Université Sultane Moulay Slimane

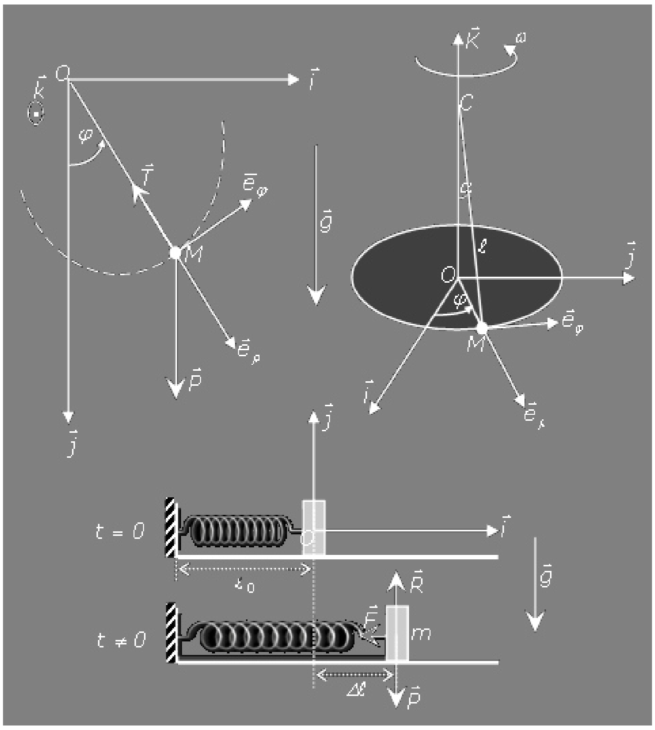
Faculté Polydisciplinaire

Béni Méllal

FILIÈRE :SMP/SMC/SMA

MODULE : M1/M1/M4

Travaux dirigés corrigés
Mécanique du Point Matériel



Préparé par Mohamed LAMSAADI

Année universitaire 2012-2016

Série N° 1
Rappels et Compléments Mathématiques

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}\ ,\ \vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}\ ,\ \vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\ \text{ et }\ \vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$$

1. Représenter les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

2. Calculer $\|\vec{v}_1\|$, $\|\vec{v}_2\|$ et les produits $\vec{v}_1.\vec{v}_2$ et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

3. Calculer l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

4. Montrer que le vecteur $\vec{v}_3$ est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

5. Montrer que le vecteur $\vec{v}_4$ appartient au plan (P)

6. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$

7. Calculer le produit mixte $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ et montrer qu'il est invariant par permutation circulaire.

Exercice 2

On considère dans le plan xOy deux vecteurs unitaires perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tournant autour de l'axe (Oz). Soit $R(O,x,y,z)$ un repère muni de la base O.N.D $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. En posant $(\vec{Ox},\vec{u}) = \theta$ ($\theta = \omega t$, ω est une constante). Soit $\vec{r} = \cos bt\,\vec{i} + \sin bt\,\vec{j} + t^2\vec{k}$ une fonction vectorielle et $\lambda(t) = e^{-at}$ une fonction scalaire (a et b sont des constantes)

1. Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

2. Déterminer le vecteur $\vec{w}$, tel que le système $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ constitue une base O.N.D

3. Calculer $\left.\dfrac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R$ et $\left.\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

4. Calculer $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_R$ et $\left.\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|_R$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

5. Calculer $\left.\dfrac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\dfrac{d(\vec{u}\wedge\vec{r})}{dt}\right|_R$ dans les bases $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 3

1. Considérons deux points A et B, définis en coordonnées cartésiennes par : $A(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$ et $B(0,1,0)$.

Donner les coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) et sphériques (r,θ,φ) de ces deux points, respectivement dans les bases $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

2. Dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point M est repéré, à tout instant t, par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) telles que :

$$r(t) = a\left(e^{-\frac{t}{\tau}} + 1\right),\ \theta(t) = \frac{\pi}{4\tau}t\ \text{ et }\ \varphi(t) = \frac{\pi}{3}$$

(a et τ sont des constantes positives)

Tracer qualitativement la courbe (C) décrite par les positions successives du point M quand t varie de 0 à 2τ.

Exercice 4

Considérons un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. En tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, on définit une quantité physique f telle que : $f(x,y,z)=r^2$ avec $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

1. Calculer le gradient du champ scalaire *f*, $\overrightarrow{grad f}$, et la différentielle totale de *f, df.*

2. Montrer qu'en tout point *M*, $df=\overrightarrow{grad f}\,d\overrightarrow{OM}$ ($d\overrightarrow{OM}$ est le vecteur déplacement élémentaire)

3. Considérons le champ scalaire *f*, donné en tout point de l'espace par :

$$f(M)=3r^3\sin^2(\theta)\cos(\theta)\sin(2\varphi)$$

Exprimer $\overrightarrow{grad f}$ dans les bases sphérique $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ et cartésienne $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

4. Soit une fonction vectorielle $\vec{f}(x,y,z)$ définie dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par :

$$\vec{f}(x,y,z)=x^2yz\,\vec{i}+xy^2z\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

Calculer $div\vec{f}$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{f}$.

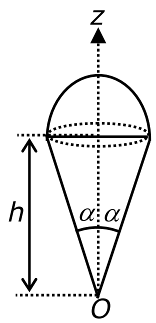
Exercice 5

Un enfant achète un cornet de glace. La glace fait une demi boule (sphérique) et remplit le cornet (de forme conique) de hauteur h = 11cm et d'angle $2\alpha=30°$ (figure ci-contre).

1. Calculer le volume V_b de la demi boule en fonction de h et $tan(\alpha)$.

2. Calculer le volume V_c du cornet en fonction de h et $tan(\alpha)$.

3. En déduire le volume total de la glace (exprimé en litre) que mangera l'enfant.



devoir à la maison

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis à tout instant t par : $\vec{u}=\sin(t)\vec{i}+\cos(2t)\vec{j}+t^2\vec{k}$, $\vec{v}=e^{-t}\vec{i}-2\cos(3t)\vec{j}+\sin(3t)\vec{k}$

1. Déterminer $\dfrac{d\vec{u}}{dt/\Re}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{dt/\Re}$ à l'instant t = 0.

2. Déterminer l'instant t1 où le vecteur $\vec{w}=e^{3t}\vec{i}+\cos(3t)\vec{j}-2\sin(3t)\vec{k}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$.

Exercice 2

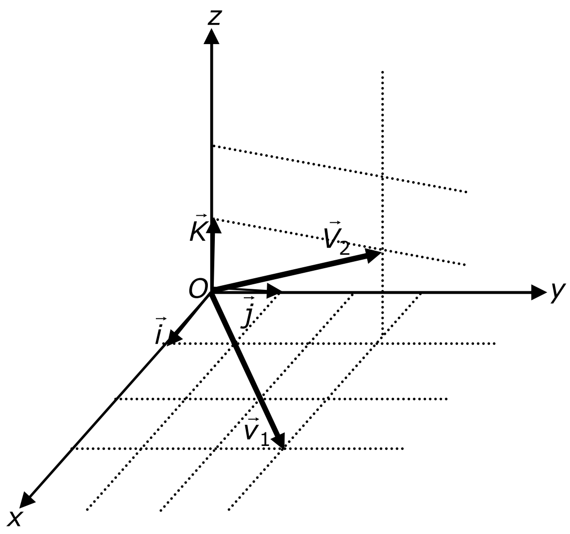
Dans le plan horizontal (xoy) d'un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un point M est repéré à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ,φ) telles que $\rho(t)=a\cos(\omega t)$ et $\varphi(t)=\omega t$ (a et ω étant des constantes positives, $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{e}_\rho$ et $\varphi=\left(\overrightarrow{Ox}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OM}\right)$)

1. Dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$, calculer le vecteur $\vec{v}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}$

2. Dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$, déterminer puis représenter les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$ à l'instant $t=\pi/(4\omega)s$

Exercice 1

1.



2.

- $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{3^2+3^2+0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ **,** $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}$
- $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 3\times 1 + 3\times 3 + 0\times 1 = 12$
- $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (3\times 1 - 0\times 3)\vec{i} - (3\times 1 - 0\times 1)\vec{j} + (3\times 3 - 3\times 1)\vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

3.

$$\left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right) = arccos\left(\frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|}\right) = arccos\left(\frac{12}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = arccos\left(\frac{4}{\sqrt{22}}\right)$$

Ou bien $\left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right) = arcsin\left(\frac{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|}\right) = arcsin\left(\frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$

$$\Rightarrow \left(\vec{v}_1 \hat{,} \vec{v}_2\right) = 31.48°$$

4.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1.\vec{v}_3 = 3\times 1 - 3\times 1 + 0\times 2 = 0 \\ \vec{v}_2.\vec{v}_3 = 1\times 1 - 3\times 1 + 1\times 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_3 \text{ et } \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}_3 \perp (P)$$

5.

$\vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{K} \Rightarrow \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_4 \in (P)$

6.

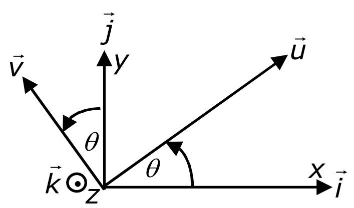
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{53}} \Rightarrow \vec{u} = \frac{4}{\sqrt{53}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{53}}\vec{k}$$

7.

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3) = \vec{v}_1(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = 18 \\ (\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_1) = \vec{v}_2(\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1) = 18 \\ (\vec{v}_3,\vec{v}_1,\vec{v}_2) = \vec{v}_3(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3) = (\vec{v}_2,\vec{v}_3,\vec{v}_1) = (\vec{v}_3,\vec{v}_1,\vec{v}_2)$$

$\Rightarrow (\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ est invariant par permutation circulaire.

Exercice 2



1.
$\vec{u} = cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}$, $\vec{v} = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}$
2.
Pour que le système $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ constitue une base O.N.D, if faut $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right) \wedge \left(-sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}\right) = \vec{k} \Rightarrow \vec{w} = \vec{k}$$

3.

$$\left.\frac{d\vec{u}}{d\theta}\right|_R = \left.\frac{d\left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right)}{d\theta}\right|_R = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j} = \vec{v}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{d\theta}\right|_R = \left.\frac{d\left(-sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}\right)}{d\theta}\right|_R = -cos(\theta)\vec{i} - sin(\theta)\vec{j} = -\vec{u}$$

4.

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right)}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{i} + \dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{j} = \dot{\theta}\vec{v} = \omega\vec{v}$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\left(-sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}\right)}{dt}\right|_R = -\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i} - \dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{j} = -\dot{\theta}\vec{u} = -\omega\vec{u}$$

5.

$$\left.\frac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R = \lambda\left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_R + \vec{r}\,\frac{d\lambda}{dt}$$

$$\left.\frac{d\,\vec{r}}{dt}\right|_R = -b\,sin(bt)\,\vec{i} + bcos(bt)\,\vec{j} + 2t\vec{k}\ ,\ \frac{d\lambda}{dt} = -ae^{-at}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R = e^{-at}\left[\left(-b\,sin(bt) - a\,cos(bt)\right)\vec{i} + \left(bcos(bt) - asin(bt)\right)\vec{j} + \left(2t - at^2\right)\vec{k}\right]$$

$$\left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R \wedge \vec{r} + \vec{u} \wedge \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R \wedge \vec{r} = \left(-\omega\,sin(\theta)\vec{i} + \omega\,cos(\theta)\vec{j}\right) \wedge \left(cos(bt)\,\vec{i} + sin(bt)\,\vec{j} + t^2\vec{k}\right)$$

$$= -\omega\,sin(\theta)sin(bt)\vec{k} + \omega\,sin(\theta)t^2\,\vec{j} - \omega\,cos(\theta)\,cos(bt)\vec{k} + \omega\,cos(\theta)t^2\,\vec{i}$$

$$= \omega\,cos(\theta)t^2\,\vec{i} + \omega\,sin(\theta)t^2\,\vec{j} - \left(\omega\,sin(\theta)sin(bt) + \omega\,cos(\theta)\,cos(bt)\right)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_R = \left(cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}\right) \wedge \left(-b\,sin(bt)\,\vec{i} + bcos(bt)\,\vec{j} + 2t\vec{k}\right)$$

$$= cos(\theta)bcos(bt)\vec{k} - 2t\,cos(\theta)\vec{j} + sin(\theta)b\,sin(bt)\vec{k} + 2t\,sin(\theta)\vec{i}$$

$$= 2t\,sin(\theta)\vec{i} - 2t\,cos(\theta)\vec{j} + \left(cos(\theta)bcos(bt) + sin(\theta)b\,sin(bt)\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R = \omega\,cos(\theta)t^2\,\vec{i} + \omega\,sin(\theta)t^2\,\vec{j} - \left(\omega\,sin(\theta)sin(bt) + \omega\,cos(\theta)\,cos(bt)\right)\vec{k}$$

$$+ 2t\,sin(\theta)\vec{i} - 2t\,cos(\theta)\vec{j}\left(cos(\theta)bcos(bt) + sin(\theta)b\,sin(bt)\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R = \left(\omega\,cos(\theta)t^2 + 2t\,sin(\theta)\right)\vec{i} + \left(\omega\,sin(\theta)t^2 - 2t\,cos(\theta)\right)\vec{j}$$

$$+ (b - \omega)\,cos(\theta - bt)\vec{k}$$

Pour exprimer les dérivées $\left.\frac{d(\lambda\,\vec{r})}{dt}\right|_R$ et $\left.\frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt}\right|_R$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, il faut exprimer $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ en fonction de la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 3

1.
$x = \rho\,cos(\varphi)$ et $y = \rho\,sin(\varphi)$

$x = r\,sin(\theta)cos(\varphi)$, $y = r\,sin(\theta)sin(\varphi)$ et $z = r\,cos(\theta)$

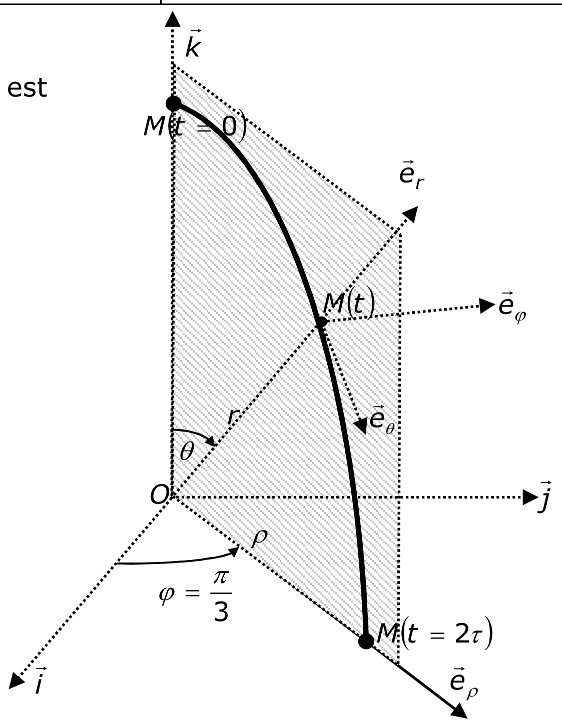
$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \varphi = arctan\left(\frac{y}{x}\right) = arcsin\left(\frac{y}{\rho}\right) = arccos\left(\frac{x}{\rho}\right),\ r = \sqrt{\rho^2 + z^2}\ ,$$

$$\theta = arctan\,g\left(\frac{\rho}{z}\right) = arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)	Coordonnées sphériques (r, θ, φ)
$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$	$\left(2, \frac{\pi}{4}, 2\right)$	$\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
$(0,1,0)$	$\left(1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2.

La coordonnée φ est fixe, donc la courbe (C) est dans le plan méridien.
Quand le temps t augmente de 0 à 2τ, la distance r diminue et l'angle θ augmente



Exercice 4

1. $f(x, y, z) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \Rightarrow \overrightarrow{gradf} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}\ ,\ df = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

2.

$$\overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\ , d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{gradf}\ d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

3.

$$\overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\,sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 9r^2\,sin^2(\theta)cos(\theta)sin(2\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3\,sin(2\varphi)\left(2\,sin(\theta)cos^2(\theta) - sin^3(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 6r^3\,sin^2(\theta)cos(\theta)cos(2\varphi)$$

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{gradf} = \left(9r^2\,sin^2(\theta)cos(\theta)sin(2\varphi)\right)\vec{e}_r \\ \Rightarrow \quad & + 3r^2\,sin(2\varphi)\left(2\,sin(\theta)cos^2(\theta) - sin^3(\theta)\right)\vec{e}_\theta \\ & + 6r^2\,sin(\theta)cos(\theta)cos(2\varphi)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes, la fonction *f* est exprimée par :

$$f(r,\theta,\varphi) = 3r^3\ sin^2(\theta)cos(\theta)sin(2\varphi)$$

$$x = r\ sin(\theta)cos(\varphi),\ y = r\ sin(\theta)sin(\varphi) \text{ et } z = r\ cos(\theta) \Rightarrow f(x,y,z) = 6xyz$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{gradf} = 6yz\vec{i} + 6xz\vec{j} + 6xy\vec{k}$$

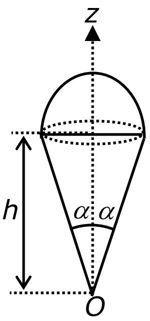
4.

$$\vec{f}(x,y,z) = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + z\,\vec{k} \Rightarrow f_x = x^2yz\,, f_y = xy^2z\,, f_z = z$$

$$div\vec{f} = \vec{\nabla}\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \Rightarrow div\vec{f} = 2xyz + 2xyz + 1 = 4xyz + 1$$

$$\overrightarrow{rotf} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{rotf} = -xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + \left(y^2z - x^2z\right)\vec{k}$$

<u>Exercice 5</u>



1.

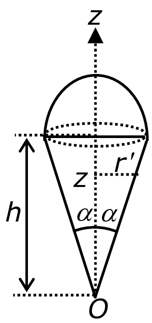
Volume de la demi-boule, v_b :

$dv = r^2\ sin(\theta)drd\theta d\varphi$: élément de volume en coordonnées sphériques.

$$0 \le r \le R\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow v_b = \int dv = \int_0^R r^2dr\int_0^{\pi/2} sin(\theta)d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3}.1.2\pi = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$tan(\alpha) = \frac{R}{h} \Rightarrow v_b = \frac{2\pi h^3}{3}tan^3(\alpha)$$



2.

Volume du cornet, v_c :

$dv = rdrd\varphi dz$: élément de volume en coordonnées cylindriques.

$$0 \le r \le r'\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ 0 \le z \le h$$

$$tan(\alpha) = \frac{r'}{z} = \frac{R}{h} \to r' = \frac{R}{h}z$$

$$\Rightarrow v_c = \int dv = \int_0^{r'} rdr\int_0^h dz\int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^h\left(\int_0^{\frac{R}{h}z} rdr\right)dz\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\int_0^h \frac{R^2}{2h^2}z^2dz = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^2dz = \frac{\pi R^2}{h^2}\frac{h^3}{3}$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$tan(\alpha) = \frac{R}{h} \Rightarrow v_c = \frac{\pi h^3}{3}tan^2(\alpha)$$

3.

Quantité de glace exprimée en litre :

$$V_T = v_b + v_c = \frac{2\pi h^3}{3}tan^3(\alpha) + \frac{\pi h^3}{3}tan^2(\alpha) = \frac{\pi h^3}{3}\left(2\,tan^3(\alpha) + tan^2(\alpha)\right)$$

$$h = 11cm,\ \alpha = 15° \Rightarrow V_T = 153.7cm^3\quad V_T = 153.7cm^3 \Rightarrow V_T = 0.1537litres$$

Série N° 2
Cinématique du Point Matériel et changement de référentiel

Exercice 1

Les coordonnées d'un point matériel *M* dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t) = t-1$, $y(t) = -t^2+1$ et $z(t) = 0$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de *M*.
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de *M*.
3. Calculer les accélérations tangentielle et normale de *M*.
4. Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 2

On considère un point *M* en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant: $\rho(t)=a_0\, t^2+\rho_0$, $\varphi(t)=\omega t-\varphi_0$ et $z(t)=-vt$, avec ρ_0=1m, a_0=1m.s^{-2}, ω=3rad.s^{-1}, φ_0=2rad et v=2m.s^{-1}.

1. Exprimer dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de *M*.
2. Calculer la norme du vecteur vitesse de *M* à l'instant t = 1 s.
3. Calculer la norme du vecteur accélération de *M* à l'instant initial (t = 0 s).

Exercice 3

L'abscisse curviligne d'un point matériel *M* décrivant un cercle de rayon *R* est $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + b\,t$, *a* et *b* étant des constantes.

1. Exprimer, dans la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$, les accélérations tangentielle et normale de *M*.
2. Déduire le module de l'accélération de *M*.

Exercice 4

On considère un point *M* en mouvement dans le plan *xOy*. *M* est repéré par ses coordonnées polaires suivantes : $\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+\cos\varphi);\ \varphi = \omega t$ où ρ_0 et ω sont des constantes positives.

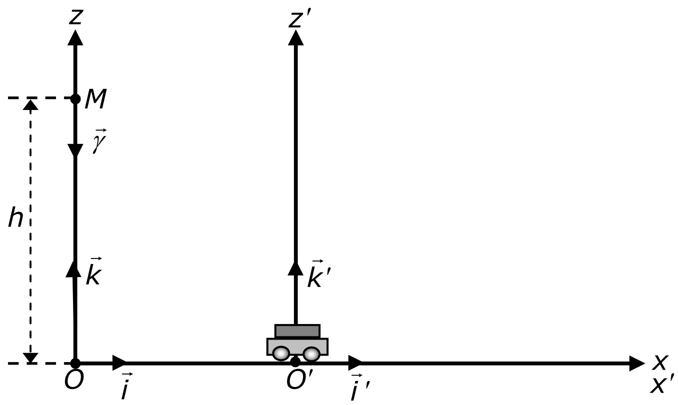
1. Quelle est l'allure de la trajectoire de *M*.
2. Exprimer, en fonction de l'angle φ, l'abscisse curviligne s de *M*, comptée à partir du point *A* qui correspond à φ = 0. Pour quel angle polaire a-t-on $s = \rho_0$? On désignera par *B* la position correspondante de *M*.
3. En déduire le périmètre de la trajectoire.
4. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi)$, les vecteurs vitesse et accélération de *M*
5. En déduire, les modules de la vitesse et de l'accélération de *M* en fonction de ρ.
6. Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire.
7. Déterminer les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$.
8. Calculer les accélérations tangentielle et normale de *M*.
9. Application numérique : ρ_0 = 50cm, ω = 3.2rad/s. Calculer la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure en *A* et *B*.

Exercice 5

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur *h* une bille *M* sans vitesse initiale. Dans un référentiel $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à cet immeuble, la chute de celle-ci s'effectue verticalement selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = -g\vec{k}$ (voir la figure ci-dessous).

1. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans un référentiel $R'(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O',\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$.

2. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans le même référentiel $R'(O',\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$ si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = a\vec{i}$. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O',\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,')$.



devoir à la maison

Exercice 1

Une particule M se déplace sur l'axe Ox, de vecteur unitaire $\vec{i}$, avec une accélération négative, proportionnelle à la vitesse à chaque instant: $\vec{\gamma} = -k\,v\vec{i}$ (k est une constante positive). A l'instant t = 0, elle passe en O avec une vitesse v_0 = 20 m s^{-1}.

1. Déterminer la loi $v(x)$ (la vitesse au point x).

2. A quelle vitesse et à quel instant la particule passera-t-elle à 150 m de l'origine O, si le module de l'accélération à l'instant 0 vaut 2 m s^{-2} ?

Exercice n2

Un nageur plonge d'un point A situé sur une rive d'un fleuve de largeur ℓ et veut atteindre l'autre rive en un point B situé juste en face de A. Pour cela, il nage suivant une direction faisant un angle α avec (AB). Sa vitesse par rapport à l'eau est v et la vitesse du courant est u.

1. Sur un schéma, représenter vectoriellement les vitesses et déterminer l'angle α en fonction de v et u.

2. Exprimer, en fonction de ℓ, u et v,le temps nécessaire t (temps de traversée) pour que le nageur traversera la fleuve.

3. Que devient ce temps si le point B n'est pas situé en face de A.

Solution de série N° 2
Cinématique du Point Matériel et changement de référentiel

Exercice 1

1.

$x(t)+1=t \Rightarrow$, $y=-x^2-2x$ (équation de la trajectoire) $\Rightarrow$ la trajectoire est une parabole.

2.

$$\vec{v}(M/\Re)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}=\vec{i}-2t\vec{j}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2/\Re}=\frac{d^2x}{d^2t}\vec{i}+\frac{d^2y}{d^2t}\vec{j}+\frac{d^2z}{d^2t}\vec{k}=-2\vec{j}$$

3.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t=\dfrac{d\|\vec{v}(M/\Re)\|}{dt}\vec{\tau}$

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{v}(M/\Re)}{\|\vec{v}(M/\Re)\|}=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}\,,\quad \frac{d\|\vec{v}(M/\Re)\|}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{1+4t^2}\right)}{dt}=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_t=\frac{4t}{1+4t^2}\vec{i}-\frac{8t^2}{1+4t^2}\vec{j}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n=\vec{\gamma}(M/\Re)-\vec{\gamma}_t$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_n=-\frac{4t}{1+4t^2}\vec{i}-\frac{2}{1+4t^2}\vec{j}$$

4.

Rayon de courbure : $R_c=\dfrac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^3}{\|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\|}=\dfrac{\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$

$$\Rightarrow R_c=\frac{\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Ou bien

$$\vec{\gamma}_n=\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c}\vec{n}\Rightarrow\|\vec{\gamma}_n\|=\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c}\|\vec{n}\|\,,\ \|\vec{n}\|=1$$

$$\Rightarrow R_c=\frac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{\|\vec{\gamma}_n\|}=\frac{\left(1+4t^2\right)}{\sqrt{\left(\frac{4t}{1+4t^2}\right)^2+\left(\frac{2}{1+4t^2}\right)^2}}=\frac{\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Exercice 2

1.

$$\vec{v}(M/\Re)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re}=\frac{d\left(\rho\vec{e}_\rho+z\vec{k}\right)}{dt/\Re}=\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho+\rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re)=2a_0t\vec{e}_\rho+\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega\vec{e}_\varphi-v\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}(M/\Re)\|=\sqrt{(2a_0t)^2+\left(\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega\right)^2+v^2}$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re}=2a_0\vec{e}_\rho+2a_0\omega t\vec{e}_\varphi+2a_0\omega t\vec{e}_\varphi-\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re)=\left[2a_0-\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega^2\right]\vec{e}_\rho+4a_0\omega t\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\Re)\|=\sqrt{\left[2a_0-\left(a_0t^2+\rho_0\right)\omega^2\right]^2+(4a_0\omega t)^2}$$

2.

Norme du vecteur vitesse de M à l'instant $t=1$ s.

$$\|\vec{v}(M/\Re)\| = \sqrt{(2a_0)^2 + ((a_0+\rho_0)\omega)^2 + v^2} = 6.63 m/s$$

3.

Norme du vecteur accélération de *M* à l'instant initial (t = 0 s).

$$\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \sqrt{\left(2a_0 - \rho_0\omega^2\right)^2} = 7ms^{-2}$$

Exercice 3

1.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t = \dfrac{d\|\vec{v}(M/\Re)\|}{dt}\vec{\tau} = \ddot{s}\vec{\tau}$

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = a \Rightarrow \vec{\gamma}_t = a\vec{\tau}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n = \dfrac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^2}{R_c}\vec{n}$

Le point *M* décrit un cercle de rayon *R* ⇒ Le rayon de courbure est $R_c = R$

$$\vec{v}(M/\Re) = \dot{s}\vec{\tau} \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{\|\dot{s}\|^2}{R}\vec{n} = \frac{(at+b)^2}{R}\vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{(at+b)^2}{R}\vec{n}$$

2.

Module de l'accélération de *M* :

$\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$ ($\Re$ est le référentiel dans lequel M décrit le cercle)

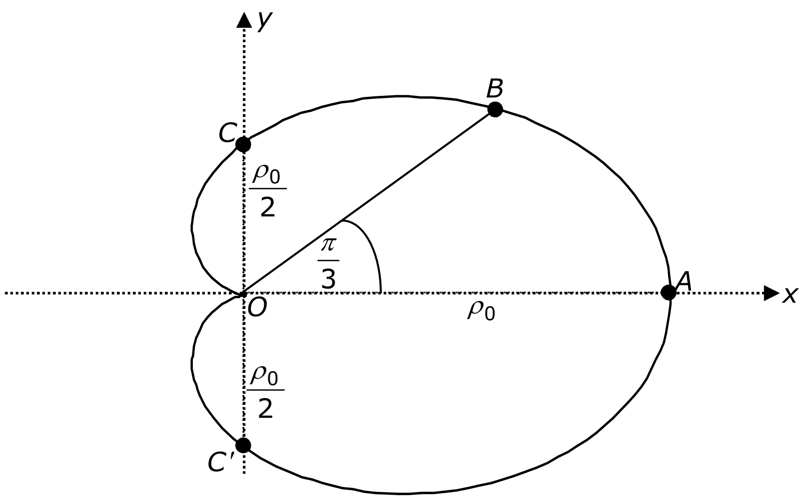
$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\Re)\|^2 = \|\vec{\gamma}_t\|^2 + \|\vec{\gamma}_n\|^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\Re)\|^2 = a^2 + \frac{(at+b)^4}{R^2}$$

$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \left(a^2 + \frac{(at+b)^4}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 4

1.



La trajectoire de *M* est une cardioïde. Elle admet l'axe (*Ox*) comme un axe de symétrie. Elle coupe cet axe en $O(\rho = 0, \varphi = \pi)$ et en $A(\rho = \rho_0, \varphi = 0)$. Elle rencontre l'axe (*Oy*) en $C\left(\rho = \dfrac{\rho_0}{2}, \varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$ et en $C'\left(\rho = \dfrac{\rho_0}{2}, \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.

En coordonnées polaires : $d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi$

En coordonnées curvilignes : $d\overrightarrow{OM} = ds\vec{\tau}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi)) \Rightarrow d\rho = -\frac{\rho_0}{2}sin(\varphi)d\varphi \Rightarrow ds = \sqrt{\left(-\frac{\rho_0}{2}sin(\varphi)d\varphi\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))d\varphi\right)^2}$$

$$\Rightarrow ds = \frac{\rho_0}{2}d\varphi\sqrt{2(1+cos(\varphi))} \Rightarrow ds = \rho_0\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi \Rightarrow s = \int \rho_0\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$\Rightarrow s = 2\rho_0\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + s_0$$

L'abscisse curviligne s de M est comptée à partir du point A, c-à-d $s = 0$ en A.
$\Rightarrow s = 0$ si $\varphi = 0 \Rightarrow s(\varphi = 0) = 2\rho_0\, sin(0) + s_0 = 0 \Rightarrow s_0 = 0$

$$\Rightarrow s = 2\rho_0\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Si $s = \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = 2\rho_0\, sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\rho_0}{2}\left(1 + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{4}\rho_0 \Rightarrow B\left(\frac{3}{4}\rho_0, \frac{\pi}{3}\right)$$

3.

Le demi périmètre (demi longueur de la trajectoire) est la longueur de l'arc AO.

$$\frac{1}{2}P = \int_A^O ds = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \rho_0\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 2\rho_0\left[sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^\pi = 2\rho_0$$

$\Rightarrow$ le périmètre de la trajectoire est $P = 4\rho_0$

4.

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} = -\frac{\rho_0}{2}\omega\, sin(\varphi)\vec{e}_\rho + \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))\omega\vec{e}_\varphi$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} = -\frac{\rho_0}{2}\omega^2 cos(\varphi)\vec{e}_\rho - \frac{\rho_0}{2}\omega^2 sin(\varphi)\vec{e}_\varphi - \frac{\rho_0}{2}sin(\varphi)\omega^2\vec{e}_\varphi - \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$= -\left(\rho_0\, cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\vec{e}_\rho - \rho_0\omega^2 sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

5.

$$\|\vec{v}(M/\Re)\| = \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{2}\omega\, sin(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi))\omega\right)^2} = \rho_0\omega\, cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \sqrt{\left(\left(\rho_0\, cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\right)^2 + \left(\rho_0\omega^2 sin(\varphi)\right)^2} = \frac{\rho_0}{2}\omega^2\sqrt{1 + 8\, cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On exprime $\|\vec{v}(M/\Re)\|$ et $\|\vec{\gamma}(M/\Re)\|$ en fonction de ρ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1+cos(\varphi)) \Rightarrow \rho = \rho_0\, cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}(M/\Re)\| = \omega\sqrt{\rho_0\rho}\ ,\ \|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\rho_0^2 + 8\rho_0\rho}$$

6.

Rayon de courbure R_c de la trajectoire : $R_c = \dfrac{\|\vec{v}(M/\Re)\|^3}{\|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\|}$

$$\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)=\frac{\rho_0^2\omega^3}{2}\,sin^2(\varphi)\vec{e}_z+\frac{\rho_0\omega}{2}(1+cos(\varphi))\left(\rho_0\omega^2\,cos(\varphi)+\frac{\rho_0\omega^2}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$=\frac{3}{2}\rho_0^2\omega^3\,cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow\ \left\|\vec{v}(M/\Re)\wedge\vec{\gamma}(M/\Re)\right\|=\frac{3}{2}\rho_0^2\omega^3\,cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$R_c=\frac{\left(\rho_0\omega\,cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^3}{\frac{3}{2}\rho_0^2\omega^3\,cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\Rightarrow R_c=\frac{2}{3}\rho_0\,cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

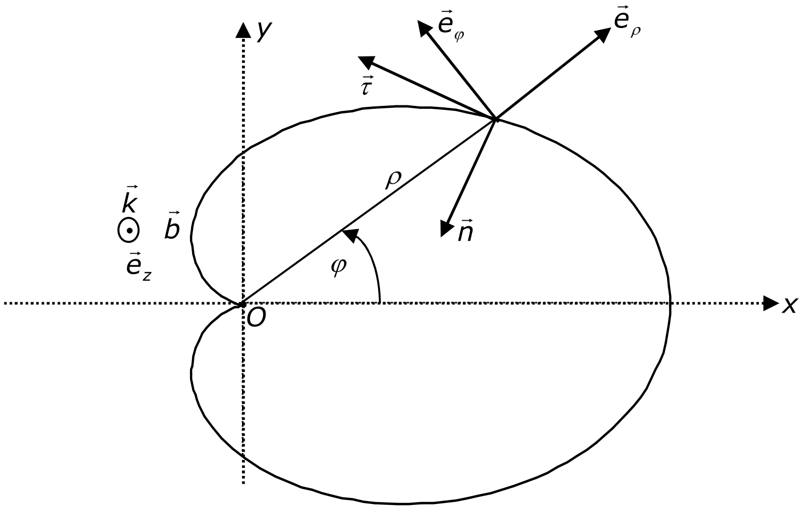
7.

Les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$:

- $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{v}(M/\Re)}{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}=-sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho+cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$
- le mouvement de M se fait dans le plan (xoy) $\Rightarrow$ $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ $\in$ (xoy).

$$\Rightarrow\ \vec{k}\perp\vec{\tau}\ \text{ et }\ \vec{k}\perp\vec{n}\ \Rightarrow\ \vec{b}=\vec{k}$$

- $\vec{n}=\vec{b}\wedge\vec{\tau}=\vec{k}\wedge\vec{\tau}\ \Rightarrow\ \ \vec{n}=-cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho-sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$



A chaque instant t, le point M appartient à un cercle de rayon $R_c=R_c(\varphi)$ et de centre C tel que $\overrightarrow{MC}=R_c\vec{n}$

8.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t=\dfrac{d\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|}{dt}\vec{\tau}=\ddot{s}\vec{\tau}$

$$s=2\rho_0\,sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ \Rightarrow\ \ddot{s}=\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{\rho_0\omega^2}{2}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ \Rightarrow\ \vec{\gamma}_t=-\frac{\rho_0\omega^2}{2}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{\tau}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n=\dfrac{\left\|\vec{v}(M/\Re)\right\|^2}{R_c}\vec{n}=\dfrac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{n}$

$$\dot{s} = \rho_0\omega\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{\left(\rho_0\omega\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}{\frac{2}{3}\rho_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\vec{n} \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}$$

On vérifie que $\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$?

$$\vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = -\frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{\tau} + \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = -\frac{\rho_0\omega^2}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right) + \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= -\left(\rho_0\cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\vec{e}_\rho - \rho_0\omega^2\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$$

9.

Application numérique (ρ_0=50cm, ω=3.2rad/s) :

- En A :

$$\|\vec{v}(M/\Re)\| = \rho_0\omega = 1.6m/s$$

$$\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2 = 7.5m/s^2$$

$$R_c = \frac{2}{3}\rho_0 = 0.33m$$

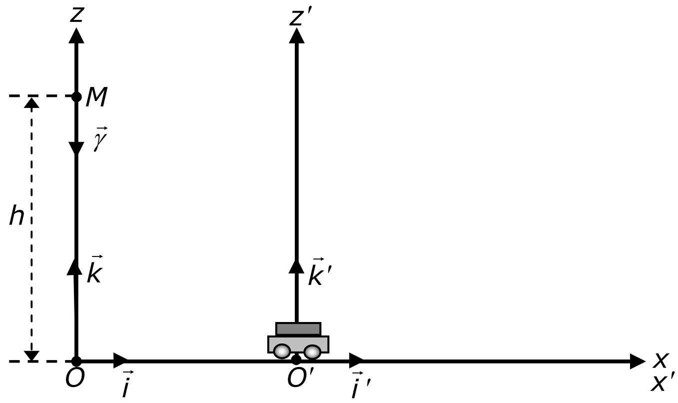
- En B :

$$\|\vec{v}(M/\Re)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\rho_0\omega = 1.38m/s$$

$$\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = \frac{\sqrt{7}}{2}\rho_0\omega^2 = 6.6m/s^2$$

$$R_c = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho_0 = 0.29m$$

<u>Exercice 5</u>



Le vecteur position de la bille dans le référentiel $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est :

$$\overrightarrow{OM} = z\vec{k} \quad (x = y = 0)$$

La bille est en chute libre sans vitesse initiale dans $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec une accélération $\vec{\gamma} = -g\vec{k}$

$$\Rightarrow \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} = -g \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

A $t = 0$, $v_0 = 0$, $z_0 = h \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}$

Le vecteur position de la bille dans le référentiel $\Re'\left(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'\right)$ est :

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'$$

$\vec{i} = \vec{i}\,'$, $\vec{k} = \vec{k}\,'$ et $y' = 0$ (le mouvement de M se fait dans le plan (xoz)) $\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + z'\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$

1.

1^er cas : $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est en mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher :

Le point O' est fixe dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,') \Rightarrow \vec{v}(O'/\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt/\Re} = u\vec{i} = \dfrac{dx_{O'}}{dt}\vec{i}$

$$\Rightarrow x_{O'} = ut + C$$

A $t = 0 \rightarrow O \equiv O' \rightarrow x_{O'} = 0 \rightarrow C = 0 \Rightarrow x_{O'} = ut \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = ut\vec{i}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}\,' + z'\vec{k}\,' = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}\,' - ut\vec{i}\,'$$

$\Rightarrow x' = -ut$ et $z' = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow z' = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x'^2}{u^2} + h$

$\Rightarrow$ la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est une parabole.

2.

2^ème cas : $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est en mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = a\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher :

Le point O' est fixe dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,') \Rightarrow \vec{\gamma}(O'/\Re) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2/\Re} = a\vec{i} = \dfrac{d^2x_{O'}}{dt^2}\vec{i}$

$$\Rightarrow x_{O'} = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2$$

A $t = 0 \rightarrow O \equiv O' \rightarrow x_{O'} = 0$, $\dot{x}_{O'} = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow x_{O'} = \dfrac{1}{2}at^2 \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \dfrac{1}{2}at^2\vec{i}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}\,' + z'\vec{k}\,' = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}\,' - \frac{1}{2}at^2\vec{i}\,'$$

$\Rightarrow x' = -\dfrac{1}{2}at^2$ et $z' = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow z' = \dfrac{g}{a}x' + h$

$\Rightarrow$ la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$ est une droite d'équation $z' = \dfrac{g}{a}x' + h$.

<u>**Série N° 3**</u>

Dynamique du Point Matériel

<u>**Exercice 1**</u> **:**

On considère le repère $\Re(Oxyz)$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. Dans ce plan (P), un anneau M assimilé à un point matériel de masse m se meut sans frottement, dans le champ de pesanteur, sur un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon r. La position de O_1 est définie par les paramètres a et b (a et b sont des constantes), celle de M est définie par l'angle $\theta(t)$ (voir figure 1). On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié au plan (P) (repère relatif) tel que le plan $(x_1O_1z_1)$ reste constamment dans le plan (P) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. On suppose que $\theta = \dot{\theta} = 0$ à t=0.

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:

- **a.** le vecteur rotation de R_1 par rapport à $\Re$: $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$;
- **b.** les vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M;
- **c.** les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue du point M;
- **d.** le poids de M et les forces d'inertie.

2. En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par θ et les composantes de la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$. En déduire une relation entre θ et $\dot{\theta}$.

3. que deviennent ces résultats si le plan (P) est fixe.

<u>**Exercice 2**</u> **:**

1. On considère un camion immobile à benne baissée. On pose sur la benne une brique de masse m = 3 kg. Le camion soulève sa benne progressivement. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre la benne et la brique sont respectivement k_s = 0.6 et K_d = 0.3.

- **a.** Calculer l'angle α_0 d'inclinaison de la benne par rapport à l'horizontale pour provoquer le glissement de la brique.
- **b.** Si α = 45°, déterminer l'accélération de la brique. On donne g = 10 m.s^{-2}.

2. Le camion roule maintenant en ligne droite avec une vitesse constante v_c. Une boîte, considérée comme ponctuelle, glisse sur sa benne avec une vitesse $v_b = 0.5\, m.s^{-1}$ (voir figure 2). Sachant que la benne est inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle α = 60°,

- **a.** Déterminer la vitesse du camion pour qu'un observateur au sol puisse voir la boîte tomber verticalement. En déduire la vitesse de la boîte par rapport au sol.
- **b.** Que devient la vitesse de la boîte par rapport au sol si la vitesse du camion est $v_c = 0.5 m.s^{-1}$. Faire le schéma de composition des vitesses.

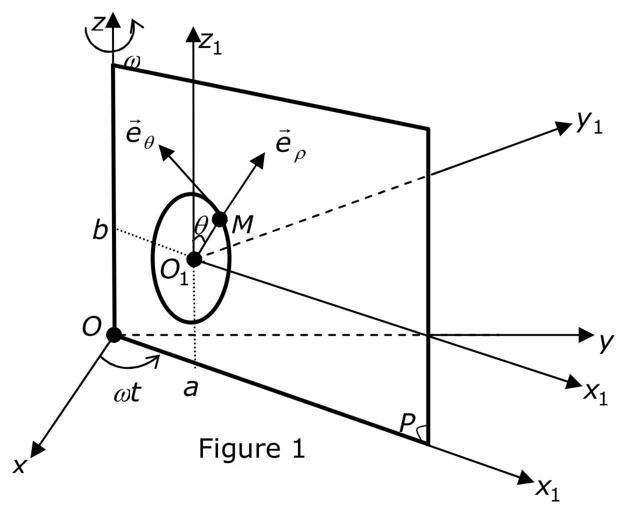


Figure 1

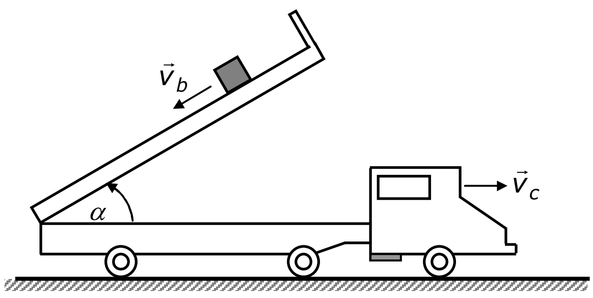
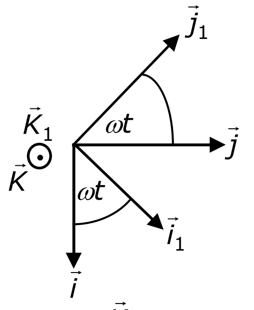


Figure 2

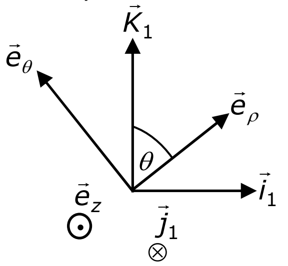
Solution de série N° 3
Dynamique du Point Matériel

Exercice 1 :



$$\vec{i}_1 = cos(\omega t)\vec{i} + sin(\omega t)\vec{j}\ ,\ \vec{j}_1 = -sin(\omega t)\vec{i} + cos(\omega t)\vec{j}\ ,\ \vec{k}_1 = \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt\,/\,\Re} = \omega\vec{j}_1\ ,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt\,/\,\Re} = -\omega\vec{i}_1\ ,\ \frac{d\vec{k}_1}{dt\,/\,\Re} = \vec{0}$$



$$\vec{e}_\rho = sin(\theta)\vec{i}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1\ ,\ \vec{e}_\theta = -cos(\theta)\vec{i}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1\ ,\ \vec{e}_z = -\vec{j}_1$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt\,/\,\Re_1} = -\dot{\theta}\vec{e}_\theta\ ,\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt\,/\,\Re_1} = \dot{\theta}\vec{e}_\rho\ ,\ \frac{d\vec{e}_z}{dt\,/\,\Re_1} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$, $\overrightarrow{OO_1} = a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1$, $\overrightarrow{O_1M} = r\vec{e}_\rho$ (r, a, b sont des constantes)

1.

On exprime dans la base ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) :

a. le vecteur rotation de R_1 par rapport à R: $\vec{\Omega}(R_1\,/\,R)$:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt\,/\,\Re} = \omega\vec{j}_1 = \boldsymbol{\omega\vec{k}_1} \wedge \vec{i}_1\ ,\ \frac{d\vec{j}_1}{dt\,/\,\Re} = -\omega\vec{i}_1 = \boldsymbol{\omega\vec{k}_1} \wedge \vec{j}_1\ ,\ \frac{d\vec{k}_1}{dt\,/\,\Re} = \vec{0} = \boldsymbol{\omega\vec{k}_1} \wedge \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow\ \vec{\Omega}(\Re_1\,/\,\Re) = \omega\vec{k}_1$$

b. les vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M :

- $\vec{v}_r(M) = \vec{v}(M\,/\,\Re_1) = \dfrac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt\,/\,\Re_1} = \dfrac{d(r\vec{e}_\rho)}{dt\,/\,\Re_1} = r\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt\,/\,\Re_1} = -r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\Rightarrow\ \vec{v}_r(M) = r\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{k}_1$: vitesse relative

- $\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_1\,/\,\Re) + \vec{\Omega}(\Re_1\,/\,\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

$\vec{v}(O_1\,/\,\Re) = \dfrac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt\,/\,\Re} = \dfrac{d(a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1)}{dt\,/\,\Re} = a\dfrac{d\vec{i}_1}{dt\,/\,\Re} + b\dfrac{d\vec{k}_1}{dt\,/\,\Re} = a\omega\vec{j}_1$

$\vec{\Omega}(\Re_1\,/\,\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \omega\vec{k}_1 \wedge r\vec{e}_\rho = \omega\vec{k}_1 \wedge r\left(sin(\theta)\vec{i}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1\right) = r\omega\,sin(\theta)\vec{j}_1$

$\Rightarrow\ \vec{v}_e(M) = (a\omega + r\omega\,sin(\theta))\vec{j}_1$: vitesse d'entraînement

- $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = r\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{k}_1 + (a\omega + r\omega\,sin(\theta))\vec{j}_1$

$\Rightarrow\ \vec{v}_a(M) = r\dot{\theta}\,cos(\theta)\vec{i}_1 + (a\omega + r\omega\,sin(\theta))\vec{j}_1 - r\dot{\theta}\,sin(\theta)\vec{k}_1$: vitesse absolue

c. les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue du point M :

- $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M\,/\,\Re_1) = \dfrac{d\vec{v}(M\,/\,\Re_1)}{dt\,/\,\Re_1} = \dfrac{d(-r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt\,/\,\Re_1} = -r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt\,/\,\Re_1} = -r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - -r\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$

$\vec{\gamma}_r(M) = \left(r\ddot{\theta}\,cos(\theta) - r\dot{\theta}^2\,sin(\theta)\right)\vec{i}_1 - \left(r\ddot{\theta}\,sin(\theta) + r\dot{\theta}^2\,cos(\theta)\right)\vec{k}_1$: accélération relative

- $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1\,/\,\Re) + \dfrac{d\vec{\Omega}(\Re_1\,/\,\Re)}{dt\,/\,\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1\,/\,\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1\,/\,\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$

$\vec{\gamma}(O_1\,/\,\Re) = \dfrac{d\vec{v}(O_1\,/\,\Re)}{dt\,/\,\Re} = \dfrac{d(a\omega\vec{j}_1)}{dt\,/\,\Re} = -a\omega^2\vec{i}_1$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) = \omega\vec{k}_1 \wedge r\omega\, sin(\theta)\vec{j}_1 = -r\omega^2\, sin(\theta)\vec{i}_1$$

$\Rightarrow\ \vec{\gamma}_e(M) = \left(-a\omega^2 - r\omega^2\, sin(\theta)\right)\vec{i}_1$: accélération d'entraînement

- $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}_r(M) = 2\omega\vec{k}_1 \wedge \left(r\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta}\, sin(\theta)\vec{k}_1\right) = 2r\omega\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{j}_1$

$\Rightarrow\ \vec{\gamma}_c(M) = 2r\omega\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{j}_1$: accélération de Coriolis

- $\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a(M) = \left(r\ddot{\theta}\, cos(\theta) - r\dot{\theta}^2\, sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2\, sin(\theta)\right)\vec{i}_1 + 2r\omega\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{j}_1 - \left(r\ddot{\theta}\, sin(\theta) + r\dot{\theta}^2\, cos(\theta)\right)\vec{k}_1$$

: accélération absolue

d. le poids de M et les forces d'inertie :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}_1$: poids de M
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M) = \left(ma\omega^2 + mr\omega^2\, sin(\theta)\right)\vec{i}_1$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M) = -2mr\omega\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{j}_1$: force d'inertie de Coriolis

2.

Application du théorème de la quantité du mouvement (P.F.D) dans le repère R_1 :
$\Re_1$ est en mouvement de rotation par rapport à $\Re$ fixe (galiléen) $\Rightarrow$ $\Re_1$ est non galiléen

$\Rightarrow$ P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit : $m\vec{\gamma}_r(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$ avec $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$

Soit $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z$

M se meut sans frottement sur le cerceau (C) $\Rightarrow$ la composante tangentielle est nulle c-à-d $R_\theta = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$

P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit ainsi :

$$m\left(r\ddot{\theta}\, cos(\theta) - r\dot{\theta}^2\, sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2\, sin(\theta)\right)\vec{i}_1 + 2mr\omega\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{j}_1 - \left(mr\ddot{\theta}\, sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2\, cos(\theta) - mg\right)\vec{k}_1 - R_\rho\vec{e}_\rho - R_z\vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{(E)}$$

$\vec{e}_\theta \times$(E) $\Rightarrow$

$$-m\left(r\ddot{\theta}\, cos(\theta) - r\dot{\theta}^2\, sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2\, sin(\theta)\right)cos(\theta) - \left(mr\ddot{\theta}\, sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2\, cos(\theta) - mg\right)sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\theta} = \frac{g}{r}sin(\theta) + \frac{a}{r}\omega^2\, cos(\theta) + \omega^2\, sin(\theta)cos(\theta)$$

Equation différentielle du mouvement de M vérifiée par θ

$\vec{e}_\rho \times$(E) $\Rightarrow$

$$m\left(r\ddot{\theta}\, cos(\theta) - r\dot{\theta}^2\, sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2\, sin(\theta)\right)sin(\theta) - \left(mr\ddot{\theta}\, sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2\, cos(\theta) - mg\right)cos(\theta) - R_\rho = 0$$

$$\Rightarrow\ R_\rho = mg\, cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 - ma\omega^2\, sin(\theta) - mr\omega^2\, sin^2(\theta)$$

$\vec{e}_z \times$(E) $\Rightarrow$

$$-2mr\omega\dot{\theta}\, cos(\theta) - R_z = 0$$

$$\Rightarrow\ R_z = -2mr\omega\dot{\theta}\, cos(\theta)$$

$$\Rightarrow\ \vec{R} = \left(mg\, cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 - ma\omega^2\, sin(\theta) - mr\omega^2\, sin^2(\theta)\right)\vec{e}_\rho - 2mr\omega\dot{\theta}\, cos(\theta)\vec{e}_z$$

<u>Relation entre θ et $\dot{\theta}$:</u>

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{r}sin(\theta)\dot{\theta} + \frac{a}{r}\omega^2\, cos(\theta)\dot{\theta} + \omega^2\, sin(\theta)cos(\theta)\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -\frac{g}{r}\frac{d\,cos(\theta)}{dt} + \frac{a}{r}\omega^2\frac{d\,sin(\theta)}{dt} - \frac{\omega^2}{4}\frac{d\,cos(2\theta)}{dt}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}cos(\theta) + \frac{a}{r}\omega^2\, sin(\theta) - \frac{\omega^2}{4}cos(2\theta) + cte$$

A $t = 0$: $\theta = \dot{\theta} = 0 \Rightarrow cte = \dfrac{g}{r} + \dfrac{\omega^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}\cos(\theta) + \frac{a}{r}\omega^2 \sin(\theta) - \frac{\omega^2}{4}\cos(2\theta) + \frac{g}{r} + \frac{\omega^2}{4}$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}\cos(\theta) + \frac{a}{r}\omega^2 \sin(\theta) - \frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^2}{2}\sin^2(\theta) + \frac{g}{r} + \frac{\omega^2}{4}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(1-\cos(\theta)) + \omega^2 \sin(\theta)\left(\frac{2a}{r} + \sin(\theta)\right)$$

3.

<u>Cas particulier : le plan (*P*) est fixe :</u>

$\Rightarrow \vec{\Omega}(\Re_1 / \Re) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e(M) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) = r\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{k}_1$

$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = \vec{0}$, $\vec{\gamma}_c(M) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) = (r\ddot{\theta}\cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta))\vec{i}_1 - (r\ddot{\theta}\sin(\theta) + r\dot{\theta}^2\cos(\theta))\vec{k}_1$

$\Rightarrow \vec{F}_e = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{F}_c = \vec{0}$

Le plan (*P*) est fixe $\Rightarrow$ $\Re_1$ est fixe par rapport à $\Re$ $\Rightarrow$ $\Re_1$ est galiléen

$\Rightarrow$ P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit : $m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = -mg\vec{k}_1 + R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z$

$\Rightarrow (mr\ddot{\theta}\cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2\sin(\theta))\vec{i}_1 - (mr\ddot{\theta}\sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2\cos(\theta))\vec{k}_1 = -mg\vec{k}_1 + R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$ (E)

$\vec{e}_\theta \times$(E) $\Rightarrow$ $(-mr\ddot{\theta}\cos(\theta) + mr\dot{\theta}^2\sin(\theta))\cos(\theta) - (mr\ddot{\theta}\sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2\cos(\theta))\sin(\theta) = -mg\sin(\theta)$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{r}\sin(\theta)$: Equation différentielle du mouvement de *M* vérifiée par θ

$\vec{e}_\rho \times$(E) $\Rightarrow$ $R_\rho = mg\cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2$

$\vec{e}_z \times$(E) $\Rightarrow$ $R_z = 0$

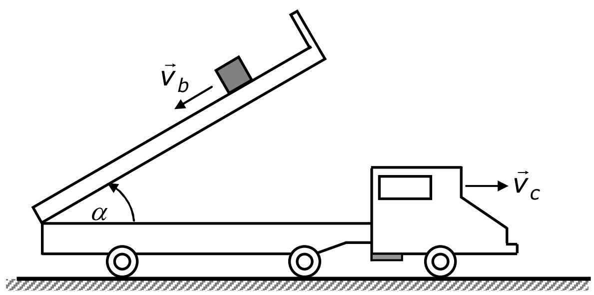
$\Rightarrow \vec{R} = (mg\cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho$

<u>Relation entre θ et $\dot{\theta}$:</u>

$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{r}\sin(\theta)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -\frac{g}{r}\frac{d\cos(\theta)}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}\cos(\theta) + cte$

A $t = 0$: $\theta = \dot{\theta} = 0 \Rightarrow cte = \frac{g}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r}\cos(\theta) + \frac{g}{r} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(1-\cos(\theta))$

<u>Exercice 2</u> :

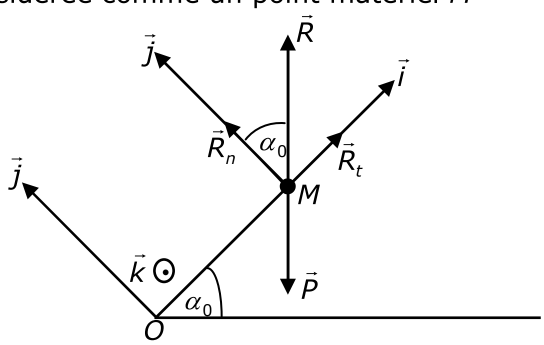


1.

<u>Camion immobile :</u>

a. angle limite α_0 pour provoquer le glissement de la brique :

La brique est considérée comme un point matériel *M*



A l'équilibre : $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow -mg\,sin(\alpha_0)\vec{i} - mg\,cos(\alpha_0)\vec{j} + R_t\vec{i} + R_n\vec{j} = \vec{0}$

$R_t = \|\vec{R}_t\|$: composante tangente à la benne

$R_n = \|\vec{R}_n\|$: composante normale à la benne

$\Rightarrow R_t = mg\,sin(\alpha_0)$ et $R_n = mg\,cos(\alpha_0) \Rightarrow tan(\alpha_0) = \frac{R_t}{R_n}$

A l'équilibre statique : $\|\vec{R}_t\| \le k_s\|\vec{R}_n\|$ où k_s est le coefficient de frottement statique.

Juste à la rupture de l'équilibre ($\alpha = \alpha_0$) : $\|\vec{R}_t\| = k_s\|\vec{R}_n\| \Rightarrow \frac{\|\vec{R}_t\|}{\|\vec{R}_n\|} = k_s$

$\Rightarrow tan(\alpha_0) = k_s \Rightarrow \alpha_0 = arctan(k_s) \Rightarrow \alpha_0 = 31°$

b. Accélération de la brique si $\alpha = 45°$:

$\alpha = 45° > \alpha_0 \Rightarrow$ la brique ne reste pas en équilibre statique sur la benne.

$\Rightarrow \vec{P}+\vec{R} = m\vec{\gamma}(M/\Re) \Rightarrow -mg\,sin(\alpha_0)\vec{i} - mg\,cos(\alpha_0)\vec{j} + R_t\vec{i} + R_n\vec{j} = m\gamma_x\vec{i}$

$\Rightarrow m\gamma_x = R_t - mg\,sin(\alpha_0)$ et $R_n = mg\,cos(\alpha_0)$

La brique est en mouvement avec frottement $\Rightarrow \|\vec{R}_t\| = k_d\|\vec{R}_n\| \Rightarrow R_t = k_dR_n$, k_d est le coefficient de frottement dynamique.

$\Rightarrow R_t = k_d mg\,cos(\alpha_0) \Rightarrow m\gamma_x = k_d mg\,cos(\alpha_0) - mg\,sin(\alpha_0)$

$\Rightarrow \gamma_x = g(k_d\,cos(\alpha_0) - sin(\alpha_0))$

$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = |\gamma_x| = |g(k_d\,cos(\alpha_0) - sin(\alpha_0))|$

$\Rightarrow$ A.N : $\|\vec{\gamma}(M/\Re)\| = 4.95ms^{-2}$

2.

Le camion en mouvement rectiligne uniforme par rapport au sol avec une vitesse $\vec{v}_c$:

La boîte est considérée comme un point matériel M glissant sur la benne avec une vitesse constante $v_b = 0.5ms^{-1}$.

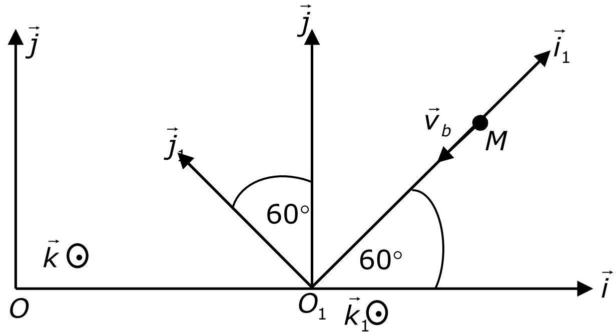
$\vec{i}_1 = cos(\omega t)\vec{i} + sin(\omega t)\vec{j}$

$\vec{j}_1 = -sin(\omega t)\vec{i} + cos(\omega t)\vec{j}$

$\vec{k}_1 = \vec{k}$

$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \vec{0}$

$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$



$\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ référentiel lié au sol (absolu)

$\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ référentiel lié au camion (relatif)

$\Re_1$ est en mouvement de translation uniforme par rapport à $\Re$ de vitesse $\vec{v}_c = \overrightarrow{cte}$

O_1 est fixe dans $\Re_1 \Rightarrow \vec{v}(O_1/\Re) = \vec{v}_c$

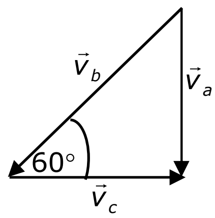
$\Rightarrow$ - $\vec{v}_e(M) = \vec{v}_c$ (vitesse d'entraînement de M est égale à la vitesse du camion dans $\Re$)

- $\vec{v}_r(M) = \vec{v}_b$ (vitesse relative de M est égale à la vitesse de la boîte dans $\Re_1$)

Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = \vec{v}_b + \vec{v}_c$

a. Un observateur au sol voit la boîte tomber verticalement c'est-à-dire le vecteur $\vec{v}_a(M)$ est vertical au sol.

Ainsi, d'après la loi de composition des vitesses, on obtient le schéma suivant :



D'après ce schéma on obtient :

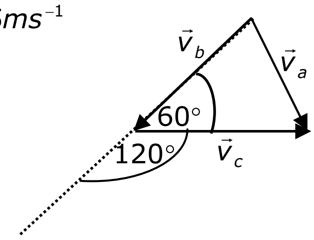
- $v_c = v_b\, cos(60°) = 0.25ms^{-1}$: vitesse du camion par rapport au sol
- $v_a = v_b\, sin(60°) = 0.43ms^{-1}$: vitesse de la boîte par rapport au sol (vitesse absolue de la boîte)

b. On calcule la vitesse de la boîte par rapport au sol (vitesse absolue de la boîte v_a), si la vitesse du camion est $v_c = 0.5m.s^{-1}$:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_b + \vec{v}_c \Rightarrow \|\vec{v}_a(M)\|^2 = \|\vec{v}_b\|^2 + \|\vec{v}_c\|^2 + \vec{v}_b\vec{v}_c\, cos\left(\vec{v}_b \,\hat{,}\, \vec{v}_c\right)$$

$$\left(\vec{v}_b \,\hat{,}\, \vec{v}_c\right) = 180° - 60° = 120° \Rightarrow v_a = 0.5ms^{-1}$$

Ou bien : $v_b = v_c = 0.5ms^{-1}$ et $\alpha = 60° \Rightarrow$ le triangle formé par les trois vecteurs $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$ et $\vec{v}_c$ est équilatéral $\Rightarrow v_a = v_b = v_c = 0.5ms^{-1}$



Autre méthode :

Pour la question **2.** , on peut faire un calcul direct sans utiliser la loi de composition des vitesses.

$$\vec{v}_a = \vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt/\Re} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} + \underbrace{\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}}_{0} \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}(O_1/\Re) + \vec{v}(M/\Re_1)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = v_c\vec{i} - v_b\vec{i}_1 = v_c\vec{i} - v_b\, cos(\alpha)\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j} \Rightarrow \vec{v}_a = (v_c - v_b\, cos(\alpha))\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j}$$

a. si la boîte est tombée verticalement $\Rightarrow \vec{v}_a \perp \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_a = -v_a\vec{j}$

$$\Rightarrow -v_a\vec{j} = (v_c - v_b\, cos(\alpha))\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j}$$

$$\Rightarrow v_a = v_b\, sin(\alpha) \text{ et } v_c = v_b\, cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow v_a = 0.43ms^{-1} \text{ et } v_c = 0.25ms^{-1}$$

b. si la vitesse du camion est $v_c = 0.5m.s^{-1}$:

$$-v_a\vec{j} = (v_c - v_b\, cos(\alpha))\vec{i} - v_b\, sin(\alpha)\vec{j} \Rightarrow v_a = \sqrt{(v_c - v_b\, cos(\alpha))^2 + v_b^2\, sin^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_c^2 + v_b^2 - 2v_cv_b\, cos(\alpha)} \Rightarrow v_a = 0.5ms^{-1}$$

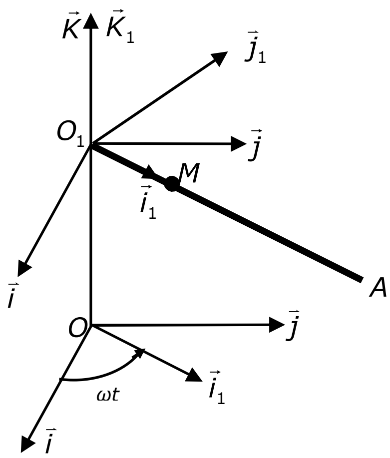
Série N° 4
Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

Exercice 1

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit une tige homogène (O_1A) de longueur ℓ, en mouvement autour de l'axe ($O\vec{k}$) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié à la tige (repère relatif) tel que le plan ($x_1O_1y_1$) reste constamment parallèle au plan (xOy) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. L'origine O_1 de $\Re_1$ se déplace le long de l'axe ($O\vec{k}$) tel que $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}at^2\vec{K}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur la tige (O_1A) et repéré dans R_1 par $\overrightarrow{O_1M} = x_1(t)\vec{i}_1$.
(a et ω étant des constantes positives).

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:
- **a.** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re$.
- **b.** la vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$.
- **c.** le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$.
- **d.** le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

2. Le repère $\Re_1$ est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.
3. En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 et les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.
4. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.
5. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re$.
6. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re_1$.
7. Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$.
8. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1.
9. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1.



Exercice 2

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), (yOz) étant le plan vertical. Soit un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon R, en mouvement de translation dans le plan (yOz) tel que $\overrightarrow{OO_1} = b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k}$ ((yOz) étant le plan du cerceau, a et b étant des constantes positives non nulles). On désigne par $\Re_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. Soit un point M, de masse m, se déplaçant sans frottement sur le cerceau (C) et repéré dans $\Re_1$ par l'angle θ (voir la figure ci-dessous). On suppose qu'à $t = 0$, $\theta = 0$ et $E_p(M/\Re) = E_p(M/\Re_1) = 0$.

1. Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$:
- **a.** les vecteurs de la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$.
- **b.** le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re$, $\vec{v}(M/\Re)$.
- **c.** le vecteur vitesse du point M par rapport au repère $\Re_1$, $\vec{v}(M/\Re_1)$.

d. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$ et sa dérivée temporelle $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}$

e. le poids de *M* et les forces d'inertie.

2. Le repère $\Re_1$ est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.

3. Calculer l'énergie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re$.

4. Calculer l'énergie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$.

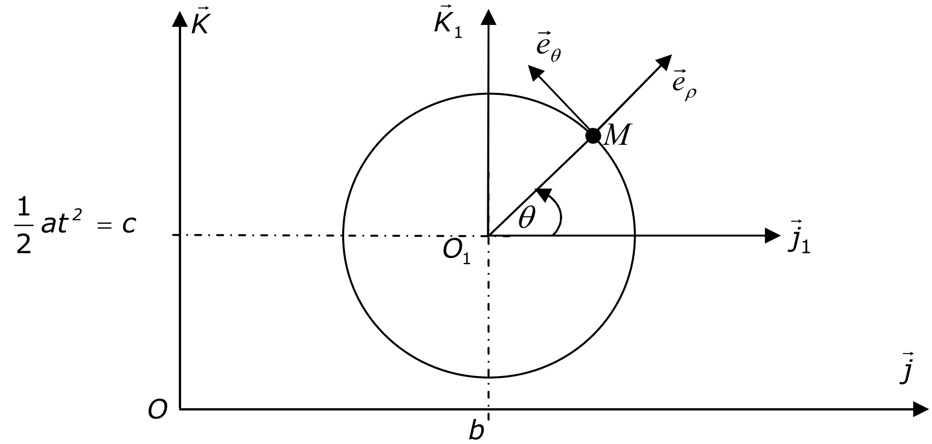
5. Calculer l'énergie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$: $E_c(M/\Re_1)$.

6. En appliquant le théorème de la quantité de mouvement dans le repère $\Re_1$, déterminer une équation différentielle du mouvement de second ordre en *t* vérifiée par θ et les composantes de la réaction $\vec{R}$, exercée sur *M* par le cerceau, dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$).

7. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en *t* vérifiée par θ.

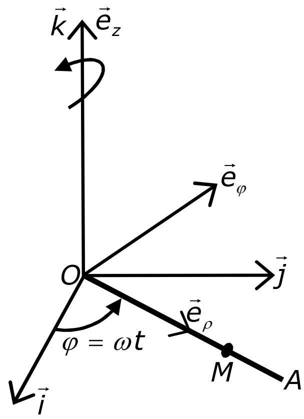
8. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en *t* vérifiée par θ.

9. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$, retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en *t* vérifiée par θ.



Exercice 3 :

On considère le repère fixe $\Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (repère absolu), ($\vec{i},\vec{j}$) étant le plan horizontal. Soit une tige horizontale (*OA*), en mouvement autour de l'axe ($O\vec{k}$) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $\Re_1(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$ le repère lié à la tige (repère relatif). Soit un anneau assimilé à un point matériel *M*, de masse *m*, se déplaçant sans frottement sur la tige (*OA*) et repéré dans $\Re$ par ses coordonnées polaires ρ et φ (voir la figure ci-contre). On suppose que $\rho(t=0)=\rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0)=0$.

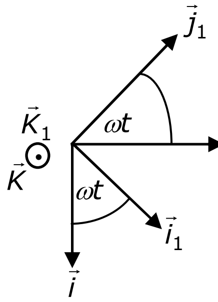


1. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re$, déterminer l'équation différentielle du mouvement de *M*. Donner la solution de cette équation en fonction de ρ_0 et ω.

2. Maintenant l'anneau est soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur *k*, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0. Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en *O* et l'autre est attachée au point *M*. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans $\Re$, établir la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige en fonction de $\ddot{\rho}$, ρ, ρ_0, *k*, *m* et ω.

Solution de série N° 4
Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

Exercice 1



$$\vec{i}_1 = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}$$
$$\vec{j}_1 = -\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j}$$
$$\vec{k}_1 = \vec{k}$$
$$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\Re} = \omega\vec{j}_1\,,\quad \frac{d\vec{j}_1}{dt/\Re} = -\omega\vec{i}_1\,,\quad \frac{d\vec{k}_1}{dt/\Re} = \vec{0}$$
$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega\vec{k} = \omega\vec{k}_1$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = \frac{1}{2}at^2\vec{k} + x_1(t)\vec{i}_1 = \frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + x_1(t)\vec{i}_1 \quad (a \text{ est une constante})$$

1. On exprime dans la base ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) :

a. la vitesse du point M par rapport au repère R :

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\left(\frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + x_1(t)\vec{i}_1\right)}{dt/\Re} = at\vec{k}_1 + \dot{x}_1\vec{i}_1 + x_1\omega\vec{j}_1$$
$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \dot{x}_1\vec{i}_1 + x_1\omega\vec{j}_1 + at\vec{k}_1$$

b. la vitesse du point M par rapport au repère R_1 :

$$\vec{v}(M/\Re_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} = \frac{d(x_1(t)\vec{i}_1)}{dt/\Re_1} = \dot{x}_1\vec{i}_1$$
$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re_1) = \dot{x}_1\vec{i}_1$$

c. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$:

$$\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1)$$
$$\overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\Re_1) = x_1\vec{i}_1 \wedge \dot{x}_1\vec{i} = \vec{0}_1 \Rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1) = \vec{0}$$

d. le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}_1$: poids de M
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$: force d'inertie de Coriolis

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re) = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2/\Re} = \frac{d^2\left(\frac{1}{2}at^2\vec{k}\right)}{dt^2/\Re} = a\vec{k} = a\vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) = \omega\vec{k}_1 \wedge \left(\omega\vec{k}_1 \wedge x_1\vec{i}_1\right) = \omega\vec{k}_1 \wedge \omega x_1\vec{j}_1 = -\omega^2 x_1\vec{i}_1$$
$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = a\vec{k}_1 - \omega^2 x_1\vec{i}_1$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) \wedge \vec{v}_r(M) = 2\omega\vec{k}_1 \wedge \dot{x}_1\vec{i}_1 = 2\omega\dot{x}_1\vec{j}_1$$
$$\Rightarrow \vec{F}_e = mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1\,,\quad \vec{F}_c = -2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1$$

2. Le repère $\Re_1$ est en mouvement de rotation par rapport au repère fixe $\Re$ (galiléen)

$\Rightarrow \Re_1$ est non Galiléen.

3. Théorème de la quantité du mouvement dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow m\vec{\gamma}(M/\Re_1) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ où $\vec{R} = R_1\vec{i}_1 + R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$

N.B : On exprime la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).

Mouvement sans frottement $\Rightarrow$ la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire $R_1 = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$

P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit :

$$m\ddot{x}_1\vec{i}_1 = -mg\vec{k}_1 + R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1 + mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1 - 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow (m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2)\vec{i}_1 + (mg - R_3 + ma)\vec{k}_1 - (R_2 - 2m\omega\dot{x}_1)\vec{j}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2 = 0 \\ R_2 - 2m\omega\dot{x}_1 = 0 \\ mg - R_3 + ma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 - x_1\omega^2 = 0 \\ R_2 = 2m\omega\dot{x}_1 \\ R_3 = mg + ma \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Equation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

Réaction $\vec{R}$ exercée sur M par la tige : $\vec{R} = 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1 + (mg + ma)\vec{k}_1$

4. Théorème du moment cinétique dans le repère R_1 :

N.B : Pour appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel $\Re_1$, il est préférable de choisir un point fixe dans $\Re_1$. Pour un point mobile A dans $\Re_1$, ce théorème, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/R_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_A(\vec{F}_e) + \vec{m}_A(\vec{F}_c) + m\vec{v}(M/\Re_1) \wedge \vec{v}(A/\Re_1)$$

$\Re_1$ est non galiléen et O_1 est fixe dans $\Re_1$ $\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt/\Re_1} = \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt/\Re_1} = \vec{0}$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{m}_{O_1}(\vec{P}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{P}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} = x_1\vec{i}_1 \wedge (-mg\vec{k}_1) = mgx_1\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R} = x_1\vec{i}_1 \wedge R_2\vec{j}_1 + x_1\vec{i}_1 \wedge R_3\vec{k}_1 = x_1R_2\vec{k}_1 - x_1R_3\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_e = x_1\vec{i}_1 \wedge (mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1) = max_1\,\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_c = x_1\vec{i}_1 \wedge (-2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1) = -2m\omega x_1\dot{x}_1\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow mgx_1\vec{j}_1 + x_1R_2\vec{k}_1 - x_1R_3\vec{j}_1 + max_1\,\vec{j}_1 - 2m\omega x_1\dot{x}_1\vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (mgx_1 + max_1 - x_1R_3)\vec{j}_1 + (x_1R_2 - 2m\omega x_1\dot{x}_1)\vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mgx_1 + max_1 - x_1R_3 = 0 \\ x_1R_2 - 2m\omega x_1\dot{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_3 = mg + ma \\ R_2 = 2m\omega\dot{x}_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On retrouve la réaction $\vec{R} = 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1 + (mg + ma)\vec{k}_1$

5. Energie potentielle de M par rapport au repère $\Re$:

Dans le repère $\Re$, la seule force dérivant une énergie potentielle (conservative) est le poids de M ($\vec{P}$). Ainsi l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère $\Re$ est :

$$E_P(M/\Re) = E_P(\vec{P}/\Re)$$

$$dE_P(M/\Re) = dE_P(\vec{P}/\Re) = -dW(\vec{P}/\Re) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{k}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$\Rightarrow dE_P(M/\Re) = mgdz \Rightarrow E_P(M/\Re) = mgz + cte$$

Ou bien

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}(E_p) \rightarrow -mg\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial z} = mg\,(1),\ \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0\,(2),\ \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0\,(3)$$

$$(1) \rightarrow E_p = mgz + cte(x,y)$$

$$(2) \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial cte(x,y)}{\partial x} = 0 \rightarrow cte(x,y) = cte(y) \rightarrow E_p = mgz + cte(y)$$

$$(3) \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial cte(y)}{\partial y} = 0 \rightarrow cte(y) = cte$$

$$\Rightarrow E_p(M/\Re) = mgz + cte$$

6. <u>Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$</u> :

$$\vec{F}_e = mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}_e) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & & mx_1\omega^2 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \wedge & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & & -ma \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \Re_1$$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re_1) = E_p(\vec{F}_e/\Re_1) + E_P(\vec{P}/\Re_1)$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P(\vec{F}_e/\Re_1) = -dW(\vec{F}_e/\Re) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{O_1M} = (-mx_1\omega^2\vec{i}_1 + ma\vec{k}_1)(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$M \in (O_1x_1)\ \forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_P(\vec{F}_e/\Re_1) = (-mx_1\omega^2\vec{i}_1 + ma\vec{k}_1)dx_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow dE_P(\vec{F}_e/\Re_1) = -mx_1\omega^2 dx_1$$

$$\Rightarrow E_P(\vec{F}_e/\Re_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{P}$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P(\vec{P}/\Re_1) = -dW(\vec{P}/\Re_1) = -\vec{P}d\overrightarrow{O_1M} = mg\vec{k}_1(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$M \in (O_1x_1)\ \forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_P(\vec{P}/\Re_1) = mg\vec{k}_1 dx_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow dE_P(\vec{P}/\Re_1) = 0$$

$$\Rightarrow E_P(\vec{P}/\Re_1) = cte$$

$$\Rightarrow E_P(M/\Re_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

7. <u>Energie cinétique de *M* par rapport au repère $\Re_1$</u> :

$$E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M/\Re_1) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(M/\Re_1)\|^2$$

$$\Rightarrow E_c(M/\Re_1) = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2$$

8. Théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow$ $dE_c(M/\Re_1) = dW\left(\sum \vec{F}_{ext} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$

($dW\left(\vec{F}_c / \Re_1\right) = 0$ voir le cours)

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ avec $\vec{R} = R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$

$$\Rightarrow dE_c(M/\Re_1) = dW\left(\vec{P} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{R} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW\left(\vec{P} / \Re_1\right)}{dt} + \frac{dW\left(\vec{R} / \Re_1\right)}{dt} + \frac{dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = P\left(\vec{P} / \Re_1\right) + P\left(\vec{R} / \Re_1\right) + P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$$ (P : puissance)

$$\frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = m\dot{x}_1\ddot{x}_1$$

$$P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = \vec{P}\vec{v}(M / \Re_1) = -mg\vec{k}_1\dot{x}_1\vec{i}_1 = 0$$

$$P\left(\vec{R} / \Re_1\right) = \vec{R}\vec{v}(M / \Re_1) = \left(R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1\right)\dot{x}_1\vec{i}_1 = 0$$

$$P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = \vec{F}_e\vec{v}(M / \Re_1) = \left(mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1\right)\dot{x}_1\vec{i} = mx_1\omega^2\dot{x}_1$$

$$\Rightarrow m\dot{x}_1\ddot{x}_1 = mx_1\omega^2\dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = \omega^2 x_1$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

9. Théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$:

> Rappel :
> Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen $\Re_1$
> $dE_m(M/\Re_1) = dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$ si $\vec{F}_e$ est non conservative
> Si $\vec{F}_e$ est conservative, ce théorème s'écrit : $dE_m(M/\Re_1) = dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$
> en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ dans le référentiel $\Re_1$.

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow$ $dE_m(M/\Re_1) = dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$ en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ dans le référentiel $\Re_1$ ($\vec{F}_e$ est conservative dans $\Re_1$)

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)}{dt} = P\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$$

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_P(M/\Re_1) = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} mx_1^2\omega^2 + cte$$

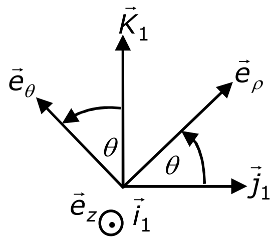
$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = m\dot{x}_1\ddot{x}_1 - m\omega^2 x_1\dot{x}_1$$

$$\vec{F}_{ncon} = \vec{R} \Rightarrow P\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right) = P\left(\vec{R} / \Re_1\right) = \vec{R}\vec{v}(M / \Re_1) = \left(R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1\right)\dot{x}_1\vec{i}_1 = 0$$

$$\Rightarrow m\dot{x}_1\ddot{x}_1 - m\omega^2 x_1\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

Exercice 2



$$\vec{e}_\rho = cos(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1$$

$$\vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1$$

$$\vec{e}_z = \vec{i}_1$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re_1} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta\,,\quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re_1} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho\,,\quad \frac{d\vec{e}_z}{dt/\Re_1} = \vec{0}$$

$\Re_1$ est en translation par rapport à $\Re \Rightarrow \vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k} + R\vec{e}_\rho$ (*a* et *b* sont des constantes positives non nulles)

$\vec{i}_1 = \vec{i}\,,\ \vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = b\vec{j}_1 + \frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + R\vec{e}_\rho$

1. On exprime dans la base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) :

a. les vecteurs de la base ($\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$) :

$$\begin{cases}\vec{e}_\rho = cos(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1 \\ \vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}cos(\theta)\vec{e}_\rho = cos^2(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)sin(\theta)\vec{k}_1 \\ sin(\theta)\vec{e}_\theta = -sin^2(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)cos(\theta)\vec{k}_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow cos(\theta)\vec{e}_\rho - sin(\theta)\vec{e}_\theta = \vec{j}_1$$

$$\begin{cases}\vec{e}_\rho = cos(\theta)\vec{j}_1 + sin(\theta)\vec{k}_1 \\ \vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{j}_1 + cos(\theta)\vec{k}_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}sin(\theta)\vec{e}_\rho = sin(\theta)cos(\theta)\vec{j}_1 + sin^2(\theta)\vec{k}_1 \\ cos(\theta)\vec{e}_\theta = -cos(\theta)sin(\theta)\vec{j}_1 + cos^2(\theta)\vec{k}_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow sin(\theta)\vec{e}_\rho + cos(\theta)\vec{e}_\theta = \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\vec{j}_1 = cos(\theta)\vec{e}_\rho - sin(\theta)\vec{e}_\theta \\ \vec{k}_1 = sin(\theta)\vec{e}_\rho + cos(\theta)\vec{e}_\theta \\ \vec{i}_1 = \vec{e}_z\end{cases}$$

b. le vecteur vitesse du point *M* par rapport au repère $\Re$:

$$\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re_1} + \underbrace{\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{OM}}_{\vec{0}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re_1}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \frac{d\left(b\vec{j}_1 + \frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + R\vec{e}_\rho\right)}{dt/\Re_1} = at\vec{k}_1 + R\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re_1} = at\vec{k}_1 + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = at\left(sin(\theta)\vec{e}_\rho + cos(\theta)\vec{e}_\theta\right) + R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = at\,sin(\theta)\vec{e}_\rho + \left(R\dot{\theta} + at\,cos(\theta)\right)\vec{e}_\theta$$

c. le vecteur vitesse du point *M* par rapport au repère R_1 :

$$\vec{v}(M/\Re_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt/\Re_1} = \frac{d(R\vec{e}_\rho)}{dt/\Re_1} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad\Rightarrow\quad \vec{v}(M/\Re_1) = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

d. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)$ et sa dérivée temporelle $\dfrac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1}$:

$$\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = \overrightarrow{O_1M}\wedge m\vec{v}(M/\Re_1) = R\vec{e}_\rho \wedge mR\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = mR^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = \frac{d\left(mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z\right)}{dt/\Re_1} = mR^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\Re_1)}{dt/\Re_1} = mR^2\ddot{\theta}\,\vec{e}_z$$

e. le poids de *M* et les forces d'inertie :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\,cos(\theta)\vec{e}_\theta$: poids de *M*
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$: force d'inertie de Coriolis

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1/\Re) + \frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)$$

$$\vec{\gamma}(O_1/\Re)=\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2/\Re}=\frac{d^2\left(b\vec{j}+\frac{1}{2}at^2\vec{k}\right)}{dt^2/\Re}=a\vec{k}=a\vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt/\Re}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\vec{0}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\left(\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\ \vec{\gamma}_e(M)=a\vec{k}_1=a\sin(\theta)\vec{e}_\rho+a\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\gamma}_c(M)=2\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)\wedge\vec{v}_r(M)=\vec{0}\wedge R\dot{\theta}\vec{e}_\theta=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\ \vec{F}_e=-ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho-ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta,\ \vec{F}_c=\vec{0}$$

$\Rightarrow$ le poids de M et les forces d'inertie sont :

$\vec{P}=-mg\sin(\theta)\vec{e}_\rho-mg\cos(\theta)\vec{e}_\theta,\ \vec{F}_e=-ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho-ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta,\ \vec{F}_c=\vec{0}$

2. $\vec{\gamma}(O_1/\Re)=a\vec{k}\Rightarrow\|\vec{\gamma}(O_1/\Re)\|=a>0$ $\Rightarrow$ le point O_1 a un mouvement rectiligne accéléré suivant $\vec{k}_1$.

Le point O_1 est un fixe dans $\Re_1$ et $\vec{i}_1=\vec{i}$, $\vec{j}_1=\vec{j}$ et $\vec{k}_1=\vec{k}$ $\forall t$ $\Rightarrow$ $\Re_1$ est en translation <u>non uniforme</u> par rapport à $\Re$, donc $\Re_1$ est un référentiel non galiléen.

3. <u>Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re$</u> :

Dans le repère $\Re$, la seule force dérivant une énergie potentielle (conservative) est le poids de *M* ($\vec{P}$). Ainsi l'énergie potentielle du poids de *M* par rapport au repère $\Re$ est :

$$E_P(M/\Re)=E_P(\vec{P}/\Re)$$

$$dE_P(M/\Re)=dE_P(\vec{P}/\Re)=-dW(\vec{P}/\Re)=-\vec{P}d\overrightarrow{OM}=mg\vec{k}\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow\ dE_P(M/\Re)=mgdz\ \Rightarrow\ E_P(M/\Re)=mgz+cte$$

$$\overrightarrow{OM}=b\vec{j}+\frac{1}{2}at^2\vec{k}+R\vec{e}_\rho=b\vec{j}+\frac{1}{2}at^2\vec{k}+R\cos(\theta)\vec{j}+R\sin(\theta)\vec{k}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{OM}=(b+R\cos(\theta))\vec{j}+\left(\frac{1}{2}at^2+R\sin(\theta)\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow\ y=b+R\cos(\theta)\ \text{ et }\ z=\frac{1}{2}at^2+R\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow\ E_P(M/\Re)=\frac{1}{2}mgat^2+Rmg\sin(\theta)+cte$$

$A\ t=0$: $\theta=0$ et $E_p(M/\Re)=0\ \Rightarrow\ cte=0$

$$\Rightarrow\ E_P(M/\Re)=\frac{1}{2}mgat^2+Rmg\sin(\theta)$$

4. <u>Energie potentielle de *M* par rapport au repère $\Re_1$</u> :

$$\vec{F}_e=-ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho-ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta=-ma\vec{k}_1\quad,\quad\vec{k}_1=\sin(\theta)\vec{e}_\rho+\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{F}_e)=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}_e=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & & 0\\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \wedge & 0\\ \frac{\partial}{\partial z_1} & & -ma\end{vmatrix}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \Re_1$$

$$\Rightarrow\ E_P(M/\Re_1)=E_p(\vec{F}_e/\Re_1)+E_P(\vec{P}/\Re)$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{F}_e$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = -dW\left(\vec{F}_e / \Re\right) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{O_1M} = ma\vec{k}_1\left(dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right)$$

$$(M \in (y_1oz_1)\ \forall t \Rightarrow dx_1 = x_1 = 0)$$

$$\Rightarrow dE_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = madz_1$$

$$\Rightarrow E_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = maz_1 + cte$$

$$z_1 = R\sin(\theta) \Rightarrow E_P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = maR\sin(\theta) + cte$$

Energie potentielle dérivée par $\vec{P}$ par rapport au repère $\Re_1$:

$$dE_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = -dW\left(\vec{P} / \Re_1\right) = -\vec{P}d\overrightarrow{O_1M} = mg\vec{k}_1\left(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right)$$

$$M \in (y_1oz_1)\ \forall t \Rightarrow dx_1 = x_1 = 0 \Rightarrow dE_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mg\vec{k}_1\left[dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right]$$

$$\Rightarrow dE_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mgdz_1$$

$$\Rightarrow E_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mgz_1 + cte$$

$$\Rightarrow E_P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = mgR\sin(\theta) + cte$$

Alors l'énergie potentielle de M par rapport au repère $\Re_1$ est :

$$\Rightarrow E_P(M / \Re_1) = maR\sin(\theta) + mgR\sin(\theta) + cte$$

$A\ t = 0$: $\theta = 0$ et $E_p(M / \Re_1) = 0 \Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow E_P(M / \Re_1) = mR\sin(\theta)(a + g)$$

5. Energie cinétique de M par rapport au repère $\Re_1$:

$$E_c(M / \Re_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M / \Re_1) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}(M / \Re_1)\right\|^2$$

$$\Rightarrow E_c(M / \Re_1) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

6. Théorème de la quantité de mouvement dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non Galiléen $\Rightarrow m\vec{\gamma}(M / \Re_1) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ où $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z$

N.B : On exprime la réaction $\vec{R}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).
Mouvement sans frottement $\Rightarrow$ la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire $R_\theta = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$

P.F.D dans $\Re_1$ s'écrit donc :

$$mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho = -mg\sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\cos(\theta)\vec{e}_\theta + R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z - ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \left(mR\ddot{\theta} + mg\cos(\theta) + ma\cos(\theta)\right)\vec{e}_\theta + \left(mg\sin(\theta) + ma\sin(\theta) - R_\rho - mR\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho - R_z\vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mR\ddot{\theta} + mg\cos(\theta) + ma\cos(\theta) = 0 \\ mg\sin(\theta) + ma\sin(\theta) - R_\rho - mR\dot{\theta}^2 = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -\dfrac{g + a}{R}\cos(\theta) \\ R_\rho = m\sin(\theta)(g + a) - mR\dot{\theta}^2 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Equation différentielle du second ordre en t vérifiée par θ : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g + a}{R}\cos(\theta)$

Réaction $\vec{R}$ exercée sur M par le cerceau : $\vec{R} = m\left(\sin(\theta)(g + a) - R\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho$

7. Théorème de l'énergie cinétique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen $\Rightarrow dE_c(M/\Re_1) = dW\left(\sum \vec{F}_{ext} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$

($dW\left(\vec{F}_c / \Re_1\right) = 0$ voir le cours)

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$ avec $\vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z$

$$\Rightarrow dE_c(M/\Re_1) = dW\left(\vec{P} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{R} / \Re_1\right) + dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW\left(\vec{P} / \Re_1\right)}{dt} + \frac{dW\left(\vec{R} / \Re_1\right)}{dt} + \frac{dW\left(\vec{F}_e / \Re_1\right)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = P\left(\vec{P} / \Re_1\right) + P\left(\vec{R} / \Re_1\right) + P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) \text{ (} P \text{ : puissance)}$$

$$\frac{dE_c(M/\Re_1)}{dt} = mR^2 \dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$P\left(\vec{P} / \Re_1\right) = \vec{P}\vec{v}(M / \Re_1) = \left(-mg\sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\cos(\theta)\vec{e}_\theta\right)R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -mg\cos(\theta)R\dot{\theta}$$

$$P\left(\vec{R} / \Re_1\right) = \vec{R}\vec{v}(M / \Re_1) = \left(R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z\right)R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 0$$

$$P\left(\vec{F}_e / \Re_1\right) = \vec{F}_e\vec{v}(M / \Re_1) = \left(-ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta\right)R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -ma\cos(\theta)R\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg\cos(\theta)R\dot{\theta} - ma\cos(\theta)R\dot{\theta} \Rightarrow R\ddot{\theta} = -g\cos(\theta) - a\cos(\theta)$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{R}\cos(\theta)$

8. Théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non galiléen et $\vec{F}_e$ est conservative dans $\Re_1$ $\Rightarrow dE_m(M/\Re_1) = dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{dW\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)}{dt} = P\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right)$$

$$E_m(M/\Re_1) = E_c(M/\Re_1) + E_P(M/\Re_1) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\sin(\theta)(a+g)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mR(a+g)\dot{\theta}\cos(\theta)$$

$$\vec{F}_{ncon} = \vec{R} \Rightarrow P\left(\vec{F}_{ncon} / \Re_1\right) = P\left(\vec{R} / \Re_1\right) = \vec{R}\vec{v}(M / \Re_1) = 0$$

$$\Rightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mR(a+g)\dot{\theta}\cos(\theta) \Rightarrow R\ddot{\theta} + (a+g)\cos(\theta)$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{R}\cos(\theta)$

9. Théorème du moment cinétique dans le repère $\Re_1$:

$\Re_1$ est non Galiléen et O_1 est fixe dans $\Re_1$ $\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \Re_1} = \vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) + \vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_e\right) + \vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_c\right)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \Re_1} = mR^2\ddot{\theta}\ \vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{m}_{O_1}\left(\vec{P}\right) + \vec{m}_{O_1}\left(\vec{R}\right) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\vec{P}\right) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{P} = R\vec{e}_\rho \wedge \left(-mg\sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg\cos(\theta)\vec{e}_\theta\right) = -Rmg\cos(\theta)\vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\vec{R}\right) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{R} = R\vec{e}_\rho \wedge \left(R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z\right) = -RR_z\vec{e}_\theta$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_e\right) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_e = R\vec{e}_\rho \wedge \left(-ma\sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma\cos(\theta)\vec{e}_\theta\right) = -Rma\cos(\theta)\vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}\left(\vec{F}_c\right) = \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{F}_c = \vec{0}$$

$$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta}\ \vec{e}_z = -Rmg\cos(\theta)\vec{e}_z - RR_z\vec{e}_\theta - Rma\cos(\theta)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \left(mR^2\ddot{\theta} + Rmg\cos(\theta) + Rma\cos(\theta)\right)\vec{e}_z + RR_z\vec{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mR^2\ddot{\theta} + Rmg\cos(\theta) + Rma\cos(\theta) = 0 \\ RR_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\ddot{\theta} + g\cos(\theta) + a\cos(\theta) = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} = -\frac{g+a}{R}cos(\theta)$

Exercice 3

1. Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re$:

Vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au repère $\Re$:

- $\vec{v}(M/\Re) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt/\Re} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\Re} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(M/\Re) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$
- $\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{d\vec{v}(M/\Re)}{dt/\Re} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt/\Re} \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}(M/\Re) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$

Energies mécanique de M par rapport au repère $\Re$:

- $E_c(M/\Re) = \frac{1}{2}m\vec{v}(M/\Re)^2 \Rightarrow E_c(M/\Re) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2$
- $dE_{Pg} = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{e}_z(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z) = mgdz$, $dz = 0 \rightarrow E_{Pg} = Cte \Rightarrow E_p(M/\Re) = Cte$

$E_m(M/\Re) = E_c(M/\Re) + E_p(M/\Re) \quad \Rightarrow \quad E_m(M/\Re) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + Cte$

Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère $\Re$:

$\frac{dE_m(M/\Re)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\Re)$, $P(\vec{F}_{ncon}/\Re) = P(\vec{R}/\Re) = \vec{R}\vec{v}(M/\Re) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z)(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = R_\varphi\rho\omega$

$\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$, mouvement sans frottement $\rightarrow$ $R_\rho = 0$ $\rightarrow$ $\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$

Théorème du moment cinétique ou P.F.D $\Rightarrow$ $R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$ et $R_z = mg$ $\Rightarrow$ $P(\vec{F}_{ncon}/\Re) = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2$

$$\frac{dE_m(M/\Re_1)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 + Cte\right)}{dt} = m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$\rightarrow$ $m\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho} = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2 \rightarrow \ddot{\rho} + \omega^2\rho = 2\rho\omega^2 \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$

La solution de cette équation est sous la forme : $\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$\rho(t=0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0) = 0 \rightarrow A + B = \rho_0$ et $A\omega - B\omega = 0 \rightarrow A = B = \frac{\rho_0}{2} \rightarrow \rho(t) = \frac{\rho_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 coh(\omega t)$$

2. Application du principe fondamental de dynamique dans $\Re$:

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}(M/\Re)$

$\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$ (réaction de la tige sur M), $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ (poids de M)

$\vec{F} = -k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho$:force de rappel (force appliquée par le ressort sur M)($d\ell = \rho - \rho_0$)

$\rightarrow -mg\vec{e}_z + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z - k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$

$\rightarrow R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega$ et $R_z = mg$ et $-k(\rho - \rho_0) = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)$

$\Rightarrow$ $\ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega^2)\rho = \frac{k}{m}\rho_0$: la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige lorsque M soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0.

Série N° 5

Stabilité et conditions de stabilité d'un équilibre

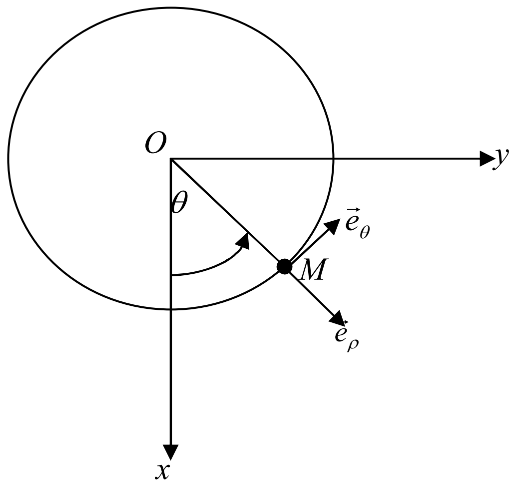
Exercice 1

Soit une particule M de masse m en mouvement, dans le plan xOy (plan vertical), sans frottement sur un cerceau (C) de rayon R et de centre O. La position de M est définie par l'angle θ (voir figure ci-dessous).

1. Calculer l'énergie potentielle de M dans le repère $\Re(O,x,y,z)$ (on suppose que $E_p(\theta = 0) = 0$).

2. Déterminer les positions d'équilibre de M.

3. Etudier leur stabilité.



Exercice 2

On considère le repère fixe $R(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ($xOy$) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω. On désigne par $R_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base O.N.D $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan (P) et $\vec{k} = \vec{k}_1$ (voir la figure ci-dessous).

Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire $\vec{u}_1$) passant par O, constamment contenue dans le plan (P) et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) ($0<\alpha<\pi/2$).

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_1$.

Soient $\vec{u}_2$ un vecteur unitaire, contenu dans le plan (P) et perpendiculaire à $\vec{u}_1$, et $\vec{u}_3$ un vecteur unitaire tel que la base ($\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$) soit O.N.D.

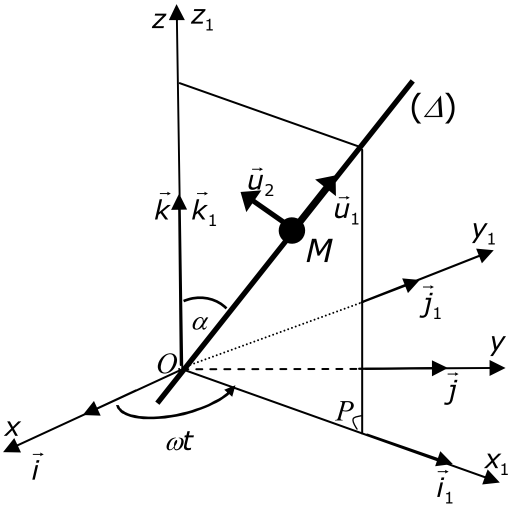
1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, le poids de M et les forces d'inertie.

2. Calculer, en fonction de r, l'énergie potentielle de M par rapport au repère R_1**.**

3. Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre relatif r_{eq} de l'anneau sur la tige que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.

4. Déterminer la position d'équilibre relatif r_1 de l'anneau sur la tige pour une vitesse angulaire $\omega_1 \geq \omega_0$.

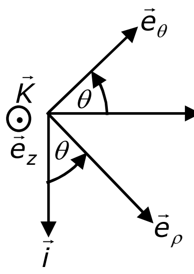
5. Etudier la stabilité de l'équilibre relatif.



<u>Solution série N° 5</u>

Stabilité et conditions de stabilité d'un équilibre

<u>Exercice 1</u>



$$\vec{e}_\rho = cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j}$$
$$\vec{e}_\theta = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}$$
$$\vec{e}_z = \vec{k}$$
$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\Re} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta\,,\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt/\Re} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho\,,\ \frac{d\vec{e}_z}{dt/\Re} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{i} = cos(\theta)\vec{e}_\rho - sin(\theta)\vec{e}_\theta\,,\ \vec{j} = sin(\theta)\vec{e}_\rho + cos(\theta)\vec{e}_\theta\,,\ \vec{k} = \vec{e}_z$$

$$\Re'(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z),\ \Re(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \Rightarrow \vec{\Omega}(\Re'/\Re) = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{\gamma}(M/\Re) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$$

<u>Bilan des forces</u> :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{i} = mg\,cos(\theta)\vec{e}_\rho - mg\,sin(\theta)\vec{e}_\theta$

Réaction : $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$ (mouvement sans frottement $\Rightarrow R_\theta = 0$)

1. <u>Energie potentielle de M par rapport au repère $\Re$</u> :

On a $E_P(M/\Re) = E_P(\vec{P}/\Re)$

$$dE_P(M/\Re) = dE_P(\vec{P}/\Re) = -dW(\vec{P}/\Re) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = -mg\vec{i}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$
$$\Rightarrow dE_P(M/\Re) = -mgdx \Rightarrow E_P(M/\Re) = -mgx + cte$$
$$x = Rcos(\theta) \Rightarrow E_P(M/\Re) = -mgR\,cos(\theta) + cte$$
$$E_p(\theta = 0) = 0 \Rightarrow cte = mgR$$
$$\Rightarrow E_P(M/\Re) = mgR(1 - cos(\theta))$$

2. <u>Positions d'équilibre de M</u> :

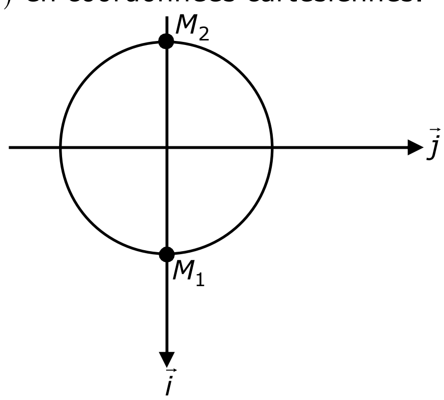
Une position d'équilibre est une position où l'énergie potentielle est optimale (maximale ou minimale). C'est-à-dire à cette position on aura :

$$\frac{dE_P}{d\theta} = 0 \ (E_P(M/\Re) = E_P(\theta))$$

$$\frac{dE_P}{d\theta} = mgR\,sin(\theta) = 0 \Rightarrow sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = k\pi \ (k \in Z)$$

$\Rightarrow$ Sur la trajectoire circulaire de M, on a deux positions d'équilibre qui correspondent aux valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

$\Rightarrow$ Les positions d'équilibre sont : $M_1(\rho = R, \theta = 0)$ et $M_2(\rho = R, \theta = \pi)$ en coordonnées polaires ou $M_1(R,0)$ et $M_2(-R,0)$ en coordonnées cartésiennes.



3. <u>Etude de la stabilité des positions d'équilibre</u> :

Pour étudier la stabilité, on détermine le signe de la dérivée seconde de la fonction $E_P(\theta)$ par rapport à θ en ces deux positions d'équilibre M_1 et M_2.

$$\frac{d^2E_P}{d\theta^2} = mgR\cos(\theta)$$

$\Rightarrow \left.\frac{d^2E_P}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = mgR > 0 \Rightarrow$ L'énergie potentielle est minimale en $M_1 \Rightarrow M_1$ est une position d'équilibre stable.

$\Rightarrow \left.\frac{d^2E_P}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pi} = -mgR < 0 \Rightarrow$ L'énergie potentielle est maximale en $M_2 \Rightarrow M_2$ est une position d'équilibre instable.

<u>Exercice 2</u>

1. le poids de M et les forces d'inertie **:**

- $\vec{P} = -mg\vec{k}_1$

- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e$ **,** $\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O/R) + \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \left[\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{OM}\right] = -r\omega^2\sin(\alpha)\vec{i}_1$

$\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}_1 \qquad \Rightarrow \vec{F}_e = mr\omega^2\sin(\alpha)\vec{i}_1$

- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c$ **,** $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{v}(M/R_1) = 2\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{j}_1 \Rightarrow \vec{F}_c = -2m\omega\dot{r}\sin(\alpha)\vec{j}_1$

2. Energie potentielle de M par rapport au repère R_1, en fonction de r :

$x_1 = r\sin(\alpha) \rightarrow \vec{F}_e = m\omega^2 x_1\vec{i}_1 \rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \rightarrow E_{Pe}$

$dE_{Pe} = -dw\left(\vec{F}_e/R_1\right) = -\vec{F}_e d\overrightarrow{OM} = -m\omega^2 x_1\vec{i}_1\left(dx_1 i_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right) = -m\omega^2 x_1 dx_1$

$$\rightarrow E_{Pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_1^{\,2} + Cte \Rightarrow E_{Pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2(\alpha) + Cte$$

$dE_{Pg} = -dw\left(\vec{P}/R_1\right) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{K}_1\left(dx_1 i_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1\right) = mgdz_1$

$\rightarrow E_{Pg} = mgz_1 + Cte$ **,** $z_1 = r\cos(\alpha) \Rightarrow E_{Pg} = mgr\cos(\alpha) + Cte$

$$\Rightarrow E_p(M/R_1) = mgr\cos(\alpha) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2(\alpha) + Cte$$

3. si r_{eq} est une position d'équilibre, on aura : $\left.\frac{dE_p(M/R_1)}{dr}\right|_{r=r_{eq}} = 0$

$$\rightarrow g\cos(\alpha) - \omega^2 r_{eq}\sin^2(\alpha) = 0 \rightarrow r_{eq} = \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)}$$

$$r_{eq} \le L \rightarrow \frac{g\cos(\alpha)}{\omega^2\sin^2(\alpha)} \le L \rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g\cos(\alpha)}{L\sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g\cos(\alpha)}{L\sin^2(\alpha)}}$$

4. la position d'équilibre r_1 pour une vitesse angulaire $\omega_1 \ge \omega_0$ est : $r_1 = \frac{g\cos(\alpha)}{\omega_1^{\,2}\sin^2(\alpha)}$

5. $\frac{dE_p(M/R_1)}{dr} = mg\cos(\alpha) - m\omega^2 r\sin^2(\alpha) \rightarrow \frac{d^2E_p(M/R_1)}{dr^2} = -m\omega^2\sin^2(\alpha) < 0$

$\Rightarrow$ l'équilbre est instable quelque soit r_{eq} .