Université A. Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

$1^{\text{ère}}$ **année ST**
Année universitaire
2022 / 2023

Série de TD n°2 : Ensembles et relations

Exercice n°1

On considère dans $\mathbb{R}$ les sous-ensembles suivants : $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$

Déterminons

$A \backslash B =]-\infty, 3] \backslash]-2, 7] =]-\infty, -2]$

$B \backslash A =]-2, 7] \backslash]-\infty, 3] =]3, 7]$

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ &=]-\infty, -2] \cup]3, 7] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap C &=]-\infty, 3] \cap]-5, +\infty[\\ &=]-5, 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup C &=]-\infty, 3] \cup]-5, +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(A \backslash B) \cap C} &= \overline{]-\infty, -2] \cap]-5, +\infty[} \\ &= \overline{]-5, -2[} \\ &= \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{]-5,-2[} \\ &=]-\infty, -5] \cup [-2, +\infty[. \end{aligned}$$

Exercice n°2

I. 1. Déterminons $P(F)$.

$$P(F) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

2.
$1 \notin P(F)$ Non
$\{1,2\} \subset F$ Oui,
$\{1,2\} \in P(F)$ Oui,
$\emptyset \subset F$ Oui,
$\{\emptyset\} \notin P(F)$ Non
$\emptyset \in F$ Non

II. Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrons que

1. $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.
   Soit $x \in C_E^{(A\cap B)}$,

$$\begin{aligned} x \in C_E^{(A\cap B)} &\Leftrightarrow (x \notin A\cap B) \wedge (x \in E) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B) \wedge (x \in E) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in E) \vee (x \notin B \wedge x \in E) \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \vee x \in C_E^B \\ &\Leftrightarrow x \in C_E^A \cup C_E^B. \end{aligned}$$

   Donc $C_E^{(\Lambda\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$.
2. Soit $(x, y) \in (A \cup B) \times C$,

$$\begin{aligned} (x,y) \in (A\cup B)\times C &\Leftrightarrow x \in (A\cup B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A\times C) \vee (x,y) \in (B \times C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A\times C) \cup (B\times C). \end{aligned}$$

   Donc $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Exercice n°3

I. 1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
a)- $\mathcal{R}$ est réflexive car

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0,$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive.
b)- $\mathcal{R}$ est symétrique car on a

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x.y > 0 \\ &\Longleftrightarrow y.x > 0 \text{ (le produit est commutatif dans } \mathbb{R} \text{)} \\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est symétrique.
c)- $\mathcal{R}$ est transitive car on a

$$\begin{aligned}\forall x,y,z\in\mathbb{R}^*,(x\mathcal{R}y)\wedge(y\mathcal{R}z) &\Longleftrightarrow \begin{cases} x.y>0\\ \wedge\\ y.z>0\end{cases}\\ &\Longrightarrow x.y^2.z>0\\ &\Longrightarrow x.z>0\,\big(y^2>0\big)\\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z\end{aligned}$$

donc

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}^*,\quad (x\mathcal{R}y)\wedge(y\mathcal{R}z)\Longrightarrow x\mathcal{R}z,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.

2. Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$.
Soit $a\in\mathbb{R}^*$,

$$\dot{a}=\{x\in\mathbb{R},x\mathcal{R}a\},$$

or

$$x\mathcal{R}a\Longleftrightarrow x.a>0.$$

Deux cas se présentent :
Si $a>0$ alors $x>0$, par suite $\dot{a}=\mathbb{R}^*_+$
Si $a<0$ alors $x<0$, par suite $\dot{a}=\mathbb{R}^*_-$
On déduit alors

$$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}}=\left\{\mathbb{R}^{*+},\mathbb{R}^{*-}\right\}$$

II. Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation binaire $\mathcal{T}$ par :

$$\forall x,\quad y\in\mathbb{R},\quad x\mathcal{T}y\Longleftrightarrow\cos^2 x+\sin^2 y=1$$

1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
a)- Réflexivité de $\mathcal{T}$: $\forall x\in\mathbb{R}$. On a la formule

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1\Longrightarrow x\mathcal{T}x$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R},x\mathcal{T}x$.
D'où la réflexivité de $\mathcal{T}$.

b)-Symétrique de $\mathcal{T}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
x\mathcal{T}y &\Longrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1 \\
&\Longrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y + \left(\cos^2 y + \sin^2 x\right) = 1 + \left(\cos^2 y + \sin^2 x\right) \\
&\Longrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y = 1 + \left(\cos^2 y + \sin^2 x\right) \\
&\Longrightarrow 1 + 1 = 1 + \left(\cos^2 y + \sin^2 x\right) \\
&\Longrightarrow 1 = \cos^2 y + \sin^2 x \\
&\Longrightarrow \cos^2 y + \sin^2 x = 1 \\
&\Longrightarrow y\mathcal{T}x
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{T}y \Longrightarrow y\mathcal{T}x$.
D'où la symétrie de $\mathcal{T}$
c)- transitivité de $\mathcal{T}$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{T}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{T}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos^2 x + \sin^2 y = 1 \ldots (1) \\ \text{ et} \\ \cos^2 y + \sin^2 z = 1 \ldots (2) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
(1) + (2) &\Longrightarrow \cos^2 x + \left(\sin^2 y + \cos^2 y\right) + \sin^2 z = 2 \\
&\Longrightarrow \cos^2 x + \sin^2 z = 1
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x\mathcal{T}y$ et $y\mathcal{T}z \Longrightarrow x\mathcal{T}z$.
D'où la transitivité de $\mathcal{T}$.
De a), b), c), on a $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.
2. La classe d'équivalence de $\frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\pi}}{6} &= \left\{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{T}\frac{\pi}{6}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \cos^2 x = \frac{3}{4}\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} : \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\
&= \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi\right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Exercice n°4

I. Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ divise } y \quad (\exists k \in \mathbb{Z}^* : y = kx)$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
a) Réflexivité : $\forall \in \mathbb{N}^*, x$ divise $x(x = 1.x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$
donc $\mathcal{R}$ est réflexive
b) Antisymétrie :Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \text{ divise } y \\ y \text{ divise } x \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* : & y = kx \\ \exists n \in \mathbb{N}^* : & x = ny \end{cases}$$
$$\Rightarrow x = nkx \Rightarrow nk = 1 \Rightarrow n = k = 1\,(n, k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow x = y.$$

Ce qui prouve que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
c) Transitivité : Soient x, y et $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \text{ divise } y \\ y \text{ divise } z \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* & : y = kx \\ \exists n \in \mathbb{N}^* & : z = ny \end{cases}$$
$$\Rightarrow z = nk \cdot x$$
$$\Rightarrow x\mathcal{R}z$$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.
Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et tansitive alors $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
2. Cet ordre est partiel, car $\exists x = 2, y = 3$ tels que :
2 (non $\mathcal{R}$) 3 et 3 (non $\mathcal{R}$).

II. Sur $\mathbb{N}^2$, on considère la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$(a, b)\mathcal{S}\,(a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a',$$

1. Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
a) Réflexivité de $\mathcal{S}$: Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$a + b = b + a.$$

Donc $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, (a, b)S(a, b)$. D'où la réflexivité de S.
b) Symétrie de S : soient $(a, b), (a', b') \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a, b)S\,(a', b')$.
Montrons que $(a', b')\,\mathcal{S}(a, b)$. On a

$$\begin{aligned}(a, b)S\,(a', b') &\Rightarrow a + b' = b + a' \\ &\Rightarrow b + a' = a + b' \text{ (symétrie de l'egalité)} \\ &\Rightarrow a' + b = b' + a \text{ (commutativité de l'addition)} \\ &\Rightarrow (a', b')\,S(a, b)\end{aligned}$$

Donc $\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{N}^2, (a, b)\mathcal{S}\,(a', b') \Rightarrow (a', b')\,\mathcal{S}(a, b)$.
D'où la symétrie de S.
c) Transitivité de $\mathcal{S}$: Soient $(a, b), (a', b')\,, (a'', b'') \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a, b)S\,(a', b')$

et $(a', b')\, S\, (a'', b'')$.
Montrons que $(a,b) S\, (a'', b'')$. On a

$$\left\{\begin{array}{c}(a,b)\mathcal{S}\,(a',b')\\ \text{et}\\ (a',b')\,\mathcal{S}\,(a'',b'')\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}a+b'=b+a'\ldots(1)\\ \text{et}\\ a'+b''=b'+a''\ldots(2)\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}(1)+(2) &\Rightarrow a+b'+(a'+b'')=b+a'+(b'+a'')\\ &\Rightarrow a+b''=b+a''\\ &(a,b)\mathcal{S}\,(a'',b'')\,.\end{aligned}$$

Donc $\forall (a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{N}^2, (a,b)\mathcal{S}\,(a',b')$ et $(a',b')\,\mathcal{S}\,(a'',b'') \Rightarrow (a,b)\mathcal{S}\,(a'',b'')$.
D'où la transitivité de $\mathcal{S}$.
De a), b), c) on a $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
b) Déterminons la classe d'équivalence de $(1,1)$.

$$\begin{aligned}\overline{(1,1)} &= \big\{(a,b)\in\mathbb{N}^2, (a,b)\mathcal{S}(1,1)\big\}\\ &= \big\{(a,b)\in\mathbb{N}^2, a+1=b+1\big\}\\ &= \big\{(a,b)\in\mathbb{N}^2, a=b\big\}\\ &= \{(a,a)/a\in\mathbb{N}\}.\end{aligned}$$