# Métriques de Performance de certains modèles de files d'attente

*P(n)*: Probabilité qu'il y ait *n* requêtes dans le système
*E(N)*: Nombre moyen de requêtes dans le système
*E(L)*: Longueur de la file ou Nombre moyen de requêtes en attente d'être servis
*E(w)* : Délai moyen d'attente avant le service
*E(T)*: Temps moyen de réponse ou temps moyen de séjour dans le système.

Dans ce qui suit **ρ = λ / μ** où λ est le taux d'arrivée et μ est le taux de service

**M/M/1 queue**

$$p(n) = \rho^n(1-\rho) \qquad \rho = \lambda/\mu$$
$$E(N) = \rho/(1-\rho)$$
$$\sigma_N^2 = \rho/(1-\rho)^2$$
$$E(L) = \rho^2/(1-\rho)$$
$$E(w) = \rho/\mu(1-\rho)$$
$$E(T) = 1/\mu(1-\rho)$$

distribution of response time $T(x) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)x}$

**M/M/1/K queue**

$$p(n) = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} \quad \text{if } \lambda \neq \mu$$
$$p(n) = \frac{1}{K+1} \quad \text{if } \lambda = \mu$$

Probability that a customer is lost $p(K) = (1-\rho)\rho^K/(1-\rho^{K+1})$.

$$E(N) = \rho\left[\frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}\right] \quad \text{if } \lambda \neq \mu$$
$$E(N) = \frac{K}{2} \qquad \text{if } \lambda = \mu$$

$$E(L) = E(N) - (1 - p(0))$$
$$E(W) = E(L)/\lambda(1 - p(K))$$
$$E(T) = E(N)/\lambda(1 - \rho(K))$$

**M/M/C queue**

$$p(n) = p(0)\frac{\rho^{n}}{n!} \qquad \text{if } n \leqslant C,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$
$$p(n) = p(0)\frac{\rho^n}{C^{n-c} \cdot C!} \qquad \text{if } n \geqslant C$$
$$p(0) = \left[\sum_{k=0}^{C-1} \frac{\rho^{k}}{k!} + \frac{(\rho)^C}{C!}\frac{1}{1 - \rho/C}\right]^{-1}$$

Probability that all the servers are occupied

$$= \text{Erlang's formula C}$$
$$= \mathscr{C}(C, \rho) = \frac{\rho^C}{C!} \Big/ \left[\frac{\rho^C}{C!} + (1 - \rho)\sum_{k=0}^{C-1}\frac{\rho^k}{k!}\right]$$
$$E(N) = \rho + E(L)$$
$$E(L) = \frac{\rho^C \lambda\mu}{(C-1)!(C\mu - \lambda)^2} p(0)$$
$$E(W) = E(L)/\lambda$$
$$E(T) = E(N)/\lambda$$

**M/M/C/C and M/GI/C/C queues**

$$p(n) = \frac{\rho^n/n!}{1 + \rho + \rho^2/2! + \ldots + \rho^C/C!}$$

Probability that a customer is rejected = Erlang's formula

$$= p(C) = \frac{\rho^C/C!}{1 + \rho + \rho^2/2! + \ldots + \rho^C/C!}$$
$$E(N) = p(1 - \rho(C))$$
$$E(L) = 0$$
$$E(W) = 0$$
$$E(T) = \frac{1}{\mu}$$

**M/M/C/K queue**

$$p(n) = p(0)\frac{\rho^n}{n!} \qquad \text{for } n \leqslant \mathrm{C}$$

$$p(n) = p(0)\frac{\rho^{\mathrm{C}}}{\mathrm{C}!}\left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^{n-\mathrm{C}} \qquad \text{for } \mathrm{C} \leqslant n \leqslant \mathrm{K}$$

$$p(0) = \left[\sum_{n=0}^{\mathrm{C}} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{\mathrm{C}}}{\mathrm{C}!}\sum_{n=1}^{\mathrm{K-C}}\left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^n\right]^{-1}$$

$$\mathrm{E(N)} = \mathrm{E(L)} + \sum_{n=0}^{\mathrm{C}-1} np(n) + \mathrm{C}\left(1 - \sum_{n=0}^{\mathrm{C}-1} p(n)\right)$$

$$\mathrm{E(L)} = p(0)\frac{\rho^{\mathrm{C}+1}/\mathrm{C}}{\mathrm{C}!(1-\rho/\mathrm{C})^2}\left[1 - \left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^{k-\mathrm{C}+1} - \mathrm{K} - \mathrm{C} + 1\left(\frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{K-C}}\left(1 - \frac{\rho}{\mathrm{C}}\right)\right]$$

$$\mathrm{E(W)} = \mathrm{E(L)}/\lambda(1 - p(\mathrm{K}))$$

$$\mathrm{E(T)} = \mathrm{E(N)}/\lambda(1 - p(\mathrm{K}))$$

**M/M/$\infty$ and M/GI/$\infty$ queues**

$$p(n) = e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}$$

$$\mathrm{E(N)} = \rho$$

$$\mathrm{E(L)} = 0$$

$$\mathrm{E(W)} = 0$$

$$\mathrm{E(T)} = \frac{1}{\mu}$$

**M/D/1 queue**

$$\mathrm{E(N)} = \frac{2\rho - \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$\mathrm{E(L)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$\mathrm{E(W)} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

$$\mathrm{E(T)} = \frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

Mean number left in the queue by a departing customer $= (\rho/(1-\rho)) - \rho^2/2(1-\rho)$.