CHAPITRE 1

Régime continu et théorèmes fondamentaux

1. Définitions

a) Réseau (circuit) électrique : association d'éléments simples connectés entre eux. L'élément est actif si c'est une source sinon il est passif.

b) Nœud : point du circuit où aboutissent au moins 3 conducteurs.

c) Branche : portion de circuit entre 2 nœuds consécutifs.

d) Maille : boucle fermée.

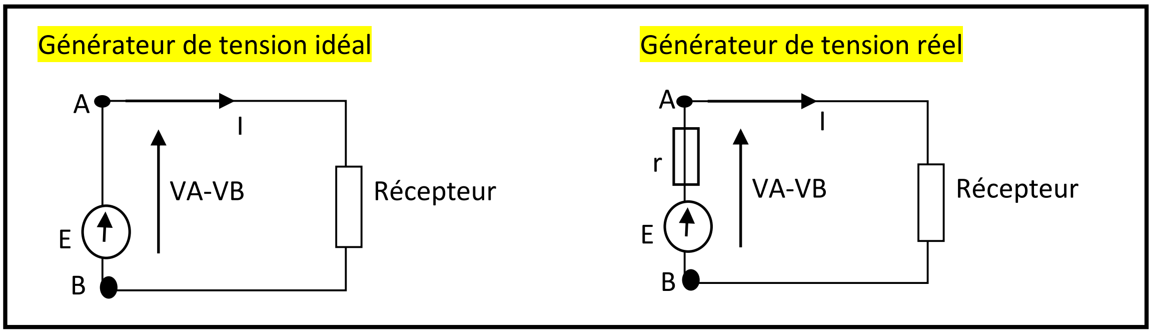
e) Dipôle : dans un circuit électrique, il ya des générateurs qui délivrent de l'énergie électrique et des récepteurs qui la consomme. Ces éléments possèdent 2 bornes. Ce sont des dipôles électriques.

2. Générateur de tension

a) Générateur de tension idéal(parfait) : il délivre une tension E constante qui est la différence de potentiel entre les bornes A et B du dipôle. La flèche symbolisant cette différence de potentiel est dirigée vers le potentiel élevé. $VA - VB = E$

Remarque : le générateur impose la tension E au récepteur

b) Générateur de tension réel : dans la réalité des chutes de potentiel internes occasionnent une diminution de la tension selon l'intensité du courant qui est absorbée par le récepteur. Des résistances internes sont associées au générateur. On a : $V_A - V_B = E - rI$

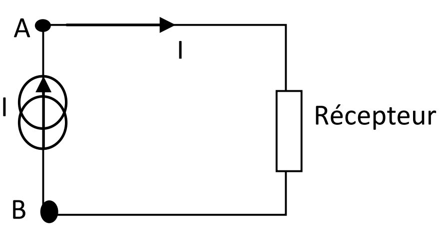


3) Générateur de courant

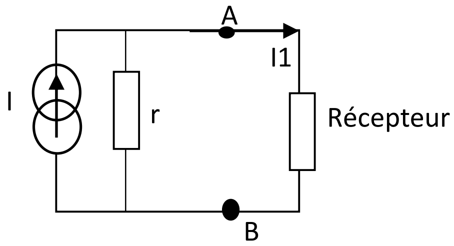
a) Générateur de courant idéal : il impose un courant I constant au récepteur.

b) Générateur de courant réel : il est composé d'un générateur de courant en parallèle avec une résistance interne r.

Générateur de courant idéal



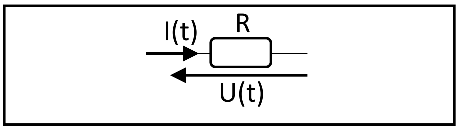
Générateur de courant réel



4) Relation Tension-courant

Dans un circuit électronique il y a 3 dipôles passifs linéaires : la résistance R, le condensateur C et la bobine L. on modélise la relation entre les tensions et les courants vues au bornes de ces éléments par des équations différentielles linéaires :

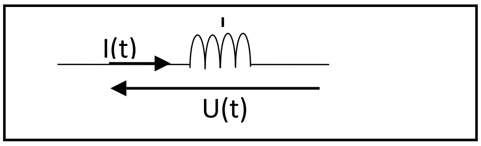
Résistance $U(t) = R * I(t);$



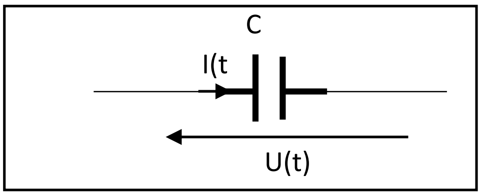
Dans le cas du régime sinusoïdal permanent $U = R * I$;
$R: resistance\ (\Omega) Ohm$

Bobine $U(t) = L * \frac{d(I(t))}{dt}$

Dans le cas du régime sinusoïdal permanent $U = L * \omega * I$;
$L: inductance\ propre\ [Henry; \omega: pulsation$



Condensateur $U(t) = \frac{1}{C} * \int I(t)dt$



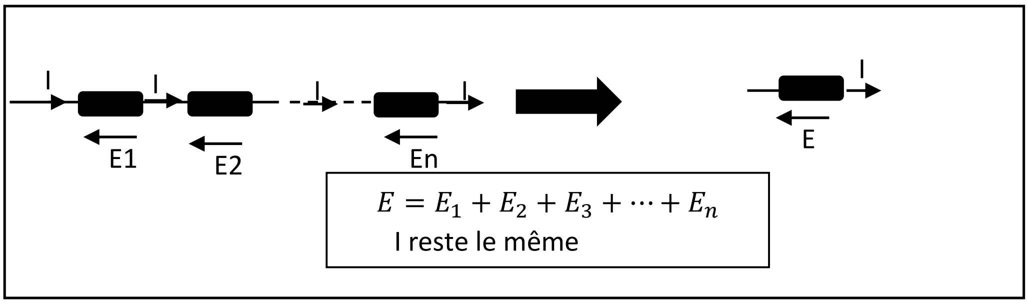
Dans le cas du régime sinusoïdal permanent $U = \frac{I}{C * \omega}$;

$C: capacité [F] Farad$

5) Association de dipôles : on peut regrouper les dipôles pour simplifier les circuits

5.1 Association série

On relie une borne d'un dipôle à une autre borne d'un autre dipôle si le courant qui traverse le 1er dipôle est le même que celui qui traverse le 2ème dipôle.

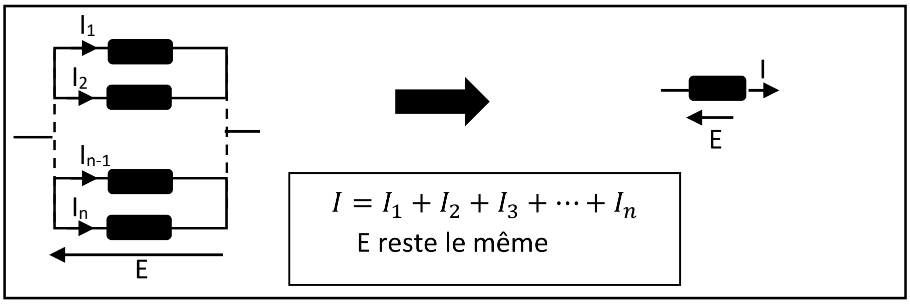


$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_n$$

I reste le même

5.2. Association parallèle

Les 2 bornes d'un dipôle sont reliées aux deux bornes de l'autre dipôle en gardant la même tension au bornes des deux dipôles.



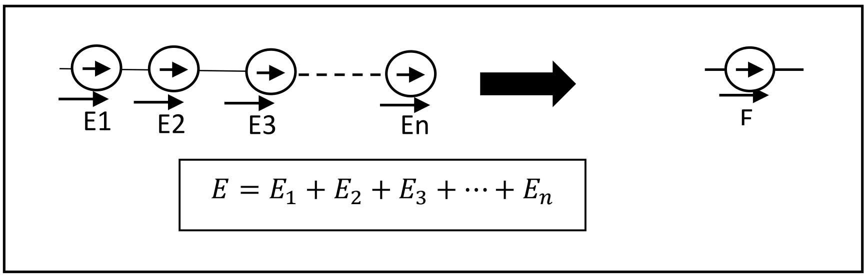
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$$

E reste le même

5.3. Dipôle équivalent

a) Générateurs de tension

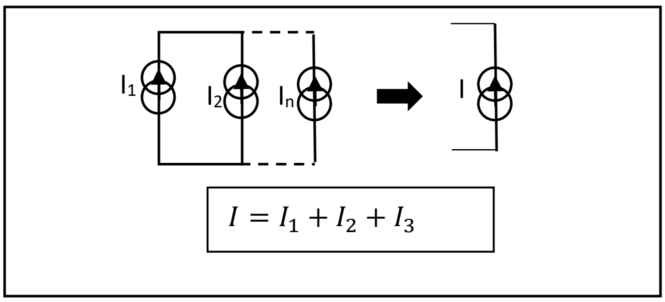
Les générateurs de tension sont associés en série. Ils ne peuvent pas être associés en parallèle.



$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_n$$

b) Générateurs de courant

Les générateurs de courants sont associés en parallèles. Ils ne peuvent pas être associés en série.



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

c) Résistance

Série : $R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

Parallèle : $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_n}$

d) Bobine

Série : $L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$

Parallèle : $\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots \frac{1}{L_n}$

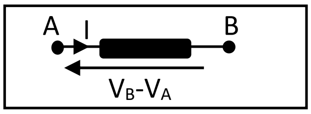
e) Condensateur

Série : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_n}$

Parallèle: $C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

6. Les lois de l'électrocinétiques en régime permanent

6.1 Loi d'Ohm



La différence de potentiel (ddp) aux bornes de la branche AB s'écrit : $V_B - V_A = R * I$

Dans le cas de plusieurs résistances en série

$$V_A - V_B = R_1 * I + R_2 * I + \cdots + R_n * I = I * \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Le sens du courant est opposé au sens de la tension

Dans le cas d'existence de sources de tension en série dans la branche AB

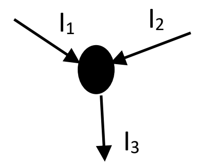
$$V_A - V_B = (E_1 - E_2) + R_1 * I + R_2 * I + \cdots + R_n * I = \pm \sum_{i=1}^{m} E_i + I * \sum_{i=1}^{n} R_i$$

6.2. Loi de Kirchhoff

a) Loi des nœuds

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Exemple



$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

b) Loi des mailles

Une relation de maille se présente comme la somme algébrique des ddp aux bornes de branches qui délimitent la maille qui est égale à zéro. Le sens de parcourt de la maille est arbitraire. Le courant dans une branche contenant un générateur est orienté de sorte qu'ils proviennent de la borne positive de cette source $\pm \sum_{k=1}^{n} E_k \pm \sum_{i=1}^{m} R_i * I_i = 0$

La forme matricielle de cette équation est :$[E] = [R] * [I]$

On peut résoudre cette forme d'équation en utilisant la méthode de Cramer : Chaque courant est déterminé en fonction de son déterminant particulier : $I_i = \frac{\Delta I_i}{\Delta \mathrm{R}}$

ΔR : déterminant de la matrice des résistances

ΔI_i : déterminant de la matrice des résistances modifiée. Dans la matrice R, on substitue la colonne i par le vecteur E des Fém.

Méthode des courants fictifs

On associe à chaque maille indépendante, un courant fictif J. tous les courants de maille doivent être choisis dans le même sens.

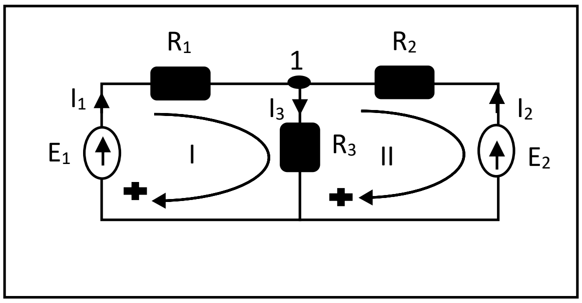
1. On écrit les équations de chaque maille fictive
2. On forme le système matriciel $[E] = [R] * [J]$
3. On détermine les courants J par la méthode de Cramer
4. On déduit les courants réels I par les équations de liaison

Exemple

Soit le circuit de la figure suivante. Retrouver la tension aux bornes de R_3 par la loi des mailles courant réel puis par courant fictif.

E_1=20V ; E_2=15V ; R_1=R_2=R_3=10Ω

Solution



Méthode des courants réels

Maille I :$E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$ (1)
Maille II :$R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_2 = 0$ (2)
Nœud 1 :$I_1 + I_2 - I_3 = 0$ (3)
On écrit le système matriciel Ax=b

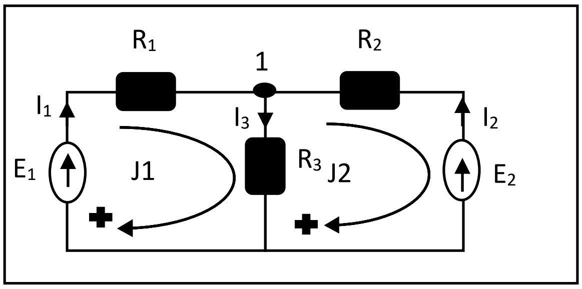
$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta R = R_1 \begin{bmatrix} R_2 & R_3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & R_3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + R_3 \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = R_1(-R_2 - R_3) + R_3(-R_2) = -300$$

$$\Delta I_3 = \det\begin{bmatrix} R_1 & 0 & E_1 \\ 0 & R_2 & E_2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -300$$

$I_3 = \frac{\Delta I_3}{\Delta R} = 1A$; $VR_3 = R_3 * I_3 = 10\,V$

Méthode des courants fictifs



Maille I : $E_1 - R_1 J_1 - R_3 J_1 + R_3 J_2 = 0$ (1)

Maille II : $-R_3 J_2 + R_3 J_1 - R_2 J_2 - E_2 = 0$ (2)

On écrit le système matriciel Ax=b

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ R_3 & -R_2 - R_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta R = (R_1 + R_3)(-R_2 - R_3) - R_3(-R_3) = -300$$

$$\Delta J_1 = \det\begin{bmatrix} E_1 & -R_3 \\ E_2 & -R_2 - R_3 \end{bmatrix} = -250$$

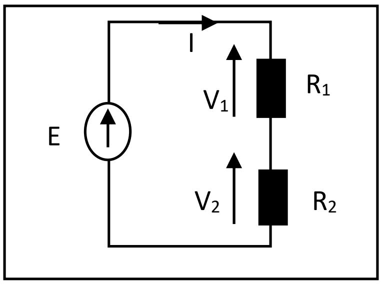
$J_1 = \frac{\Delta J_1}{\Delta R} = 0A$; $VR_3 = R_3 * I_3 = 10\,V$

$$\Delta J_2 = \det\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & E_1 \\ R_3 & E_2 \end{bmatrix} = -100$$

$J_2 = \frac{\Delta J_2}{\Delta R} = 0A$

Diviseur de tension

Deux résistances en série alimentées par une source de tension :

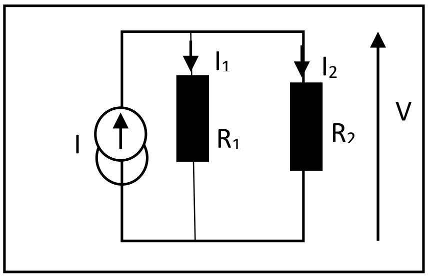


$E - V_1 - V_2 = 0$; $E - R_1 I - R_2 I = 0$

$I = \frac{E}{R_1+R_2}$; $V_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1+R_2}E$; $V_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1+R_2}E$

Diviseur de courant

Deux résistances en parallèles alimentées par une source de courant :

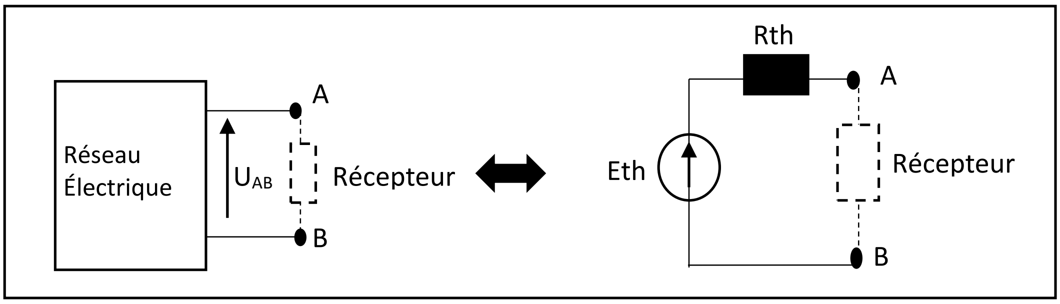


$V = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_{eq} I = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}\, I$

$I_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} I$; $I_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} I$

7. Théorème de Thévenin

Selon Thévenin, tout réseau électrique peut être remplacé par une source unique de F.é.m. Eth en série avec une résistance interne Rth.

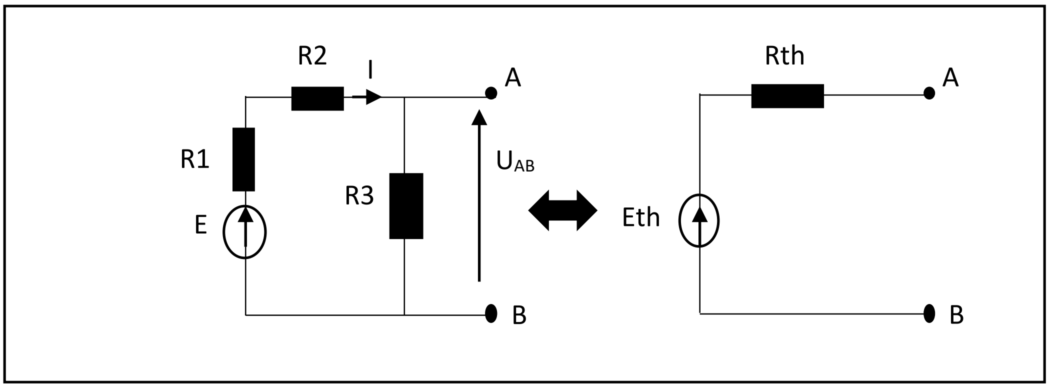


- Eth est déterminé en absence de toute charge entre A et B (Récepteur débranché).
- Rth e la résistance équivalente au réseau électrique vue par les points A et B lorsque toutes les sources sont éteintes :
  - Générateur de tension remplacé par un court-circuit (E=0).
  - Générateur de courant remplacé par un circuit ouvert (I=0).

Exemple

Trouver les caractéristiques du générateur de Thévenin. E=40 V ; R1=3Ω ; R2=7Ω ; R3=10Ω.

Solution

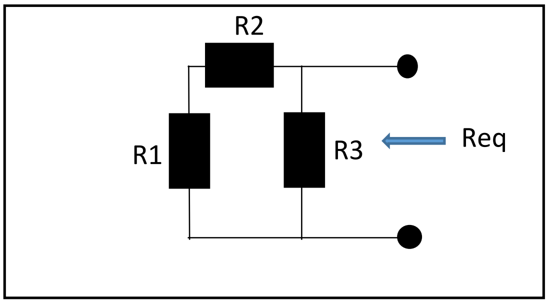


Il y a 1 seule maille donc $E - R_1 I - R_2 I - R_3 I = 0$; $Eth = U_{AB} = R_3 I$; $I = \frac{E}{R_1+R_2+R_3}$

$$I = 2\ A\,;Eth = 20V$$

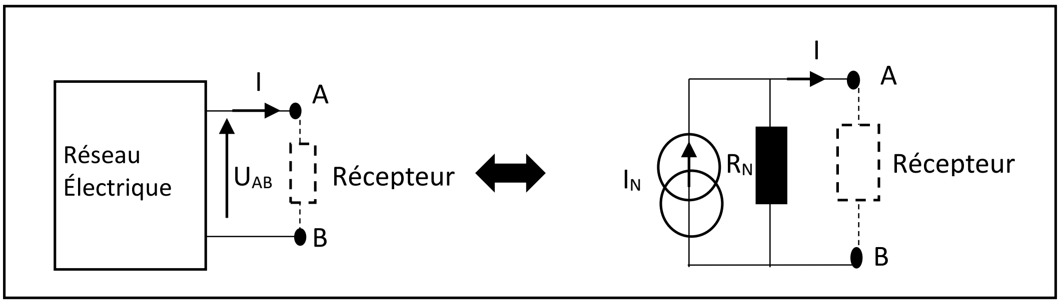
Nous avons $Rth = Req = R_3//(R1 + R2)$

Rth=5Ω.



8. Théorème de Norton

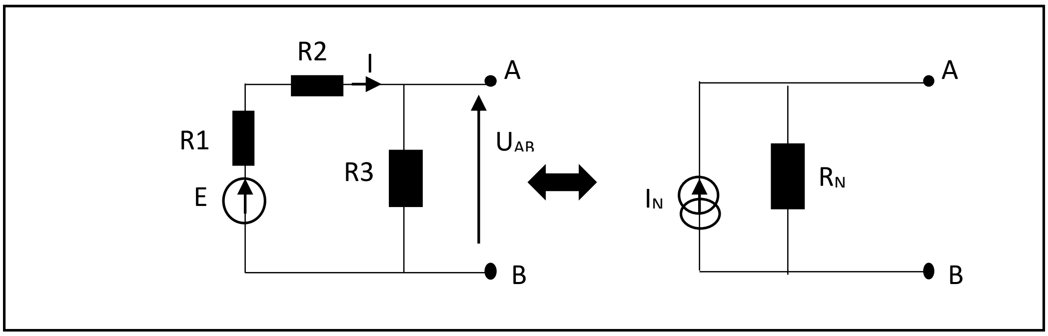
Le circuit électrique peut être remplacé par une source de courant I_N en parallèle avec une résistance R_N



- I_N est déterminé en courcircuitant AB I_N=Icc
- Rth e la résistance équivalente au réseau électrique vue par les points A et B lorsque toutes les sources sont éteintes :
  - Générateur de tension remplacé par un court-circuit (E=0).
  - Générateur de courant remplacé par un circuit ouvert (I=0).

Exemple

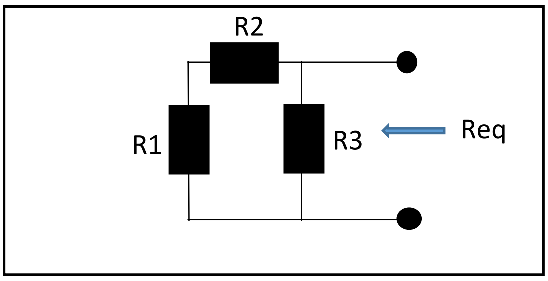
Trouver les caractéristiques du générateur de Norton. E=40 V ;R1=3Ω ;R2=7Ω ;R3=10Ω.



- Détermination de R_N

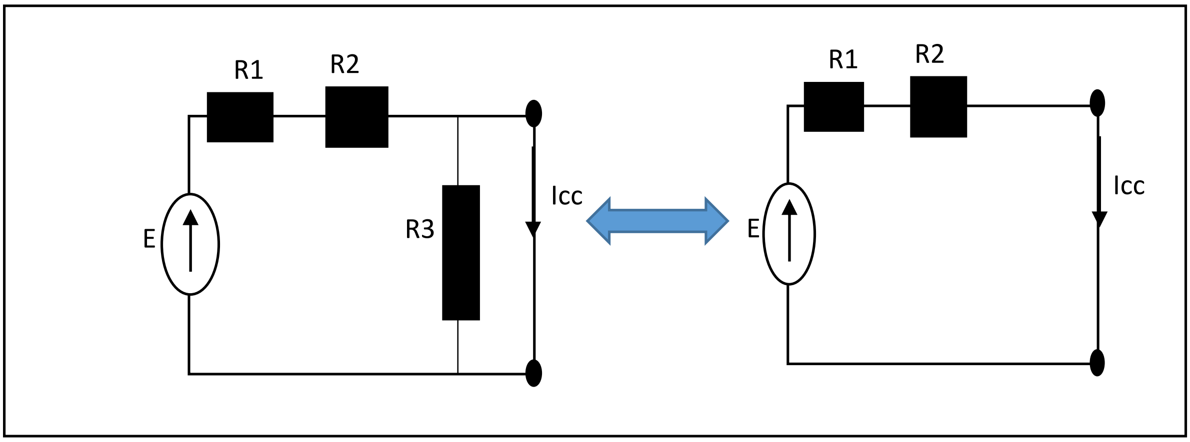
Nous avons $RN = Req = R_3//(R1 + R2)$

R_N=5Ω.



❖ Détermination de I_N =Icc

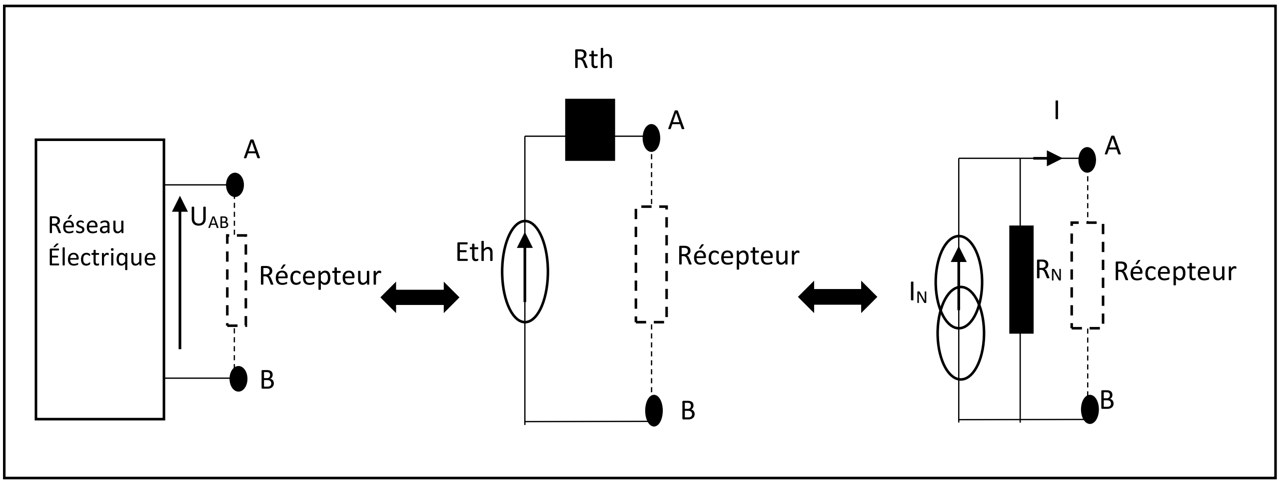
La résistance R3 est courcircuitée :La tension à ses bornes est nulle donc le Courant qui la traverse est nul.



$$Icc = \frac{E}{R_1+R_2} = 10\ A = I_N$$

9. Equivalence Thevenin – Norton

Tout générateur de Thevenin peut être remplacé par un générateur de Norton et vice versa

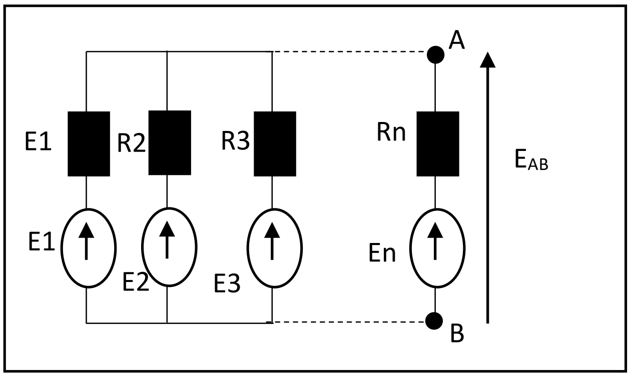


$$I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}};\ E_{th} = R_N I_N;\ R_{th} = R_N$$

10. Théorème de Millman

Pour déterminer la différence de potentiel aux bornes de plusieurs branches en parallèle (E_{AB}), on utilise le théorème de Millman

$$E_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pm\frac{E_i}{R_i} \pm \sum_{k=1}^{m} I_k}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$



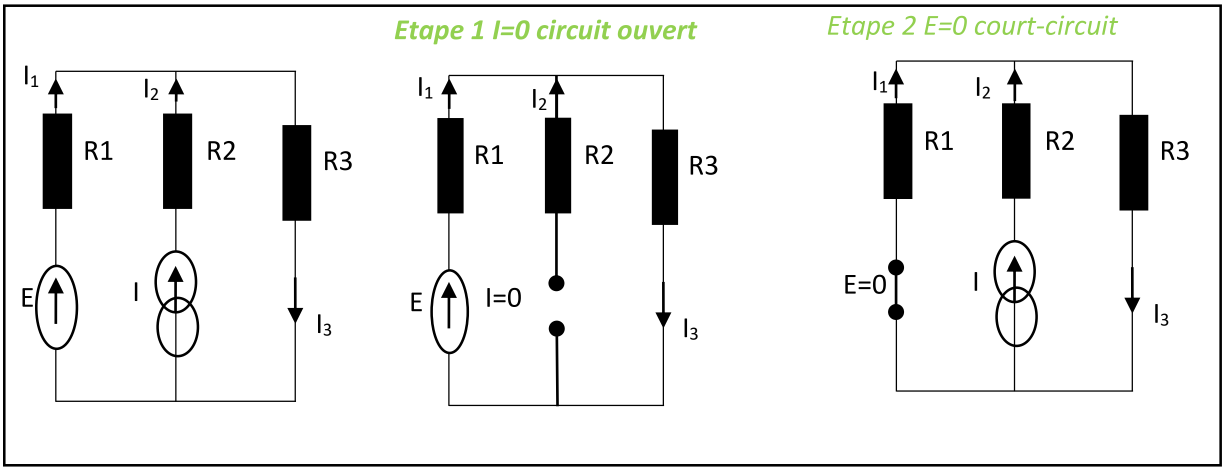
11. Théorème de superposition

Ce théorème est utilisé lorsqu'on a un circuit contenant plusieurs sources électriques. Le principe est de prendre à chaque fois une seule source qui alimente le circuit et annuler les autres. La tension ou le courant aux borne de n'importe quel élément est la somme algébrique des tensions ou des courants calculés pour chaque source seule.

Exemple

Déterminer le courant I_3 qui traverse la résistance R_3 par la méthode de superposition

R1=R2=R3=2KΩ ; E=100 V ;I=0.2A



Solution

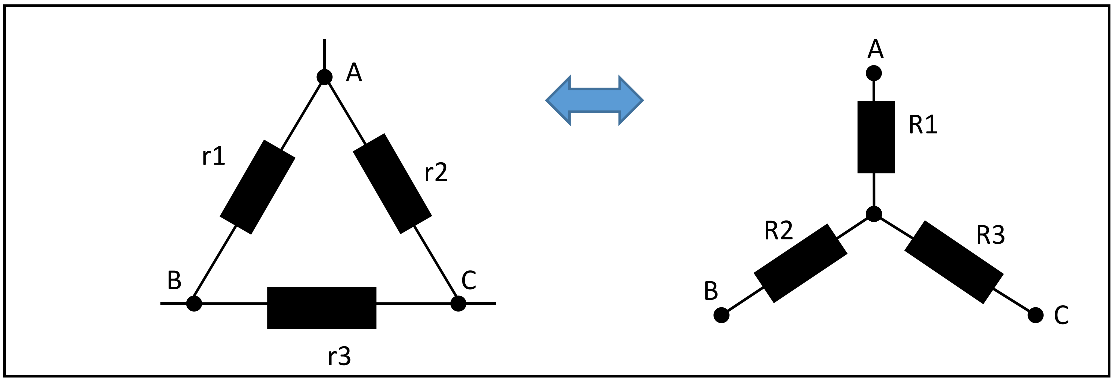
- Etape 1 I=0 la source de courant circuit ouvert : $I'_3 = I_1 = \frac{E}{R_1+R_3} = 25mA$
- Etape 2 E=0 la source de tension court-circuit : diviseur de courant :

$$I''_3 = \frac{R_1}{R_{1+R_3}} I = 0.1mA$$

- **Etape finale :**$I_3 = I'_3 + I''_3 = 25.1\ mA$

12. Théorème de Kennelly

C’est une technique qui nous permet de transformer un réseau sous forme triangle (π,Δ) en forme étoile (T,Y)



$$\begin{cases} R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1+r_2+r_3} \\ R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1+r_2+r_3} \\ R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2+r_3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_1 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1} \\ r_2 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2} \\ r_3 = \frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3} \end{cases}$$