vec{i} + 5\vec{k}$$

Avec la relation de composition des vitesses ;

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r} = -3\vec{i} + 5\vec{k} + (2t + 3)\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k} = 2t\vec{i} + \vec{j} + (-3t^2 + 5)\vec{k}$$

2) $\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_{ax}\vec{i} + v_{ay}\vec{j} + v_{az}\vec{k}$

Par identification

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_{ax} = 2t \\ \frac{dy}{dt} = v_{ay} = 1 \\ \frac{dz}{dt} = v_{az} = -3t^2 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = 2tdt \\ dy = 1dt \\ dz = (-3t^2 + 5)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int 2tdt \\ y = \int 1dt \\ z = \int(-3t^2 + 5)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 + C1 \\ y = t + C2 \\ z = -t^3 + 5t + C3 \end{cases}$$

A l'instant $t = 0$, *M* est au point$(0,\ 1, 0)$ $\Rightarrow \begin{cases} x(0) = C1 = 0 \ \Rightarrow C1 = 0 \\ y(0) = C2 = 1 \ \Rightarrow C2 = 1 \\ z(0) = C3 = 0 \ \Rightarrow C3 = 0 \end{cases}$

Les coordonnées de *M* dans le repère *R* sont:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \\ z = -t^3 + 5t \end{cases}$$

3) Expression de l'accélération relative et absolue de *M*:

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + (-3t^2 + 5)\overrightarrow{k}\right) = 2\vec{\imath} - 6t\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left((2t + 3)\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3t^2\vec{k}\right) = 2\vec{\imath} - 6t\vec{k}$$

la vitesse ainsi que l'accélération d'entrainement sont nulles, c'est un mouvement relatif rectiligne uniforme.

EXERCICE 5

Dans le plan *xOy* , une droite *Ox'* tourne autour de *Oz* avec une vitesse angulaire constante Ω . Un mobile *M* se déplace sur la droite *Ox'* suivant la loi *: r = a sin θ* avec *θ=ωt* et *a* est une constante.

1. Déterminer à l'instant t en fonction de a et w, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de *M* par leurs projections dans le repère mobile *x'Oy'*. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

2. Déterminer à l'instant t en fonction de *a* et *ω*, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de *M* par leurs projections dans le repère mobile *x'Oy'*. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

SOLUTION

1- $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt} = \frac{d(a\sin \omega t)}{dt}\overrightarrow{\imath'} = a\omega cos\ \omega t\vec{\imath}'$

$\overrightarrow{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'} = \omega\overrightarrow{k'} \wedge \overrightarrow{OM'} = a\omega sin\ \omega t\vec{\jmath}'$

Donc $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = a\omega cos\ \omega t\vec{\imath}' + a\omega sin\ \omega t\vec{\jmath}'$

On écrit de la façon suivante les vecteurs unitaires

$\vec{\imath}' = cos\ \omega t\vec{\imath} + sin\ \omega t\vec{\jmath}$ et $\vec{\jmath}' = -sin\ \omega t\vec{\imath} + cos\ \omega t\vec{\jmath}$

Si on remplace ces expressions dans la vitesse absolue :

$\overrightarrow{v_a} = a\omega cos\ \omega t(cos\ \omega t\vec{\imath} + sin\ \omega t\vec{\jmath}) + a\omega sin\ \omega t(-sin\ \omega t\vec{\imath} + cos\ \omega t\vec{\jmath})$

$\overrightarrow{v_a} = a\omega[(\cos\omega t)^2 - (\sin\omega t)^2]\vec{\imath} + 2a\omega cos\ \omega t sin\ \omega t\vec{\jmath}$

2- $\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d(a\omega cos\ \omega t)}{dt}\overrightarrow{\imath'} = -a\omega^2 sin\omega t\vec{\imath}'$

$\overrightarrow{a_e} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'}) = \omega\overrightarrow{k'} \wedge\ a\omega sin\ \omega t\vec{j}' = -a\omega^2 sin\omega t\vec{i}'$

$\overrightarrow{a_c} = 2(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r}) = 2\omega\overrightarrow{k'} \wedge\ a\omega sin\ \omega t\vec{j}' = 2a\omega^2 cos\omega t\vec{j}'$

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} = -2a\omega^2 sin\omega t\vec{i}' + 2a\omega^2 cos\omega t\vec{j}'$

EXERCICE 6

Un repère *R'*(*OX'Y'*) en rotation par rapport à un repère *R*(*OXY*) fixe, suivant l'axe (*OZ*), avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ constante. On considère l'angle θ entre l'axe (*OX*) et (*OX'*) tel que *θ=ωt*. Soit un mobile *M* suivant l'axe (*OX'*) et obéissant à la relation suivante

$\overrightarrow{OM} = ae^{-t}\overrightarrow{\iota'}$ ou a est une constante

1- Déterminer les vitesses relative, d'entrainement et absolue.

2- Déterminer les accélérations relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue.

SOLUTION

1- L'expression de la vitesse relative, d'entrainement et absolue

$\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt} = \frac{d(ae^{-t})}{dt}\vec{\iota}' = -ae^{-t}\overrightarrow{\iota'}$

$\overrightarrow{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'} = \omega\overrightarrow{k'} \wedge ae^{-t}\overrightarrow{\iota'} = a\omega e^{-t}\vec{j}'$

Donc $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e} = -ae^{-t}\overrightarrow{\iota'} + a\omega e^{-t}\vec{j}'$

2- L'expression de l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis ainsi que absolue.

$\overrightarrow{a_r} = \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d(-ae^{-t})}{dt}\vec{\iota}' = ae^{-t}\overrightarrow{\iota'}$

$\overrightarrow{a_e} = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'}) = \omega\overrightarrow{k'} \wedge\ \omega ae^{-t}\ \vec{j}' = -a\omega^2 e^{-t}\ \vec{\iota}'$

$\overrightarrow{a_c} = 2(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r}) = 2\omega\overrightarrow{k'} \wedge\ -ae^{-t}\overrightarrow{\iota'} = -2a\omega e^{-t}\ \vec{j}'$

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} = -ae^{-t}\overrightarrow{\iota'} - a\omega^2 e^{-t}\ \vec{\iota}' - 2a\omega^2 e^{-t}\ \vec{j}'$

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} = ae^{-t}\ (1 - \ \omega^2)\ \overrightarrow{\iota'} - 2a\omega e^{-t}\ \vec{j}'$

III.5. Exercices supplémentaires sans solution

EXERCICE7.

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel (R) muni du repère

$R\ (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$sont données en fonction du temps par :

$x = t^2 - 4t + 1, y = -2t^4, z = 3t^2$

Dans un deuxième référentiel (R') muni du repère $R'\ (O, \vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$, avec $\vec{\imath}=\vec{\imath}'$, $\vec{\jmath}=\vec{\jmath}'$, $\vec{k}=\vec{k}'$, elles ont pour expression :

$x' = t^2 + t + 2, y' = -2t^4 + 5, z' = 3t^2 - 7$

Exprimer la vitesse v de M dans (R) en fonction de sa vitesse v' dans (R'). Procéder de même pour les accélérations. Définir le mouvement d'entraînement de (R') par rapport à (R).

EXERCICE 8 :

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération g .

1. Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse u et passant à la verticale de chute au moment du lâcher ?

2. Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale du point de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération (Représenter dans chaque cas la trajectoire demandée.)

EXERCICE 9 :

On considère les référentiels $R(oxy)$ et $R'(ox'y')$ de base respectivement

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$et $(O, \vec{\imath}', \vec{\jmath}')$. R' tourne par rapport R autour de l'axe oz perpendiculairement au plan (oxy) avec une vitesse angulaire ω constante. Un point matériel M se déplace sur l'axe ox' suivant la loi $r = 2a(\cos \omega t)$, a étant une constante.

1. Trouver l'expression de la vitesse relative dans le référentiel mobile R' et la vitesse d'entrainement de M ainsi que leurs normes.
2. Calculer la vitesse absolue de M de deux façons .
3. Calculer l'accélération relative, d'entrainement et Coriolis de M.
4. En déduire le module et la direction de l'accélération absolue de M.

CHAPITRE IV

Dynamique du point matériel

Introduction

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent. Ces causes sont les interactions entre systèmes matériels et sont représentées par des forces.

IV.1. Lois fondamentale de la dynamique

IV.1.1. 1^{ére}Loi de Newton, « Principe de l'inertie » :

Dans un référentiel (R) galiléen, tout point matériel A mécaniquement isolé (ou pseudo isolé), est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$$

Ce principe conduit à la loi de conservation de la quantité de mouvement totale d'un système isolé ou pseudo isolé. La propriété ci-dessus constitue une définition des repères galiléens et le principe d'inertie postule leur existence. Un repère galiléen est un repère ou le principe d'inertie est applicables, on suppose que le repère est galiléen si en translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic (héliocentrique).Galiléen

IV.1.2. 2emeLoi de Newton

Considérons un système matériel S , de centre d'inertie G , de masse m , se déplaçant dans un référentiel Galiléen $R(O, x, y, z, t)$. Si ce système n'est pas mécaniquement isolé, c'est à dire s'il subit une action non compensée, le principe d'inertie nous traduit le fait que sa quantité de mouvement ne peut pas être constante dans le temps

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{f_{ext}}$$

La conservation de la quantité de mouvement peut intervenir lors d'une collision entre deux ou plusieurs objets ou particules. Lorsqu'il y a conservation, l'addition vectorielle des quantités de mouvement de chaque corps faisant partie du milieu conserve la même valeur avant et après la collision. En ayant recours à ce principe, il n'est pas nécessaire de connaitre les forces qui agissent lors de la collision.

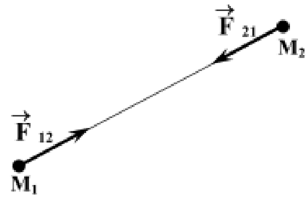
Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors à l'aide du vecteur accélération sous la forme :

$$\overrightarrow{f_{ext}} = m\vec{a}$$

IV.1.3. 3éme Loi de Newton : Principe des actions réciproques

Soit deux point matériel M_1 et M_2 en interaction et ne subissent que des forces mutuelles

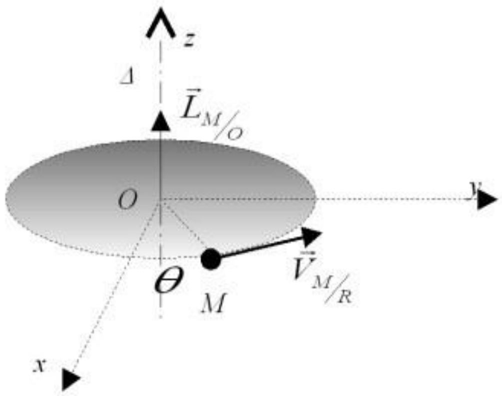
Soit $\overrightarrow{f_{1/2}}$ la force exercée sur M_2 de la part de M_1 et la force $\overrightarrow{f_{2/1}}$ exercée par M_2 sur M_1 . Le principe des actions réciproques, nommé aussi principe de l'action ($\overrightarrow{f_{1/2}}$) et de la réaction ($\overrightarrow{f_{2/1}}$), énonce que ces deux forces $\overrightarrow{f_{1/2}}$ et $\overrightarrow{f_{2/1}}$, sont opposées et égales en modules, donc:



$$\overrightarrow{f_{1/2}} = -\overrightarrow{f_{2/1}}$$

IV.1.4. Théorème du moment cinétique

Considérons un point matériel *M* en rotation autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel Galiléen *R(O, x, y, z)* .



On appelle moment cinétique du point *M* par rapport à un point fixe *O* de l'axe, le moment de sa quantité de mouvement que l'on note :

$$\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{M/R}}$$

Le moment cinétique est donc un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et à la vitesse du point. Il est donc perpendiculaire à la trajectoire du point M .

Le théorème du moment cinétique est un théorème qui définit la valeur de la dérivée du moment cinétique. Il en résulte que la dérivée du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au point *O*

$$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

IV.1.5.Classification des forces

IV.1.5.1. Forces localisées, forces réparties

Une force localisée s'applique en un point d'un objet ou sur un objet ponctuel. Par exemple un fil tire un objet avec une force T localisée au point d'accrochage par contre la force répartie s'applique sur un ensemble de points répartis sur une surface ou dans un volume de l'objet, comme les forces de frottements qui sont reparties sur toute la surface de contact des deux corps.

IV.1.5.2. Forces à distance, forces de contact

IV.1.5.2.1. Forces à distance

Le corps qui exerce la force n'est pas en contact avec celui sur lequel il agit. Cette force s'exerce entre 2 objets pouvant être séparés par de l'air, de l'eau, du vide ou autre chose. Il y a 3 sortes de forces à distance :

- **les forces de gravitation :** c'est l'action d'une masse sur une autre**.** Ce sont des forces attractives.
- **les forces électriques :** Elles s'exercent entre deux corps portant des charges électriques. Elles peuvent être aussi bien attractives que répulsives.
- **les forces magnétiques :** Elles s'exercent entre des aimants ou entre des ces derniers et certains matériaux (en particulier le fer).Elles aussi peuvent être attractives ou répulsives.

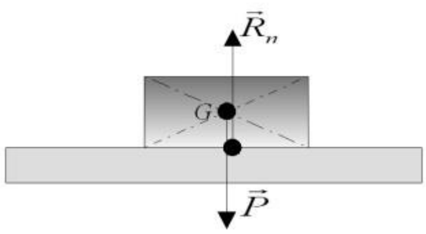
V.1.5.2.2.Forces de contact

Il faut obligatoirement qu'il y est contact entre les deux objets pour que naisse une force de contact. Par exemple la force de traction d'un fil, mesurée par la tension du fil, s'applique au point de contact objet-fil.

- **Contact solide-solide**

  - ✓ **Sans frottements :**

La force que subit un objet, posé sur un support horizontal, s'appelle réaction du support, $\overrightarrow{R_n}$ représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact. L'objet étant en équilibre

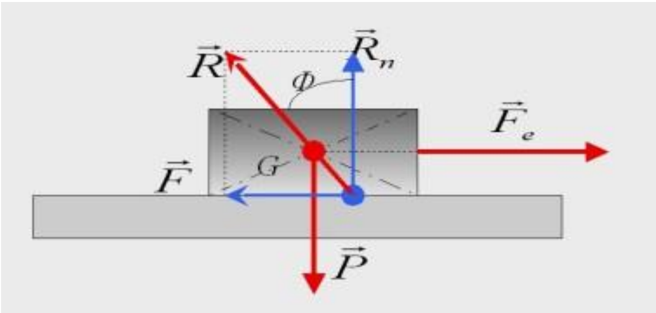


$\vec{P} + \vec{R}_n = \vec{0} \Rightarrow P = Rn$

La force de frottement solide dépend de l'action subie par le solide. Si aucune action extérieure ne tend à déplacer un solide se trouvant sur un plan horizontal, celui-ci est au repos et la force de frottement n'existe pas. Comme lorsque nous avons glissement sans frottement (F=0)

- ✓ **Force de frottement sur un plan solide** : Elle ne prend naissance que si le solide subit une action. Son intensité varie alors linéairement en fonction de cette action jusqu'à devenir constante par l'intermédiaire du coefficient μ_d dès que le solide se met en mouvement.

Lorsqu" il y a glissement avec frottement on a F=$\mu_d R_n$ ou μ_d désigne le coefficient de frottement dynamique.



Lorsque le solide se déplace sous l 'action d'une force extérieur $\overrightarrow{F_e}$, l'intensité F de la force de frottement est proportionnelle à celle de la réaction R_n normale au support.

- ✓ **Le frottement visqueux**

Quand un corps solide se déplace dans un fluide (gaz ou liquide), une force de frottement apparait. Elle se calcule par la formule :

$$\overrightarrow{F_f} = -K\eta\vec{v}$$

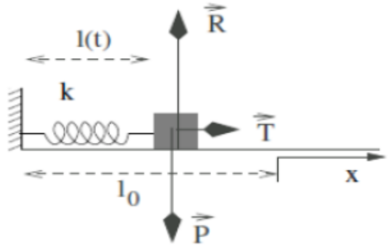
K est un coefficient qui dépend du corps solide en mouvement dans le fluide. Le frottement interne au fluide s'appelle la viscosité, et c'est pour cette raison que η s'appelle le coefficient de viscosité

- ✓ **Force élastique**

Lorsque l'on allonge un ressort, apparait une force de rappel

$$T = -k(l - l_0)$$

avec l_0 longueur a vide du ressort, l la longueur du ressort et k la constante de raideur



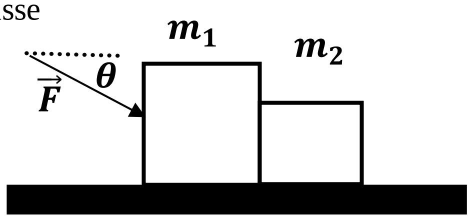
IV.2.Exercices résolus

EXERCICE 1: Soit deux masse m_1 et m_2 avec $m_1 > m_2$ sont placées en contact (sans frottement) sur une table horizontale parfaitement lisse. Une force $\vec{F}$ de module constant est appliquée sur la masse m_1.

1-Représenter les différentes forces qui agissent sur chaque masse

2- Ecrire la relation fondamental de la dynamique pour chaque masse. En déduire l'accélération a du système.

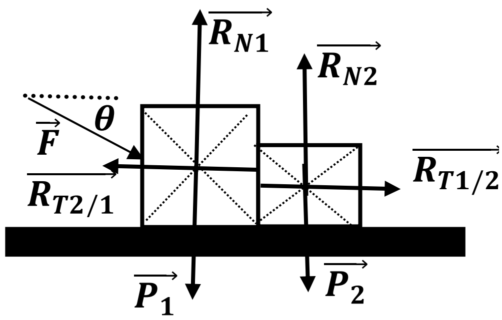
3- Déterminer la force de contact entre les deux masses



SOLUTION :

1- Le calcul de m_2

En appliquant le principe fondamental de la dynamique pour chaque système m_1 et m_2



Masse m_1: $\overrightarrow{P_1} + \vec{F} + \overrightarrow{R_{T2/1}} + \overrightarrow{R_{N1}} = (m_1)\overrightarrow{a_1}$

Masse m_2: $\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{R_{T1/2}} + \overrightarrow{R_{N2}} = (m_2)\overrightarrow{a_2}$

$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} = \vec{a}$

et $\overrightarrow{R_{T1/2}} + \overrightarrow{R_{T2/1}} = \vec{0}$ (principe d'action et de réaction)

Le système $(m_1 + m_2)$

$$\Sigma\vec{F} = (m_1 + m_2)a$$

$$\underbrace{\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{R_{N1}}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{R_{N2}} + \overrightarrow{P_2}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{R_{T1/2}} + \overrightarrow{R_{N2}}}_{\vec{0}} + \vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$\Rightarrow \vec{F} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

puisque le mouvement se fait suivant *l'*axe des abscisses , donc

$$F\cos\theta = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F\cos\theta}{(m_1+m_2)}$$

3-La force de contact entre les deux masses

$\overrightarrow{R_{T1/2}} = (m_2)\vec{a} \Rightarrow R_{T1/2} = -R_{T2/1} = \frac{m_2 F\cos\theta}{(m_1+m_2)}$

EXERCICE 2

Un fil inextensible de masse négligeable passe dans la gorge d'une poulie de masse négligeable. On accroche aux extrémités du fil deux masses m_A et m_B assimilées à des points matériels, glissant sur des plans inclinés d'angles α et β (voir figure). Les coefficients de frottements statique μs et dynamique μd sont les mêmes sur les deux plans.

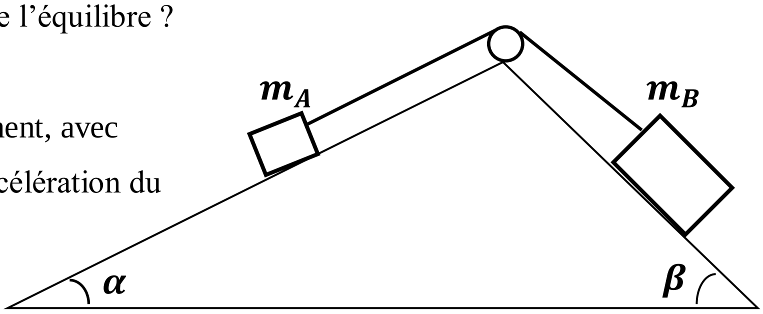
On donne : m_B = 1 kg, $m_A < m_B$, α = 30°, β = 45°, μs = 0.5, μd = 0.3 et g = 10 m/s^2 .

1- Représenter qualitativement les forces agissant sur chacune des masses.

2- Quelle est la valeur de m_A pour rompre l'équilibre ?

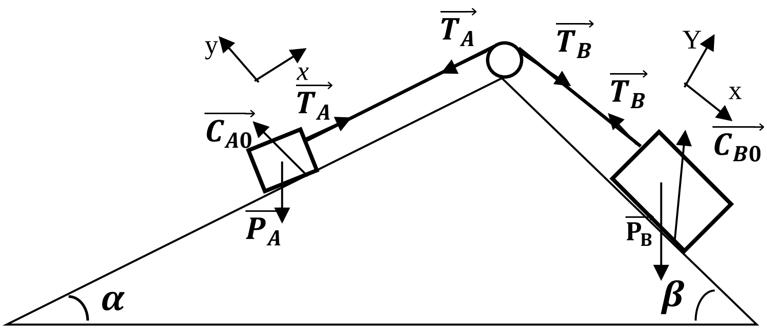
3- Donner la valeur de la tension du fil.

4- Le système est maintenant en mouvement, avec m_A = 0.3 kg, trouver l'expression de l'accélération du système, puis sa valeur numérique.



SOLUTION:

Données : $m_A < m_B$, $m_B = 1kg$, $\alpha = \pi\ 6$, $\beta = \pi\ 4$, $\mu s = 0.5$, $\mu d = 0.3$, $g = 10m/s^2$. 1. Comme $m_A < m_B$ et $\alpha < \beta$, c'est m_A qui doit monter. Alors m_B doit descendre. Les forces de contact s'opposent au sens du mouvement:



2- Masses négligeables du fil et de la poulie $\|\overrightarrow{T_A}\| = \|\overrightarrow{T_B}\| = \|\overrightarrow{T}\|$. Les forces responsables du mouvement sont $m_A g \sin\alpha$ et $m_B g \sin\beta$. Par conséquent, le mouvement tend à avoir lieu vers la droite car on a les mêmes coefficients de frottement avec $m_A < m_B$ et $\alpha < \beta$. Les forces $\overrightarrow{C_A}$ et $\overrightarrow{C_A}$ sont donc inclinées vers la gauche car elles s'opposent auglissement.

On suppose que les deux masses sont à la limite de l'équilibre ($\overrightarrow{C_A} = \overrightarrow{C_{AO}}$ et $\overrightarrow{C_B} = \overrightarrow{C_{Bo}}$) :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'équilibre

Sur le système m_A : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ Sur le système m_B : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{C_{AO}} + \overrightarrow{T_A} = \vec{0}$

en passant aux projection sur les deux axes *ox* et *oy*

Sur le système m_A

ox/ $-m_A g sin\alpha - C_{AOx} + T_A = 0$....(1)

oy/ $-m_A g cos\alpha - C_{AOy} = 0$....(2)

$$\mu_S = \frac{C_{AOx}}{C_{AOy}}$$

$C_{AOx} = \mu_S m_A g cos\alpha$

Sur le système m_B

ox/ $m_B g sin\beta - C_{BOx} - T_B = 0$....(3)

oy/ $-m_B g cos\beta + C_{BOy} = 0$ ....(4)

$$\mu_S = \frac{C_{BOx}}{C_{BOy}}$$

$C_{BOx} = \mu_S m_B g cos\beta$

Un fil inextensible de masse négligeable donc $T_A = T_B$

La somme de(1)+(3), donne

$-m_A\, gsin\alpha - C_{AOx} + m_B\, gsin\beta - C_{BOx} = 0$

Donc

$-m_A\, gsin\alpha - \mu_S m_A g cos\alpha + m_B\, gsin\beta - \mu_S m_B g cos\beta = 0$

$$\Rightarrow \quad m_A = \frac{m_B(sin\beta - \mu_S cos\beta)}{sin\alpha + \mu_S cos\alpha} = 0.38kg$$

3- pour$m_A = 0.38kg$, la valeur de la tension du fil est obtenue avec la relation (1)

$$T_A = m_A\, gsin\alpha + \mu_S m_A\, gcos\alpha = m_B g(sin\beta - \mu_S cos\beta) = 3.54N$$

A.N: $T_A = m_B g(sin\beta - \mu_S cos\beta) = 3.54N$

4- On a un glissement car m_A = 0.3kg < 0.38kg sans changement des directions des forces. Fil inextensible $\Rightarrow a_A = a_B = a$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique.

Sur le système m_A : $\Sigma\vec{F} = m_A\overrightarrow{a_A}$

$\overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{C_{BO}} + \overrightarrow{T_B} = m_B\overrightarrow{a_A}$

Sur le système m_B : $\Sigma\vec{F} = m_B\overrightarrow{a_A}$

$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{C_{AO}} + \overrightarrow{T_A} = m_A\overrightarrow{a_A}$

En passant aux projection sur les deux axes *ox* et*oy*

- Sur le système m_A

ox/ $-m_A\, gsin\alpha - C_{AOx} + T_A = m_A a_A$...(1)

oy/ $-m_A g cos\alpha - C_{AOy} = 0$....(2)

- Sur le système m_B

ox/ $m_B\, gsin\beta - C_{BOx} - T_B = m_B a_A$....(3)

oy/ $-m_B g cos\beta + C_{BOy} = 0$ ....(4)

$$\mu_d = \frac{C_{AOx}}{C_{AOy}} \mu_d = \frac{C_{BOx}}{C_{BOy}}$$

$$C_{AOx} = \mu_d m_A g cos\alpha C_{BOx} = \mu_d m_B g cos\beta$$

La somme de(1)+(3), donne

$-m_A\, gsin\alpha - C_{AOx} + m_B\, gsin\beta - C_{BOx} = (m_A + m_B)a_A$ donc

$$-m_A\, gsin\alpha - \mu_S m_A\, gcos\alpha + m_B\, gsin\beta - \mu_S m_B\, gcos\beta = (m_A + m_B)a_A$$

Donc $a_A = \frac{-m_A g sin\alpha - \mu_S m_A g cos\alpha + m_B g sin\beta - \mu_S m_B g cos\beta}{(m_A + m_B)} = 2m/s^2$

EXERCICE 3 : Deux blocs A et B de même masse M, sont reliés par un ressort parfait de constante de raideur K. L'ensemble est disposé sur un plan horizontal (voir figure). Les frottements entre le plan et les masses sont caractérisés par µs et µg.

On donne : M = 1kg ; µs = 0,5 ; µg = 0,4 ; K = 200N/m et g = 10m/s². Le ressort n'étant ni comprimé ni tendu, on applique une force F ρ sur le corps A.

1- Quelle force F_0 minimum faut-il appliquer au bloc *A* pour qu'il se mette en mouvement ?

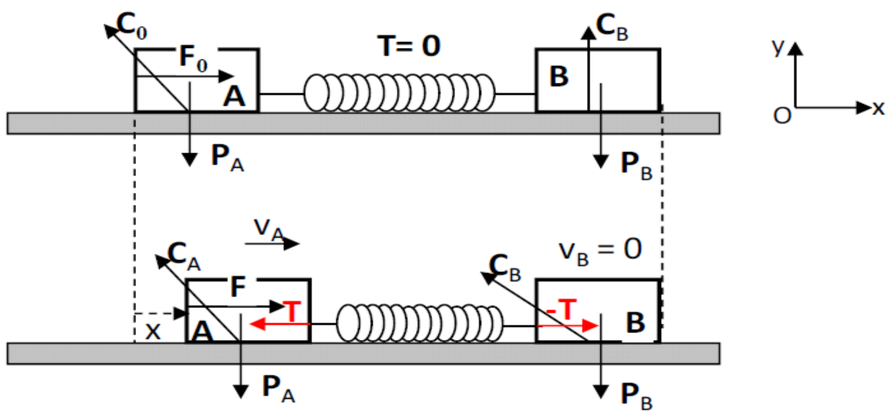
2- Pour $F = F_0$, calculer les forces agissantes sur A et B.

3- Pour quel déplacement minimum de la masse *A*, la masse *B* se met-elle en mouvement ?

4- Calculer les forces agissantes sur les deux blocs A et B juste avant que B ne se mette en mouvement.

SOLUTION :

Données $M = 1kg$, $\mu s = 0.5$, $\mu g = 0.4$, $k = 200N/m$, $g = 10m/s^2$.



1- Comme le ressort n'est ni comprimé ni tendu, on a $T = 0$ N. A la limite de l'équilibre, on écrit

$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{C_O} + \overrightarrow{F_0} = \vec{0}$ avec $C_{Ox} = \mu_S C_{Oy}$

Les projections donnent

$ox/ -P_A + C_{Oy} = 0$ ....(1)

$oy/ F_0 = C_{Ox} = \mu_S Mg$....(2)

$A.N$: $F_0 = 5N$

2- Pour la masse *A*, on a $P_A = C_{Oy} = Mg = 10N$ et $F_0 = C_{Ox} = \mu_S\, Mg = 5N$

Pour B, on a $P_B = Mg = 10N$ et $P= C_{By} = Mg = 10N$.

3- Quand A se déplace, le ressort est comprimé et la même force de rappel agit sur chaque masse$T= kx$ avec x = 2cm. La force F doit augmenter avec T pour garantir une accélération nulle et une vitesse constante.

Pour A, on a

$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{C_A} + \overrightarrow{F} + \vec{T} = M\vec{a} = \vec{0}$ (Vitesse constante).

Sur Oy: $C_{Ay} = Mg = 10N$

Sur Ox: $C_{Ax} = \mu_g Mg = 4N$, $T=kx=4N$et $F = C_{Ax} + T = 8N$

Pour B, on a

$\overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{C_B} - \vec{T} = M\vec{a} = \vec{0}$ (car $T=kx=4N<5N$, donc B est au repos).

Sur Oy: $C_{By} = Mg = 10N$

Sur Ox: $C_{Bx} = T = 4N$

4- Le corps B commence à ce déplacer quand $\overrightarrow{C_B} = \overrightarrow{C_{Bo}}$

Pour B, on a $\overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{C_{Bo}} - \overrightarrow{T_O} = \vec{0}$ (limite de l 'équilibre).

Sur Oy: $C_{Boy} = Mg = 10N$

Sur Ox: $C_{Box} = \mu_S Mg = 5N$ et $T_O = C_{ox} = 5N$

EXERCICE4 : On considère un point matériel de masse m qui glisse sans frottements, sur une demi- sphère de rayon R, de centre O, posée sur le plan horizontal xOy, l'axe Oz étant vertical ascendant (voir figure). A l'instant t = 0 s, la masse est abandonnée sans vitesse initiale, en un point M du plan xOz défini par l'angle θ_o = (Oz, OM).

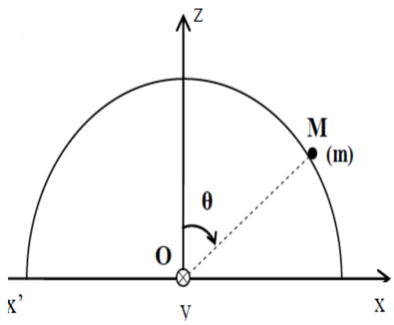
1- Faire le bilan des forces s'exerçant sur la masse m.

En déduire que le mouvement s'effectue entièrement dans le plan

2- Calculer la vitesse et l'accélération de m en coordonnées polaires.

3- Calculer le moment cinétique de m par rapport à O.

En appliquant le théorème du moment cinétique, Trouver une équation différentielle régissant θ(t).



4- Retrouver cette dernière équation à partir de la relation fondamentale de la dynamique.

SOLUTION:

1. Forces appliquées à m : $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{C}$ (normale à la sphère car il n'y a pas de frottements).

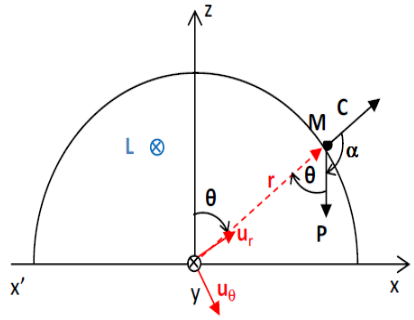
$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{C} = M\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On voit que$\overrightarrow{dv}$ est dans le plan défini par $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{C}$

Comme la vitesse initiale est nulle, toutes les vitesses (donc le mouvement) sont dans ce même plan.

2. En utilisant les coordonnés polaires(r, θ) ,

ou $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$



Le vecteur position s'écrit

$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$Alors

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dR}{dt}\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Les coordonnées du vecteur accélération sont

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \left(R\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

3- En utilisant le théorème du moment cinétique

$$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} \qquad (1)$$

$\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$

$\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) = m\left(R\overrightarrow{u_r} \wedge R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = mR^2\dot{\theta}\vec{j}$

d'un autre coté , $\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \overrightarrow{M_0}\left(\vec{P}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\vec{C}\right)$

$$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{C} = R\overrightarrow{u_r} \wedge (-Pcos\theta\overrightarrow{u_r} + Psin\theta\overrightarrow{u_\theta}) + R\overrightarrow{u_r} \wedge (-C\overrightarrow{u_r})$$

D'après le figure on a $\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \vec{j}$ (Vecteur unitaire de l 'axe $y'oy$) et sachant que

$\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_r} = 0$

$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \vec{r} \wedge \vec{P} = RPsin\theta\vec{j}$

en appliquant la relation (1)

$RPsin\theta\vec{j} = \frac{d(mR^2\dot{\theta}\vec{j})}{dt} \Rightarrow gsin\theta = r\ddot{\theta}$

4- En utilisant le principe fondamental de la dynamique: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$$\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{C} = m\vec{a} = m[\left(R\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}]$$

En passant aux projection sur les deux axes $\overrightarrow{u_r}$et $\overrightarrow{u_\theta}$

$\overrightarrow{u_r}/ -m \quad gcos\theta + C \quad = mR\dot{\theta}^2$

$\overrightarrow{u_\theta}/ \, m \quad gsin\theta = \; mR\ddot{\theta} \Rightarrow gsin\theta = r\ddot{\theta}$

EXERCICE 5

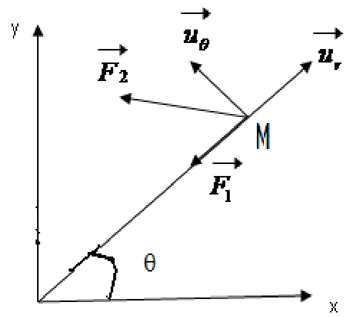
Une masse m est en mouvement dans un plan (xoy) sans frottement et sous l'effet de deux forces $\vec{F_1} = -a\overrightarrow{OM}$ et une autre force $\vec{F_2} = -b\vec{V}$ tel que a et b sont des constantes.

1- dans la base polaire et en utilisant le Principe fondamental de la dynamique, montrer que l'équation horaire du mouvement est donnée par $r = r_0 e^{\frac{-b}{2m}t}$(on suppose que θ=$\omega$t, et à t=0 r=$r_0$, r_0 et ω sont constant).

2- retrouver l'expression de cette équation horaire en utilisant le théorème du moment cinétique.

SOLUTION

1-La masse m est soumise à de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$



et en appliquant le principe fondamental de la dynamique

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} = m\vec{a}$

En écrivant les deux dans le repère des coordonnées polaires:

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} \Rightarrow \vec{F_1} = -a\overrightarrow{OM} = -ar\vec{u_r}$

et

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ donc $\vec{F_2} = -b\vec{V} = -b\,(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$

ainsi que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u_\theta}$$

Puisque θ=ωt, $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$

$-ar\vec{u_r} - b(\dot{r}\vec{u_r} + r\omega\vec{u_\theta}) = m[(\ddot{r} - r\omega^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\omega)\vec{u_\theta}]$

en passant aux projection suivant les deux axes $\vec{u_r}$

$\vec{u_r}/-ar + b\dot{r} = m(\ddot{r} - r\omega^2)) \Rightarrow m\ddot{r} + b\dot{r} - (a + m\omega^2)r = 0$....(1)

$\vec{u_\theta}/-br\omega = m(2\dot{r}\omega) \Rightarrow -br/2m = \dot{r}$ ....(2)

à partir de (2) : $\frac{-b}{2m}r = \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{-b}{2m}dt = \frac{dr}{r}$

$\int \frac{-b}{2m}dt = \int \frac{dr}{r} \Rightarrow \frac{-b}{2m}t + c = lnr$

Donc$r = e^{\frac{-b}{2m}t+c} = e^c e^{\frac{-b}{2m}t} = Ke^{-\frac{b}{2m}t}$ avec $K = e^c$

en appliquant les condition initiale

à $t = 0 \Rightarrow r(0) = r_0 = K$

Donc $r = r_0 e^{\frac{-b}{2m}t}$

2- En utilisant le théorème du moment cinétique:

$$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

$\overrightarrow{L_{/0}} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$

$\overrightarrow{L_{/0}} = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) = m(r\overrightarrow{u_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\omega\overrightarrow{u_\theta})) = m\omega r^2(\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}) = m\omega r^2\vec{k}$

$\frac{d\overrightarrow{L_{/0}}}{dt} = m\dot{\theta}\frac{dr^2}{dt}\vec{k} = 2m\omega r\dot{r}\vec{k}$

d'un autre coté , $\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_2}\right)$

$$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_2} = r\overrightarrow{u_r} \wedge (-ar\overrightarrow{u_r}) + r\overrightarrow{u_r} \wedge (-b(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}))$$

$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = -b\omega r^2\vec{k}$

en appliquant la relation $\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$

$-b\omega r^2\vec{k} = 2m\omega r\dot{r}\vec{k} \Rightarrow -br/2m = \dot{r}$

alors la solution est $r = r_0 e^{\frac{-b}{2m}t}$

EXCERCICE 6

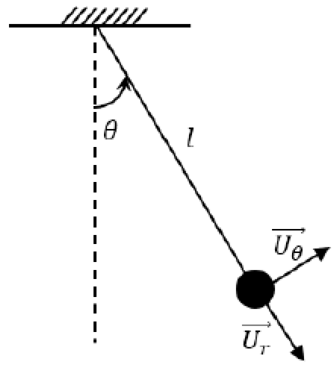
On écarte de sa position d'équilibre une masse ponctuelle *m* suspendue à un fil inextensible de longueur *l* . On repère la position de la masse *m* par l'angle θ entre la verticale et la direction du fil.

Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant :

1- Le principe fondamental de la dynamique

2- le théorème de l'énergie mécanique

3- le théorème du moment cinétique



SOLUTION

La masse *m* est soumise à deux forces :

Tension du fil $\vec{T}$ et à son poids $\vec{P}$

L'accélération dans le repère polaire s'exprime ainsi:

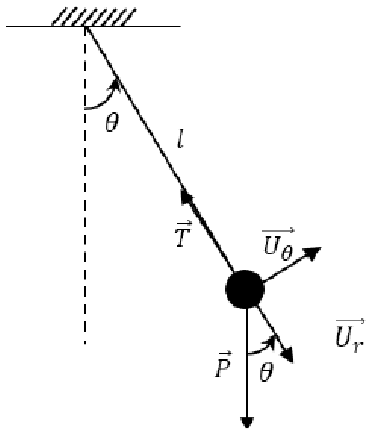
$\vec{a} = -\left(l\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + l\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

1- Appliquons le principe fondamental de la dynamique

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projetons sur la direction :$\overrightarrow{u_r}$

$-T + mgcos\theta = -ml\dot{\theta}^2$



Projetons sur la direction :$\overrightarrow{u_\theta}$

$-mgsin\theta = ml\ddot{\theta}$

L'équation selon $\overrightarrow{u_\theta}$ donne l'équation différentielle suivante:

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

Dans l'approximation des petits angles, $sin\theta \approx \theta$ soit

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

2- L'énergie mécanique est conservée.

$\frac{dE_m}{dt} = 0$ avec $E_m = E_c + E_p$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ ou $v = l\dot{\theta} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

Il n'y a que l'énergie potentielle de pesanteur. En prenant comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur la position$\theta = \frac{\pi}{2}$

$E_p = -mglcos\theta$

, donc $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mglcos\theta$

$$\frac{dE_m}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mglsin\theta\dot{\theta} = 0$$

d'où l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

3- Théorème du moment cinétique: la dérivée du moment cinétique par rapport à *O* est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à *O* .

$$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

$$\overrightarrow{L_{/0}} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v}$$

$\overrightarrow{L_{/0}} = m\left(l\overrightarrow{u_r} \wedge l\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = m\dot{\theta}l^2\vec{k}$

$\frac{d\overrightarrow{L_{/0}}}{dt} = ml^2\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{k} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$

d'un autre coté , $\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \overrightarrow{M_0}(\vec{P}) + \overrightarrow{M_0}(\vec{T})$

$\overrightarrow{M_0}(\vec{T}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = \vec{0}(\vec{T}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires).

$\overrightarrow{M_0}(\vec{P}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} = -mglsin\theta\vec{k}$

En appliquant la relation $\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = mglsin\theta\vec{k}$$

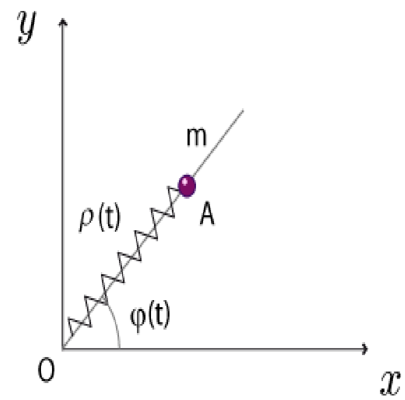
On retrouve l'équation différentielle: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

IV.3. Exercices supplémentaires sans solutions

EXERCICE 7

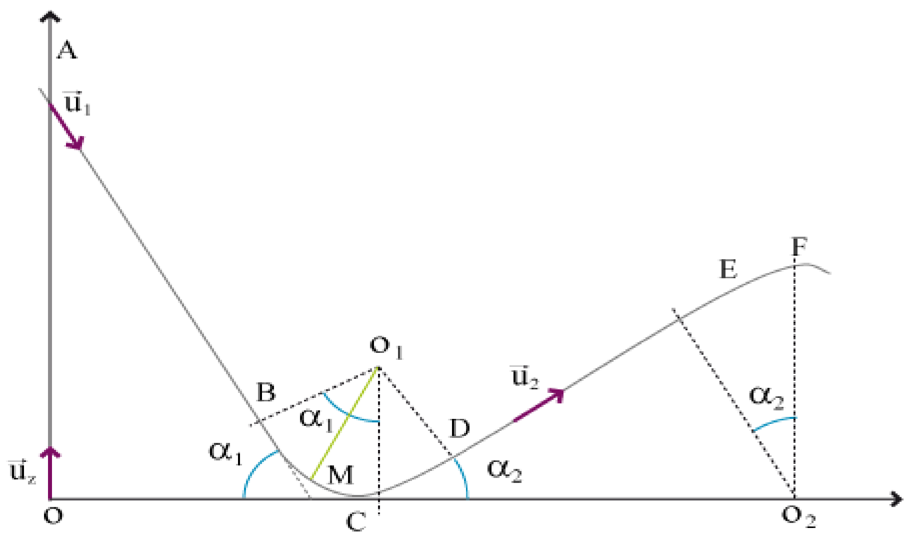
Une bille de masse m, considérée comme ponctuelle, est fixée à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0 et de coefficient de raideur k. Il existe une force de frottements solide: $f = \mu_c N$. On repère la position de cette bille par sa distance ρ au point O et par l'angle φ qu'elle fait avec l'axe ox. La bille est astreinte à rester dans le plan horizontal ($\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}$) .

1- Calculer le moment cinétique de la bille par rapport à O.
2- Montrer que le module du moment cinétique est constant.
3- Etablir les équations du mouvement.
4- Identifier les forces d'inertie en écrivant les équations du mouvement dans le référentiel mobile.
5- Y a-t-il conservation ou non de l'énergie mécanique ? Justifier également par les équations.



EXERCICE 8

Un véhicule de masse m, assimilable à un point matériel M se déplace sans frottements sur la piste de montagnes russes représentée ci-dessous. La piste est contenu dans le plan (xOz, le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.



On négligera les frottements de l'air. Le véhicule est lâché en A d'un hauteur h ($h>R$) sans vitesse initiale.

1- a Calculer les vitesses v_B,v_c et v_F en fonction de g, h, R et α_1 .

b) Calculer l'accélération $\overrightarrow{a_1}$ du véhicule puis la réaction $\overrightarrow{N_1}$ de la piste en fonction de$m$,g et α_1.

c) Sur le trajet BCD, le point M est repéré par l'angle α . Exprimer la réaction de la piste notée $\overrightarrow{N_2}$ en fonction de . Donner le vecteur accélération en C.

d) Sur la trajet DEF , calculer l'accélération $\overrightarrow{a_3}$ en fonction de g et α_2 . Comparer la réaction de la piste$\overrightarrow{N_3}$ à celle trouvées précédemment.

e) Sur le trajet EF , écrire l'accélération en F.

2- Soit un personnage M' de masse m' attaché dans le véhicule M dont on a étudié le mouvement précédemment en C

a) Ecrire la loi de composition des accélérations.

L'individu subit-il une force d'inertie de Coriolis ?

b) Représenter et donner l'expression de la force d'inertie subie par le passager entre A et B , puis entre D et E .

c) Représenter et donner l'expression de la force d'inertie subie par le passager en C puis en F .

d) Quelle doit être la relation en h et R pour que le passager soit en état d'impesanteur artificielle au point F .

CHAPITRE V

Energie et travail du point matériel

V. 1. Rappel

V.1.1. Les opérateurs

V.1.1.1. Le gradient

Etant donné un champ scalaire dont la valeur au point $M(x,y,z)$ est $U(x,y,z)$. On appelle gradient du champ $U(x,y,z)$, le vecteur :

$$\overrightarrow{grad}\, U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

Ou $\vec{\nabla}$ représente l'opérateur nabla défini par:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

V.1.1.2 . La divergence

on considère un champ de vecteur:

$$\vec{A} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$$

On appelle divergence du vecteur $\vec{A}$, le scalaire:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

V.1.1.3. Le laplacien

On appelle laplacien du vecteur $\vec{A}$, le vecteur:

$$\Delta \vec{A} = \Delta X\vec{\imath} + \Delta Y\vec{\jmath} + \Delta Z\vec{k}$$

Ou Δ représente un nouvel opérateur, le laplacien défini par :

$$\Delta = \vec{\nabla}\vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

V.1.1.4. Le rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ est donné par

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Y & Z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ X & Y \end{vmatrix}$$

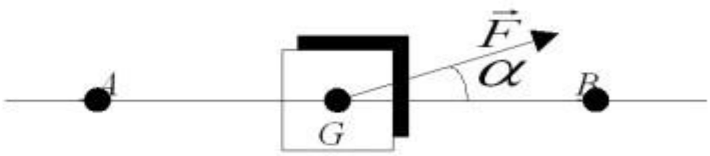
La condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ de vecteur $\vec{A}$ dérive d'un potentiel scalaire U est que son rotationnel soit nul:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{0}$$

V.1.2. Travail d'une force

V.1.2.1. Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit un point matériel M se déplaçant sur le segment de droite$[AB]$ sous l'effet d'une force $\vec{F}$. Par définition, le travail de la force F sur le déplacement rectiligne AB est donné par:



$$W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\,\overrightarrow{dx} = F \ AB \ \cos\alpha$$

α est l'angle que fait $\vec{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$

- Remarque

  - Le travail est positif (travail moteur) si $\cos\alpha > 0,\ 0 \le \alpha < \pi/2$
  - Il est négatif (travail résistant) si $\cos\alpha < 0,\ \pi/2 < \alpha \le \pi$
  - Il est nul si $\cos\alpha = 0, \alpha = \pi/2$

V.1.2.2. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse v est donnée

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

V.1.2.3. Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux positions A et B est égal à la somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur le point matériel durant le trajet entre ces deux positions.

$$\sum W_{AB}(\vec{F})_{AB} = \Delta E_C = E_C(B) - E_C(A)$$

Le théorème de l'énergie cinétique permet de déterminer l'état de la vitesse d'un point matériel. Il repose sur la détermination du travail de toutes les forces extérieures appliquées à ce point. Il est possible de définir une seconde fonction d'état appelée énergie potentielle du système. Pour ce faire, il importe de distinguer deux types de forces extérieures:

- *les* forces conservatives sont celles dont le travail ne dépend pas du chemin suivi mais seulement du point de départ et du point d'arrivée, comme le poids, la tension d'un ressort et le travail d'une force constante.
- les forces non conservatives dont le travail dépend du chemin suivi comme par exemple les forces de frottement.

V.1.2.4. Energie potentielle

- Energie potentielle élastique $E_P = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$
- Energie potentielle de pesanteur $E_P = mgz$
- Energie potentielle gravitationnelle de la masse *m* dans le champ créé par une masse *M* : $E_P = -G\frac{Mm}{r}$

Toutes ces quantités sont définies à une constante près.

V.1.2.5. Energie mécanique (totale)

L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme des énergies cinétique et potentielle

$$E_M = E_C + E_P$$

V.1.2.6. Théorème de l'énergie potentielle

Si une force dérive d'une énergie potentielle (*force conservative*), son travail entre deux positions *A* et *B* est égal et opposé à la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions.

$W_{AB} = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)$

V.1.2.7. Principe de conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique (totale) d'un point matériel soumis à une force dérivant d'une énergie potentielle, est conservée si

$E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB} = coste$

donc la variation de l énergie mécanique est nulle ($\Delta E_m = 0$).

Si ce même système comporte au moins une force ne dérivant pas d'une énergie potentielle (une force non conservative) alors l'énergie mécanique n'est pas conservée. Dans ce cas

$\Delta E_m = W$(forces non conservatives)

$\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{nc})$ tel que $\vec{F}_{nc}$ sont les forces non conservatrices

V.2. Exercices résolus

EXERCICE 1

On considère une particule qui se déplace dans le champ de forces $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{F} = (x - ay)\overrightarrow{\imath} + (3y - 2x)\overrightarrow{\jmath}$$

Ou $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ sont les vecteurs unitaires du repère cartésien Oxy

1-Calculer le travail reçu par la particule en fonction de a :

a- Si elle se déplace en ligne droite du point O(0,0) au point A(2, 4).

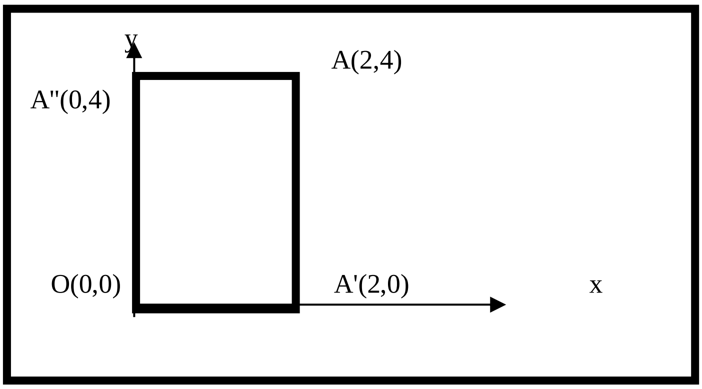
b - Si elle se déplace de *O* en *A* suivant le trajet *OA'A* (*A*' projection de A sur *Oy*).

c- Si elle se déplace de *O* en *A* suivant le trajet *OA"A* (*A*" projection de A sur *Ox*). Conclure? (Figure1).

2- Calculer, en fonction de a, le travail reçu par la particule qui effectue un tour le long du cercle centré en *O* et de rayon 2, dans le sens trigonométrique.

3- Pour quelle valeur de a le champ de force $\overrightarrow{F}$ dérive t-il d une énergie potentielle *V*(*x*,*y*).

4- Déterminer *V*(*x*,*y*).



SOLUTION

1-a $\overrightarrow{F} = (x - ay)\overrightarrow{\imath} + (3y - 2x)\overrightarrow{\jmath}$

Le travail élémentaire de $\overrightarrow{F}$ est

$$dW = \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{dr} = F_x dx + F_y dy$$

Comme la particule se déplace sur la droite *OA* d'équation *y=2x* donc *dy*=2*dx*

y=2x donc *dy*=2*dx* ⇒ $dW = F_x dx + 2F_y dx = (F_x + 2F_y)dx$

$$dW = \big((x - ay) + 2(3y - 2x)\big)dx = [-3x + (6 - a)2x]dx$$

$$W_{OA} = \int_{x=0}^{2} (9 - 2a)x dx = 18 - 4a$$

b- Le long du trajet *OA'A:*

$W_{OA'A} = W_{OA'} + W_{A'A}$

Suivant OA' $\Rightarrow$ y = 0 donc $dy = 0$ et Suivant $A'A$ $\Rightarrow$ x = 2 donc $dx = 0$

donc $W_{OA'} = \int_{x=0}^{2} F_x dx = 2$ et $W_{A'A} = \int_{x=0}^{4} F_y dy = 8$

Alors $W_{OA'A} = 10$

c- Le long du trajet *OA''A:*

$W_{OA'A} = W_{OA''} + W_{A''A}$

Suivant OA'' $\Rightarrow$ $x = 0$ donc $dx = 0$ et Suivant $A''A$ $\Rightarrow$ y = 4 donc $dy = 0$

$W_{OA''} = \int_{y=0}^{4} F_y dy = 24$

et $W_{A''A} = \int_{x=0}^{2} F_x dx = \int_{x=0}^{2} (x - 4a) dx = 2 - 8a$

donc

$W_{OA'A} = W_{OA''} + W_{A''A} = 26 - 8a$

Le travail reçu par la particule pour aller de *O* à *A* dépend du chemin suivi, donc le champ de forces considéré ne dérive pas en général d'un potentiel.

2- La particule décrit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$

Avec $\begin{cases} x = 2cos\theta \\ y = 2sin\theta \end{cases}$ $(0 < \theta < 2\pi)$

donc $\begin{cases} dx = -2sin\theta d\theta \\ dy = 2cos\theta d\theta \end{cases}$

Et $\overrightarrow{F} = 2(cos\theta - asin\theta)\overrightarrow{\imath} + 2(-2cos\theta + 3sin\theta)\overrightarrow{\jmath}$

Le travail reçu pour un tour est

$$W = \int_{cercle} \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{dr} = \int_{cercle} F_x dx + F_y dy = 4\pi(a - 2)$$

3- Le champ de forces dérive d'un potentiel *V* si

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,V$, soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \vec{0}$

donc $\frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0$ $\Rightarrow$ *-2+a=*0 , *a=2*

4- Détermination de *V*(*x*,*y*):

$F_x = x - 2y = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $\Rightarrow V(x, y) = -\frac{x^2}{2} + 2xy + f(y)$

$F_y = 3y - 2x = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $V(x, y) = -\frac{3y^2}{2} + 2xy + g(x)$

En comparant ces deux dernières équations, on déduit que

$f(y) = -\frac{3y^2}{2}$ et $g(x) = -\frac{x^2}{2}$

D'ou

$$V(x,y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + 2xy + coste$$

EXERCICE 2

Une particule est soumise à une force définie par ses coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{F} = (x + 2y + \alpha z)\overrightarrow{\imath} + (\beta x - 3y - z)\overrightarrow{\jmath} + (4x + \gamma y + 2z)\overrightarrow{k}$$

Où , β , γ sont des constantes. x, y, z sont en mètre et $\overrightarrow{F}$ en newton.

1/ Trouver les valeurs de α , β , γ pour que F dérive d'un potentiel.

2/ Trouver l'expression du potentiel $E_p\ (x, y, z)$ dont dérive la force sachant que $E_p\ (0, 0, 0) = 2$

SOLUTION

1- Pour que la force dérive d 'un potentiel, il faut que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \vec{0}$. Donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + \alpha z & \beta x - 3y - z & 4x + \gamma y + 2z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \beta x - 3y - z & 4x + \gamma y + 2z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + \alpha z & 4x + \gamma y + 2z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x + 2y + \alpha z & \beta x - 3y - z \end{vmatrix}$$

Alors $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \beta x - 3y - z & 4x + \gamma y + 2z \end{vmatrix} = 0 \; ; \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(4x + \gamma y + 2z) = \frac{\partial}{\partial z}(\beta x - 3y - z)$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + \alpha z & 4x + \gamma y + 2z \end{vmatrix} = 0; \; \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(4x + \gamma y + 2z) = \frac{\partial}{\partial z}(x + 2y + \alpha z)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x + 2y + \alpha z & \beta x - 3y - z \end{vmatrix} = 0 \; ; \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\beta x - 3y - z) = \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y + \alpha z)$$

Donc $\gamma = -1$, $\alpha = 4$ et $\beta = 2$

L'expression de la force est:

$\overrightarrow{F} = (x + 2y + 4z)\overrightarrow{\imath} + (2x - 3y - z)\overrightarrow{\jmath} + (4x - y + 2z)\overrightarrow{k}$

2- Nous savons que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,Ep\,(x, y, z) = -\overrightarrow{\nabla}\,Ep\,(x, y, z)$$
$$= -\frac{\partial Ep\,(x, y, z)}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial Ep\,(x, y, z)}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial Ep\,(x, y, z)}{\partial z}\vec{k}$$

Partant de cela et par identification

$x + 2y + 4z = \frac{\partial Ep\,(x,y,z)}{\partial x}$;

$2x - 3y - z = \frac{\partial Ep\,(x,y,z)}{\partial y}$;

$4x - y + 2z = \frac{\partial Ep\,(x,y,z)}{\partial z}$;

Donc

$x + 2y + 4z = \frac{\partial Ep\,(x,y,z)}{\partial x}; \Rightarrow Ep\,(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2yx + 4zx + f(y, z)$

on sais que

$2x - 3y - z = \frac{\partial Ep\,(x,y,z)}{\partial y} = 2x + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = -3y - z$

Ce qui donne $f(y, z) = -\frac{3y^2}{2} - yz + g(z)$

et $4x - y + 2z = \frac{\partial Ep\,(x,y,z)}{\partial z} = -y + 4x + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 2z \Rightarrow g(z) = z^2 + C$

L 'expression du potentiel est

$$Ep\,(x, y, z) = -\frac{x^2}{2} - 2yx - 4zx + \frac{3y^2}{2} + yz + z^2 + C$$

-En utilisant la condition E_p (0, 0, 0) =2 $\Rightarrow C = 2$

Finalement l'expression de l'énergie potentielle est donnée par:

$$Ep\,(x, y, z) = -\frac{x^2}{2} - 2yx - 4zx + \frac{3y^2}{2} + yz + z^2 + 2$$

EXERCICE 3:

Une particule de masse *m=100g* se déplace sous l 'action d'une force conservatrice qui dérive d'un potentiel $V = \frac{2a}{(r+\frac{a^2}{r})}$ (a est une constante positive). La particule est lâchée en position $r = \frac{a}{2}$

1- Quelle est sa vitesse v_0 lorsqu'elle atteint la position d'équilibre stable?

2- Déterminer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

SOLUTION

La position d'équilibre stable correspond à $\frac{dV}{dr}=0$

donc $\frac{d}{dr}\left(\frac{2a}{\left(r+\frac{a^2}{r}\right)}\right)=0 \Rightarrow -\frac{\left(\frac{r^2-a^2}{r^2}\right)2a}{\left(r+\frac{a^2}{r}\right)^2}=0 \Rightarrow r=\pm a$

$\frac{d^2V}{dr^2}=\frac{4ar(r^2-3a^2)}{r^2+a^2}>0$ pour $r=-a$

Alors la position la plus stable correspond à $r=-a$. Au départ, la particule possède une vitesse nul et sa position est $r=\frac{a}{2}$, donc $E=E_P=V=\frac{4}{5}$.

En position d'équilibre $(v=v_0, r=-a) \Rightarrow E_C=\frac{1}{2}mv_0{}^2+V(\,r=-a)=\frac{1}{2}mv_0{}^2-1$

L'équation de conservation de l'énergie mécanique donne,

$v_0=3\sqrt{\frac{2}{5m}}$

Pour *m=0.1kg* et *a=0.5m* $\Rightarrow v_0=6m/s$

2- Posons $u=r-r_0$ $(r_0=-a)$. Pour des petit déplacement $u \ll 1$

$$V'(r)=V(r_0)+(r-r_0)\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=r_0=a}+\frac{1}{2}(r-r_0)^2\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=r_0=a}$$

$V(r_0)=V(-a)=-1$; $\left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=r_0}=0$; $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=-a}=\frac{1}{a^2}$

$$V'(r)=-1+\frac{1}{2a}u^2$$

L'équation de conservation de l'énergie: $E=\frac{1}{2}m\dot{u}^2-1+\frac{1}{2a}u^2$

En dérivant les deux membre par rapport au temps;

$\ddot{u}+\frac{1}{ma^2}u=0$ alors $\omega=\sqrt{\frac{1}{ma^2}}$.

La période de ces oscillations est $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{ma^2}}}=2\pi a\sqrt{m}$. AN: *T=1s*

Exercice 4 :

Une particule de masse *m* décrit la trajectoire elliptique de demi-axes *a* et *b*, de centre *O* d'équation

$\overrightarrow{OM}=\vec{r}=acos\omega t\vec{\imath}+bsin\omega t\vec{\jmath}$ 1- Montrer que la résultante $\vec{F}$ des forces agissant sur *M*, dérive d'un potentiel *V* qu'on déterminera en fonction de *m*, *ω* et $|\overrightarrow{OM}|=r$, et en déduire le travail de $\vec{F}$ lorsque la particule se déplace de $M_1(OM_1=r_1)$ vers $M_2(OM_2=r_2)$.

2- a) Calculer le rapport des énergies cinétiques de la particule en *A* et *B*.

-b) Vérifier le théorème de l énergie cinétique entre les positions *A* et *B*.

3- a) Vérifier le principe de conservation de l'énergie mécanique totale de la particule

SOLUTION

1- La force est donnée par

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2\vec{r}$ (Force centrale dirigé de *M* vers *O*)

$\vec{F}$dérive d'une énergie potentielle si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \vec{0}$

comme $\begin{cases} F_x = -m\omega^2 x \\ F_y = -m\omega^2 y \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$

Le champ de forces dérive donc d'une énergie potentielle E_P

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,Ep = -\vec{\nabla}\,Ep \Rightarrow \begin{cases} F_x = -m\omega^2 x = -\frac{\partial Ep}{\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ F_y = -m\omega^2 y = -\frac{\partial Ep}{\partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

De (1) $-m\omega^2 x = -\frac{\partial Ep}{\partial x} \Rightarrow Ep = m\omega^2\frac{x^2}{2} + f(y)$

en utilisant la deuxième relation $-m\omega^2 y = -\frac{\partial Ep}{\partial y} = -\frac{\partial(m\omega^2\frac{x^2}{2} + f(y))}{\partial y} = -\frac{\partial(f(y))}{\partial y}$

Donc $f(y) = m\omega^2\frac{y^2}{2} + coste$

l'expression de l'énergie potentielle est $Ep = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{m\omega^2}{2}r^2$

le travail de $\vec{F}$ lorsque la particule se déplace de $M_1(OM_1 = r_1)$ vers $M_2(OM_2 = r_2)$ est donné par:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = -m\omega^2\int_{r_1}^{r_2} \vec{r}\,\overrightarrow{dr} = m\omega^2(r_1^2 - r_2^2)$$

2-a $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)$

- En *A* $(\omega t = 0) \Rightarrow E_{cA} = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2$

$$\Rightarrow \frac{E_{cA}}{E_{cB}} = \frac{b^2}{a^2}$$

- En *B* $(\omega t = \pi/2) \Rightarrow E_{cB} = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$

b- La variation de l'énergie cinétique

$E_{cB} - E_{cA} = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)$

et le travail entre $A(r_1 = a)$ vers $B(r_2 = b)$ est: $W=\frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)$

$E_{cB} - E_{cA} = W$ ce qui vérifie le théorème de l'énergie cinétique.

3- L énergie mécanique $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2)$

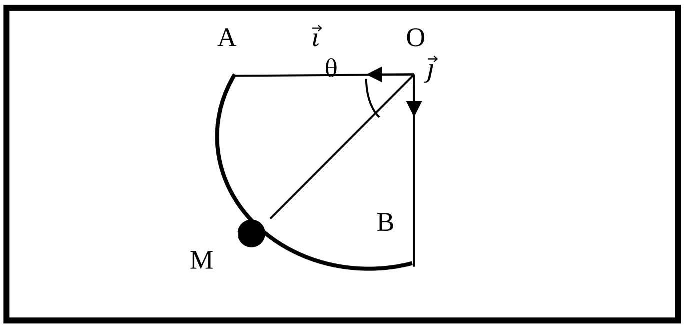
E est indépendant du temps, c 'est une constante du mouvement: c'est la conséquence du fait que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

V.3. Exercices supplémentaires sans solution

EXERCICE 5 :

Une particule de masse m, initialement au repos en *A*, glisse sans frottement sur la surface circulaire *AOB* de rayon $\boldsymbol{a}$.

1. Déterminer le travail du poids de A à M.
2. Déterminer le travail de la force de contact surface-particule.
3. Déterminer l'énergie potentielle E_p de m au point *M*. On donne $E_p(B) = 0$
4. Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la vitesse de la particule au point *M*. En déduire son énergie cinétique E_c.
5. Calculer l'énergie mécanique E_m en ce point *M*.
6. Représenter E_p , E_c , et E_m, en prend ($0 < \theta < \pi /2$).



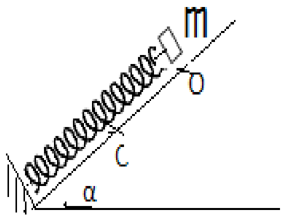
EXERCICE 6

On pose une masse m à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k sur un plan incliné avec un angle α de l'horizontale. On laisse la masse au point O sans vitesse initiale. On suppose qu'il y a des frottements sur le plan μ.

- Trouver l'énergie totale aux points O et C.
- Calculer le travail de la force de frottement.

Déduire x_c la compression maximum du ressort.

Que devient-elle si on néglige les frottements ?



EXERCICE 7

Un solide de masse m=500 g peut glisser sans frottement sur une piste circulaire de rayon r=1 m (Fig. 01). Il part d'un point A sans vitesse initiale.

1. Déterminer la vitesse du solide au point B.

2. En réalité, la vitesse en B est de 3,5 ms-1. Déterminer le travail des forces de frottement puis en déduire l'intensité, supposée constante, de la résultante des ces forces de frottement.

EXAMENS AVEC SOLUTIONS

USTO-LMD-Département de Chimie physique
Epreuve de Mécanique du point. Rattrapage. 07/06/2016
Durée: 1h30

A. Cinématique

Un point matériel M se déplace dans le plan XOY (figure 1) tel que $OM=r=2a\cos\theta$ avec $\theta=\omega t$, (a, ω sont des constantes).

1. Déterminer la vitesse et l'accélération de M, dans le système des coordonnées polaires. Déterminer leurs normes.

2. Montrer que la trajectoire de M est un cercle.

3. Déterminer le rayon de courbure (ρ).

4. En déduire l'expression de la vitesse et l'accélération de M, dans le système Frenet, déterminer leurs normes.

B. Mouvement relatif

On considère les référentielles *R(Oxy)* fixe, et R'(Ox'y') mobile, de base respectives $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ e$(\vec{\imath'},\vec{\jmath'})$, *R'* tourne par rapport à *R* autour de l'axe *OZ* perpendiculairement au plan *OXY* avec une vitesse angulaire ω constante, le point matériel M sur ox' est repéré par: $\overrightarrow{OM} = 2a\cos\theta\vec{\imath'}$ (figure 1).

1 Déterminer la vitesse relative et d'entraînement de M, en déduire sa vitesse absolue.

2 Déterminer l'accélération relative, d'entraînement et de Coriolis de M, en déduire son accélération absolue.

C. Dynamique :

Une particule M de masse m, initialement au repos en A, glisse sans frottement sur la surface AB de rayon R (figure 2). Soit C la force de contact entre la particule et la surface circulaire.

1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique montrer que:

(i) $\frac{V^2}{R} = -\frac{C}{m} + g\cos\theta$ et (ii) $\frac{dV}{dt} = g\sin\theta$

2. En utilisant le théorème du moment cinétique retrouver (ii).

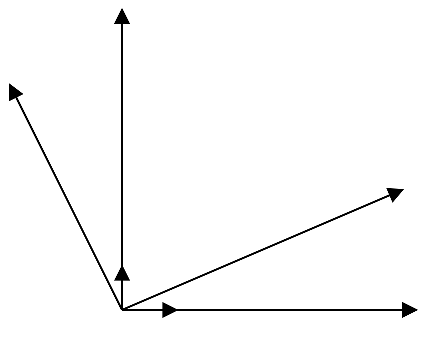


Figure 1

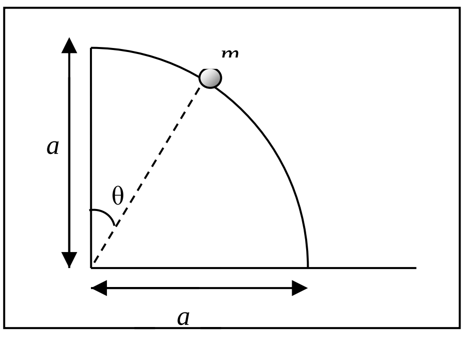


Figure 2

CORRECTION

A. Cinématique

1) Le vecteur position en coordonnées polaires est donné par :$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} = 2acos\theta\overrightarrow{u_r}$

Les coordonnées du vecteur vitesse

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\omega 2a\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + 2a\omega cos\theta\overrightarrow{u_\theta} = 2a\omega(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$

$|\vec{V}| = 2a\omega$

Les coordonnées du vecteur accélération sont

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}2a\omega(-\sin\theta\,\overrightarrow{u_r} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta}) = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

$\vec{a} = -4a\omega^2(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} + sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$

$|\vec{a}| = 4a\omega^2$

2- $r=2acos\theta$ avec $x=rcos\theta$ d'où $r^2=2ax$

comme $r^2=x^2+y^2$ si on remplace l'expression de r dans cette dernière équation on aura $(x-a)^2+y^2=a^2$

c'est l'équation d'un cercle de rayon *a* et de centre $(a,0)$.

3- Détermination du rayon de courbure

$\rho = \frac{V^3}{|\vec{a}\wedge\vec{V}|}$

$\vec{a}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_t} & \overrightarrow{u_n} & \vec{k} \\ 0 & 4a\omega^2 & 0 \\ 2a\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8a^2\omega^3\vec{k}$

$|\vec{a}\wedge\vec{V}| = 8a^2\omega^3$

Alors $\rho = \frac{V^3}{|\vec{a}\wedge\vec{V}|} = \frac{(2a\omega)^3}{8a^2\omega^3} = a$

4- Dans le repère de frenet

$\vec{V} = |\vec{V}|\overrightarrow{u_t} = 2a\omega\overrightarrow{u_t}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{V^2}{\rho}\overrightarrow{u_n}$$

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d(2a\omega)}{dt} = 0$$

on sais que $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

alors $a_n = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t} = 4a\omega^2$

B. Mouvement relatif

1- L'expression de la vitesse relative, d'entrainement et absolue

$$\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt}\Big/_{R'} = \frac{d(2acos\omega t)}{dt}\vec{i'} = -2a\omega sin\omega t\vec{i'}$$

$$\vec{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'} = \omega\vec{k'} \wedge 2acos\omega t\vec{i'} = 2a\omega cos\omega t\vec{j'}$$

Donc $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} = 2a\omega(-sin\omega t\vec{i'} + cos\omega t\vec{j'}\vec{j'}$

2- L'expression de l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis ainsi que absolue.

$$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt}\Big/_{R'} = \frac{d(-2asin\omega t)}{dt}\vec{i'} = -2a\omega^2 cos\omega t\vec{i'}$$

$$\vec{a_e} = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'}\right) = -2a\omega^2 cos\omega t\vec{i'}\vec{i'}$$

$$\vec{a_c} = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r}\right) = 2\omega\vec{k'} \wedge -2a\omega sin\omega t\vec{i'} = -4a\omega^2 sin\omega t\,\vec{j'}$$

$$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c} = -2a\omega^2 cos\omega t\vec{i'} - 2a\omega^2 cos\omega t\vec{i'}\vec{i'} - 4a\omega^2 sin\omega t\,\vec{j'}$$

$$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c} = -4a\omega^2(cos\omega t\vec{i'} + sin\omega t\,\vec{j'})$$

C. Dynamique

1. Les Forces appliquées sur m sont $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{C}$, en

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{C} = M\vec{a} = m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

En utilisant les le repère de frenet$(\vec{u_t}, \vec{u_N})$,

$$\vec{u_t}/ \quad P_t = m\frac{dv}{dt} \implies gsin\theta = \frac{dv}{dt}$$

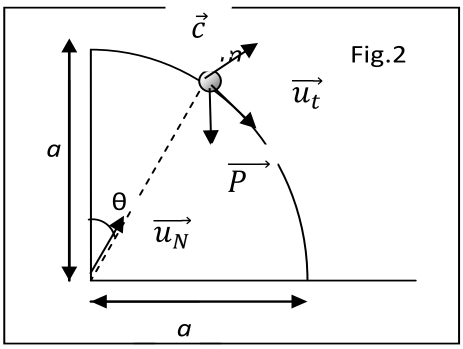


Fig.2

$$\vec{u_N}/ \quad P_N - C = m\frac{v^2}{a} \implies mgcos\theta - C = m\frac{v^2}{a}$$

Donc $\quad gcos\theta - \frac{C}{m} = \frac{v^2}{a}$

2- En utilisant le théorème du moment cinétique

$$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\vec{L_0}}{dt} \qquad (1)$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v})$$

$\vec{r} = -a\overrightarrow{u_N}$ et $\vec{v} = v\overrightarrow{u_t}$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \wedge \vec{v}) = m(-a\overrightarrow{u_N} \wedge v\overrightarrow{u_t}) = -amv\,(\overrightarrow{u_N} \wedge \overrightarrow{u_t}) = -amv\,\vec{k}$$

$\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = -am\frac{dv}{dt}\vec{k}$ 1

d'un autre coté , $\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \overrightarrow{M_0}(\vec{P}) + \overrightarrow{M_0}(\vec{C})$

$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{C} = -a\overrightarrow{u_N} \wedge (-Pcos\theta\overrightarrow{u_N} + Psin\theta\overrightarrow{u_t}) - a\overrightarrow{u_N} \wedge (-C\overrightarrow{u_N})$

sachant que $\overrightarrow{u_N} \wedge \overrightarrow{u_N} = 0$ et $\overrightarrow{u_N} \wedge \overrightarrow{u_t} = \vec{k}$

$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \vec{r} \wedge \vec{P} = -amgsin\theta\vec{k}$............................2

en appliquant la relation (1)

$\sum \overrightarrow{M_0}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$, on aura $-am\frac{dv}{dt}\vec{k} = -amgsin\theta\vec{k}$

$\frac{dv}{dt} = gsin\theta$ donc la relation (ii) est vérifie

USTO-LMD-Département de Chimie physique
Epreuve de Mécanique du point. 2015/2016
Durée: 1h30

EXERCICE 1:

Un point matériel A décrit une courbe plane de coordonnées polaires :

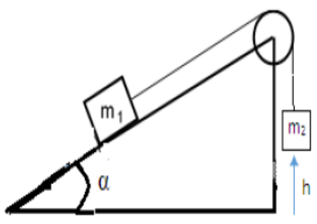
$\theta = 2t^3$ $\boldsymbol{r = R}$ Tel que R constant

5) Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération. Déduire leurs normes.
6) Exprimer la vitesse et l'accélération dans la base intrinsèque (Frenet).
7) Quel est le rayon de courbure ρ de la trajectoire ?
8) Sachant que le centre de courbure est donné par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho}{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}}{V}\right)$ .déterminer les coordonnées de ce centre C.
9) Montrer que $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_r}$
10) Calculer le moment cinétique.

EXERCICE 2:

Deux masses m_1 et m_2 sont liées par un fil inextensible qui passe par une poulie de masse négligeable et d'axe fixe. La masse m1 glisse sur un plan incliné non lisse qui fait un angle $\alpha = 30$ par rapport à l'horizontale (figure) sachant que les coefficients de frottements statique et dynamique sont respectivement **μs** = 0,7 **μd** = 0,3. On prendra g = 9,8 m/s,

m_1=1kg.



1- calculer la masse minimale de *m2min* qui maintient le système en équilibre.
2- On prend, maintenant la masse m_2 = 1,5 kg. Elle est lâchée, sans vitesse initiale, d'une hauteur h durant un temps de 2 secondes.
a-Calculer les accélérations prises par les deux masses.
b) Calculer la hauteur h. Déduire les vitesses des deux masses lorsque la masse m_2 heurte le sol.

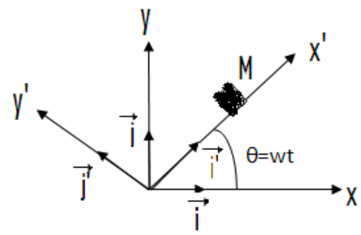
EXERCICE 3

n repère *R'*(*OX'Y'*) en rotation par rapport à un repère *R*(*OXY*) fixe, suivant l'axe (*OZ*), avec une vitesse angulaire w constante. On considère l'angle θ entre l'axe (*OX*) et (*OX'*) tel que $\theta=\omega t$. Soit un mobile *M* suivant l'axe (*OX'*) et obéissant à la relation suivante

$\overrightarrow{OM} = ae^{-t}\overrightarrow{\imath'}$ ou a est une constante

1- Déterminer la vitesse relative, d'entrainement et absolue.

2- Déterminer l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue.



SOLUTION

EXERCICE 1: on sait que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} = R\overrightarrow{u_r}$

$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dR}{dt}\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = 6Rt^2\overrightarrow{u_\theta} \Rightarrow |\vec{V}| = 6Rt^2$

Les coordonnées du vecteur accélération sont

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(6Rt^2\overrightarrow{u_\theta})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 12Rt\overrightarrow{u_\theta} - 36Rt^4\overrightarrow{u_r} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(12Rt)^2 + (36Rt^4)^2} = 12Rt\sqrt{1+9t^6}$$

2) Dans le repère de Frenet

$\vec{V} = |\vec{V}|\overrightarrow{u_t} = 6Rt^2\overrightarrow{u_t}$

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d(62Rt^2)}{dt} = 12Rt$$

on sais que $a^2 = a_t^2 + a_n^2$ alors $a_n^2 = (12Rt)^2(1+9t^6) - (12Rt)^2$

$$a_n = \sqrt{(12Rt)^2(9t^6)} = 36Rt^4$$

$$\vec{a} = 12Rt\overrightarrow{u_t} - 36Rt^4\overrightarrow{u_n}$$

3) Détermination du rayon de courbure

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(6Rt^2)^2}{36Rt^4} = R$$

Pour calculer le centre de courbure, on détermine le vecteur

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho}{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V}}{V}\right) = R\overrightarrow{u_r} + \frac{R^2}{2Rt}\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = R\overrightarrow{u_r} - \frac{R^2}{6Rt^2}(6t^2)\overrightarrow{u_r} = \vec{0}$ c'est C(0,0)

5) $\vec{V} = 6Rt^2\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{V} = |\vec{V}|\overrightarrow{u_t} = 6Rt^2\overrightarrow{u_t}$ donc $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_t}$

De la même façon pour les accélération on compare l'accélération des coordonnées polaires avec celle des coordonnées de Frenet on trouve $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_r}$.

6) Le moment cinétique est:

$$\overrightarrow{L_0}(M)_R = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = R\overrightarrow{u_r} \wedge m6Rt^2\overrightarrow{u_\theta}$$

$\overrightarrow{L_0}(M)_R = 6mR^2t^2\vec{k} = mRV\vec{k}$

EXERCICE 2:

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique à l équilibre

Sur le système m_1 : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{f_t} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{T_1} = \vec{0}$

en passant aux projection sur les deux axes *ox* et *oy*

ox/ $-m_1\, gsin\alpha - f_t + T_1 = 0$ ....(1)

oy/ $-m_1\, gcos\alpha + R_N = 0$ ....(2)

$\mu_S = \frac{f_t}{R_N} \Rightarrow f_t = \mu_S m_1\, gcos\alpha$

Sur le système m_2 : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T_2} = \vec{0}$

en passant a la projection sur l'axe *oy*

$m_2\, g - T_2 = 0$ ....(3)

Un fil inextensible de masse négligeable donc $T_1 = T_2 = T$

En faisant la somme de (1)+(3) et en remplaçant f_t par son expression

$-m_1\, gsin\alpha - \mu_S m_A\, gcos\alpha \ + m_2\, g = 0$ donc

$\Rightarrow \ m_{2min} = m_1\,(sin\alpha + \mu_S cos\alpha) = 1.1kg$

3- puisque m_2 = 1,5 kg est supérieur à m_{2min} , le mouvement se fait dans le sens de m_2

Fil inextensible $\Rightarrow a_1 = a_2 = a$

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique à l équilibre

Sur le système m_1 : $\Sigma\vec{F} = m_1\overrightarrow{a}$

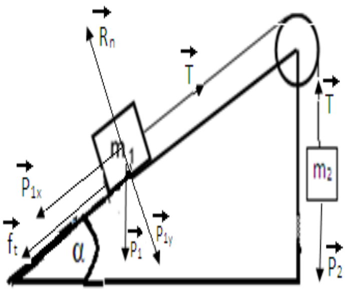
$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{f_t} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{T} = m_1\overrightarrow{a}$

en passant aux projection sur les deux axes *ox* et *oy*

ox/ $-m_1\, gsin\alpha - f_t + T = m_1 a$ ....(4)

oy/ $-m_A\, gcos\alpha + R_N = 0$.......(5)

$\mu_d = \frac{f_t}{R_N} \Rightarrow f_t = \mu_d m_1\, gcos\alpha$



Sur le système m_2 : $\Sigma\vec{F} = m_2\overrightarrow{a}$

$\overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{T} = m_2\overrightarrow{a}$

en passant a la projection sur l'axe *oy*

$m_2\, g - T = m_2 a$ ....(6)

La somme de (4)+(6), donne

$-m_1\, gsin\alpha - \mu_d m_1\, gcos\alpha + m_2\, g = (m_1 + m_2)a$

Donc $a = \frac{-m_1 \sin\alpha - \mu_d m_1 \cos\alpha + m_2}{m_1 + m_2} g = 2.91 m/s^2$

b- $h = \frac{1}{2} a t^2 = 5.83m$ et $v = a\, t = 2.91 m/s$

EXERCICE 3

1- L'expression de la vitesse relative, d'entrainement et absolue

$\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt} = \frac{d(ae^{-t})}{dt}\vec{\imath'} = -ae^{-t}\vec{\imath'}$

$\vec{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'} = \omega\vec{k'} \wedge ae^{-t}\vec{\imath'} = a\omega e^{-t}\vec{\jmath'}$

Donc $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} = -ae^{-t}\vec{\imath'} + a\omega e^{-t}\vec{\jmath'}$

2- L'expression de l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis ainsi que absolue.

$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt} = \frac{d(-ae^{-t})}{dt}\vec{\imath'} = ae^{-t}\vec{\imath'}$

$\vec{a_e} = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM'}\right) = \omega\vec{k'} \wedge \omega a e^{-t}\,\vec{\jmath'} = -a\omega^2 e^{-t}\,\vec{\imath'}$

$\vec{a_c} = 2\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{v_r}\right) = 2\omega\vec{k'} \wedge -ae^{-t}\vec{\imath'} = -2a\omega e^{-t}\,\vec{\jmath'}$

$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c} = -ae^{-t}\vec{\imath'} - a\omega^2 e^{-t}\,\vec{\imath'} - 2a\omega^2 e^{-t}\,\vec{\jmath'}$

$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_c} = ae^{-t}\,(1 - \omega^2)\,\vec{\imath'} - 2a\omega e^{-t}\,\vec{\jmath'}.$

Bibliographie

[1] AHMED FIZAZI, Cahier de la Mécanique du Point Matériel, Office des Publications Universitaires, Algérie, 2013.

[2] ZEBBAR SOUHILA, Mécanique du point matériel cours et exercices, édité par l' institut des sciences et de la technologie du centre universitaire el-wancharissi de tissemsilt, 2018.

[3] http://res-nlp.univ- lemans.fr/NLP_C_M01_G01/co/Contenu%2036.html

[4] https://www.exoco-lmd.com/mecanique-du-point/exercices-corriges-de-mouvement-relatif/

[5] ZIANI NOSSAIR et BOUTAOUS AHMED, Mécanique du point matériel cours et exercices, université des sciences et technologie d'Oran - Mohamed Boudiaf-, 2015/2016.

[6] ALAIN GIBAUD ET MICHEL HENRY, Cours de physique mécanique du point, Edition Dunod

[7] F. MEKIDECHE – CHAFA, A. CHAFA, A. DERBOUZ, A. DIB, M. HACHEMANE, F. KAOUAH, Exercices de Dynamique du point.

[8] S.HADJRI MEBARKI, Z. D. IMEM, A. E. K BOUMAZA, Introduction à la mécanique rédigé en arabe (module SEP200), OPU, 1992.

[9] HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale - live 1: Cinématique du point matériel, OPU, 2016.

[10] HADJRI MEBARKI SORIA, Physique générale - live 2: dynamique du point matériel, OPU, 2016.