Université de Bejaia.
Faculté des Sciences Exactes.
Département Informatique

Travaux Dirigés
Formalismes Mathématiques des Systèmes

Master 1
Informatique
RN-- RS

Prof. BOUALLOUCHE Louiza

P A R T I E I

Exercice 1. Admettons que la probabilité qu'un étudiant de Master 1 passe en Master 2 soit égale à 0.7. Soit le PATD $\{X_n\}_{n \in N}$ désignant la situation de l'étudiant en chaque fin d'année.

1. Préciser l'espace des états (E) et l'espace de temps (T) correspondants;
2. Donner les probabilités de transition d'un état *i* à un état *j* $\forall\, i, j \in E$;
3. Montrer que $\{X_n\}_{n \in N}$ est une CMTD homogène;
4. Tracer le graphe et la matrice de transition correspondants;
5. Cette CMTD est-elle apériodique et irréductible? Que peut-on conclure?

Exercice 2. Soit un capteur sans fil équipé de deux batteries montées en parallèle et alimentent le capteur indépendamment l'une de l'autre. Chaque batterie a une fiabilité égale à *P* au cours d'une année et on suppose qu'il n'y a pas possibilité de recharge. Soit X_n le processus aléatoire désignant le nombre de batteries déchargées au début de la $n^{ième}$ année.

1. Donner l'espace des états (E) et l'espace de temps (T) du PATD $\{X_n\}_{n \in N}$;
2. Déterminer les probabilités de transition d'un état *i* à un état *j* $\forall\, i, j \in E$;
3. Tracer le graphe orienté (G) de X_n et donner sa matrice de transition (P) ;
4. Le PATD $\{X_n\}$ est-elle une CMTD homogène ?
5. Donner les distributions possibles de l'état initial correspondantes à la CMTD $\{X_n\}_{n \in N}$;
6. Admettons que les deux éléments du dispositif se trouvent initialement en état de fonctionnement. Déterminer les vecteurs de probabilités π^n pour n= {1, 2, 3};;
7. La CMTD $\{X_n\}$ est-elle irréductible et apériodique ? Que pouvez-vous conclure sur la stabilité du système?

Exercice 3. Pour assurer la disponibilité des services informatiques au sein d'une organisation, les serveurs sont généralement organisés en clusters, i.e, il existe deux copies du même serveur qui sont installés dans des endroits différents et fonctionnent en parallèle et indépendamment l'un de l'autre. Ces serveurs concernent entre autres : la messagerie, la connexion internet et l'accès aux fichiers partagés. Si la probabilité du bon fonctionnement d'un serveur au cours d'une heure donnée est égale à P, et si dans le contrat de maintenance négocié et signé entre organisation et fournisseur : un serveur défectueux au cours d'une heure donnée sera remis en service durant l'heure qui suit et un seul peut être réparé à la fois au cours d'une heure, on s'intéresse alors au processus aléatoire $\{X_n\}_{n \in N}$ qui désigne le nombre de serveurs en bon fonctionnement dans un cluster donné au début de la $n^{ième}$ heure.

1. Donner l'espace des états (E) et l'espace de temps (T) du PATD X_n ;
2. Déterminer les probabilités de transition d'un état i à un autre état $j \ \forall i, j \in E$;
3. Tracer le graphe orienté (G) de X_n et donner sa matrice de transition (P) ;
4. $\{X_n\}_{n \in N}$ est-elle une CMTD homogène ?
5. Monter que $\{X_n\}_{n \in N}$ est une CMTD irréductible ;
6. La chaîne $\{X_n\}_{n \in N}$ est-elle apériodique ?
7. Calculer la distribution stationnaire π de $\{X_n\}_{n \in N.}$

Exercice 4. Dans un système de serveurs web, le trafic est généralement sporadique, i.e. les tâches arrivent selon un processus $MMPP_2$ (Markov-Modulated Poisson Process). Ceci signifie que le processus d'arrivée est toujours de Poisson mais le taux d'arrivée change d'un intervalle de temps à un autre. Tantôt ce taux est égal λ_1 et tantôt il est égal λ_2 ($\lambda_1 >> \lambda_2$). On s'intéresse au PATD $\{X_n\}_{n \in N}$ désignant l'état du serveur au début de chaque heure défini par le taux avec lequel il fonctionne. Sachant que la probabilité de basculer de l'état 1 (taux λ_1) à l'état 2 (taux λ_2) est $R1 = 0.8$ et la probabilité de basculer de l'état 2 à l'état 1 est $R2 = 0.6$.

1. Préciser l'espace des états (E) et l'espace de temps (T) du processus X_n ;
2. Déterminer les probabilités de transition d'un état i à un état $j \ \forall i, j \in E$;
3. Tracer le graphe orienté et la matrice correspondants ;
4. Ce PATD est-il une CMTD homogène ?
5. Calculer la probabilité que le système soit entrain de transmettre avec un taux λ_2 après *3h*.
6. Monter que le système est stable ;
7. Calculer la distribution stationnaire π de cette CMTD.

Exercice 5. On considère un réseau à commutation de paquets constitué de 04 routeurs (R_1, R_2, R_3 et R_4), de 04 liaisons ($L_{2\text{-}4}$, $L_{4\text{-}3}$, $L_{3\text{-}1}$, $L_{3\text{-}2}$) unidirectionnelles et fiables et d'une liaison ($L_{1\text{-}2}$) bidirectionnelle et non fiable. Les paquets de données sont générés par le LAN (A) connecté directement au routeur (R_2), ils sont routés par le réseau WAN pour qu'ils soient livrés au LAN (B) directement connecté au routeur (R_3); ou bien ils sont détruits au niveau du routeur (R_3) quand le TTL des paquets atteint sa limite. On suppose que la décision de routage est équiprobable et que la fiabilité de la liaison ($L_{1\text{-}2}$) est égale à ½.

1. Donner la chaine de Markov correspondante aux états d'un paquet de données dans le réseau WAN;
2. Quelle est la probabilité qu'un paquet soit de nouveau sur le routeur (R_2) après 04 sauts ?
3. Combien de fois passera-t-il en moyenne par le routeur (R_3) avant qu'il soit livré définitivement au LAN (B) ou bien détruit ?
4. Quelle est la probabilité qu'il soit livré au LAN (B) ?
5. Combien en moyenne fera-t-il de sauts pour revenir sur le routeur (R_2) ?

P A R T I E I I

Exercice 1. Un serveur web reçoit des requêtes HTTP en moyenne toutes les 25 ms. Les requêtes ont toutes la même priorité et sont donc traitées selon leur ordre d'arrivée sur le serveur. La prise en charge d'une requête HTTP est de durée moyenne de 20 ms (une seule requête peut être traitée à la fois).
On suppose que les durées des inter-arrivées sont distribuées selon la loi exponentielle et les temps de traitement sont indépendants et identiquement distribués selon la loi exponentielle. On suppose aussi que le serveur web possède une capacité suffisamment importante pour contenir toutes les requêtes des utilisateurs.

1. Donner le modèle de file d'attente modélisant le serveur web.
2. Préciser les taux d'arrivée et de service.
3. Vérifier la stabilité de la file.
4. Calculer les mesures de performances suivantes :
   - Nombre moyen de requêtes HTTP dans le serveur web.
   - Nombre moyen de requêtes HTTP en attente d'être prises en charge.
   - Temps moyen d'attente d'une requête dans la file.
   - Temps moyen de séjour d'une requête dans le serveur web.

Exercice 2. On souhaite modéliser un ordinateur, équipés de deux CPU qui traitent des programmes en parallèle, par un système de file d'attente simple. Les programmes arrivent suivant un processus de Poisson. La moyenne entre deux arrivées est de 1/2s. La durée moyenne d'exécution d'un programme dans chaque CPU suit une loi exponentielle avec une moyenne de 500 ms. Chaque CPU exécute un programme à part et ne peut exécuter qu'un seul à la fois.

1. Donner le modèle de file d'attente correspondant à l'ordinateur.
2. Préciser le taux d'arrivée et le taux de service de la file.
3. Vérifier la condition de stabilité du système d'attente.
4. Calculer le nombre moyen de programmes dans l'ordinateur.
5. Calculer le nombre moyen de programmes qui sont en attente d'être exécutés.
6. Utiliser la formule le Little pour calculer les temps moyens d'attente et de réponse dans l'ordinateur.

Exercice 3. On considère un tampon (buffer) pouvant contenir 32 données. Les entrées des données dans le tampon se font selon un processus de Poisson de taux $\lambda = 500$ données/secondes. Si le tampon est plein, les données qui arrivent sont perdues. La prise de données a lieu selon un processus de Poisson de taux $\mu = 625$ données/secondes.

1. Donner le modèle de file d'attente correspondant au tampon.
2. Calculer la probabilité qu'une donnée soit perdue.
3. Calculer le nombre moyen de données dans le tampon qui sont en attente d'être prises.
4. Calculer la durée moyenne d'une donnée dans le tampon avant qu'elle soit prise.

Exercice 4. On considère un calculateur disposant d'une unité centrale (U1) et d'une unité d'entrées-sorties (U2). Les programmes sont exécutés par l'unité centrale U1 dans l'ordre de leur arrivée dans la file d'attente. Après un temps d'exécution, le programme quitte le calculateur (probabilité α) ou demande une entrée/sortie (probabilité $1 - \alpha$) ; dans ce dernier cas, il est interrompu et dirigé vers l'unité d'entrées/sorties U2. L'unité d'entrées-sorties travaille également selon la discipline FIFO. Lorsque l'entrée-sortie d'un programme est terminée, celui-ci rejoint la file d'attente de l'unité centrale.
Le nombre d'arrivées des programmes suit une loi de Poisson (les durées des inter-arrivées sont exponentielles) de taux λ et les temps d'exécution dans U1 et U2 sont indépendants et suivent une loi exponentielle de taux respectivement $\mu 1$ et $\mu 2$.

1. Donner le réseau de files d'attente correspondant au calculateur.
2. Paramétrer le réseau de files d'attente.
3. Donner la condition stabilité du réseau de files d'attente.
4. Calculer le temps de réponse et le nombre moyen de programmes dans le réseau.