Université Abderrahmane Mira. Bejaia
Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
Département des enseignements de base pour le domaine des SEGC
Première année
Année universitaire 2022-2023

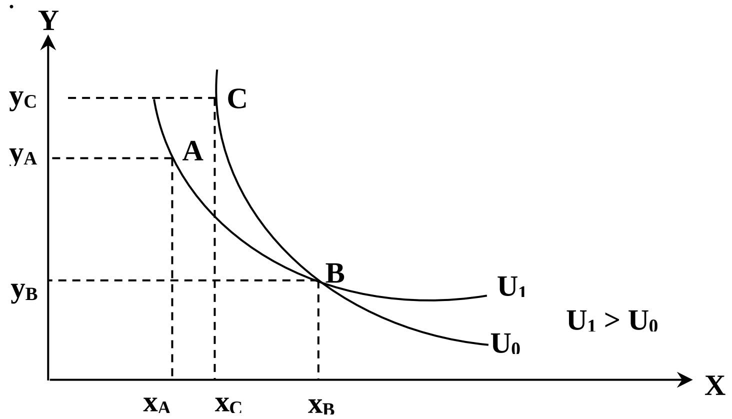
Novembre 2022 **Chargé du Cours et TD : Dr. KANDI Nabil**

Corrigé-type de la deuxième série – (Microéconomie I)

Première partie : Approche ordinale de l'utilité, notion de courbes d'indifférence et de l'élasticité.

1. Le concept de courbe d'indifférence vient de l'évaluation ordinale de l'utilité (approche ordinale de l'utilité), il est apparu pour la première fois dans la littérature chez les auteurs Néo-classiques (les tenants de l'approche ordinale) qui considèrent que le niveau de satisfaction ne peut être mesuré et le consommateur est seulement capable de classer ou d'ordonner ses choix de consommation. Indifférence est par rapport au choix unique et aux combinaisons de consommation qui donnent au consommateur le même niveau d'utilité, c'est-à-dire le consommateur est indifférent le long d'une même courbe d'indifférence.

2. Deux courbes d'indifférence du même individu ne peuvent pas se couper, puisque dans le cas contraire cela signifierait qu'il existe deux niveaux d'utilité pour une même combinaison de biens, ce qui serait contraire au postulat **n°01** de la fonction d'utilité. Ainsi l'hypothèse de la transitivité des choix ne se tient plus. Pour démontrer que deux courbes d'indifférence du même consommateur ne se coupent jamais, il suffit de supposer le contraire. Tel qu'il est illustré sur le graphique ci-dessous :



D'après le graphique ci-dessus, la combinaison « B » a deux niveaux d'utilité, or une combinaison ne peut procurer au consommateur plus d'un niveau d'utilité. De la représentation graphique précédente, on devrait s'attendre,-selon l'hypothèse de la transitivité des choix-, à ce que les deux combinaisons « A » et « C » procurent au consommateur le même niveau d'utilité, puisque les deux combinaisons « A » et « B » procurent le même niveau de satisfaction (elles se situent sur la même courbe d'indifférence U_1) et « B » et « C » procurent le même niveau de satisfaction (elles se situent sur la même courbe d'indifférence U_0). Or $U_1 > U_0$ et donc $A \neq C$ (ce qui constitue une contradiction). De ce fait deux courbes d'indifférence pour le même consommateur ne peuvent jamais se couper. Sinon, on dira que le consommateur est incapable d'établir ses ordres de préférence (l'hypothèse de la complétude n'est pas vérifiée).

3. Lorsque l'on veut mesurer l'effet d'une variation d'un phénomène sur un autre, on peut calculer la sensibilité en faisant le rapport entre les deux variations. Mais cela a peu de sens lorsque les ordres de grandeur des deux phénomènes sont différents. Pour résoudre ce problème, il suffit de comparer non pas les variations absolues comme le font les sensibilités, mais les variations relatives, ce qui neutralise les différences de grandeurs puisque chaque niveau de variation est rapporté à son niveau de grandeur. On appelle de telles mesures les « élasticités ».

L'élasticité prix de la demande mesure l'effet de variation du prix de 1% sur la quantité demandée (ceteris-paribus) ou encore, c'est le rapport de la variation relative (en %) de la demande et la variation relative (en %) du prix (toutes choses étant égales par ailleurs).

Deuxième partie : Exercices d'application : la contrainte budgétaire et l'optimum du consommateur

Exercice 1.

Les préférences d'un consommateur sont présentées comme suit : $Ut = f(x, y) = 4. x^{0,5}. y^{0,75}$ sachant que : Px = 3 DA, Py = 6 DA et R = 600 DA

1. Expression mathématique du TMS $_{x\_y}$:

TMS $_{y\_x}$ = $\frac{Umg_y}{Umg_x} = \frac{4.\ 0,75.\ x^{0,5}\ .\ y^{0,75-1}}{4.\ 0,5.\ x^{0,5-1}.\ y^{0,75}} = \frac{3.\ x^{0,5}\ .\ y^{-0,25}}{2.\ x^{-0,5}.\ y^{0,75}} = \frac{3.\ x^{0,5}\ .\ x^{0,5}}{2.\ x^{0,25}.\ y^{0,75}} = \frac{\boldsymbol{3.\ x}}{\boldsymbol{2.\ y}}$,

La valeur du TMST $_{x \to y}$ lorsque (x, y) = (8, 6) : On remplace la valeur de (x, y) = (8, 6) dans cette formulation et on obtient : TMS $_{y\_x}$ = $\frac{3.\ 8}{2.\ 6} = 2.$

Le TMS $_{x\_y}$ = $\frac{1}{\text{TMS}_{y \to x}}$ ⇔ TMS $_{x\_y}$ = $\frac{1}{\frac{3.\ x}{2.\ y}} = \frac{2.\ y}{3.\ x}$, **lorsque (x, y) = (8, 6) :** On remplace la valeur de (x, y) = (8, 6) dans cette formulation et on obtient : **TMS $_{x\_y}$ = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$**

2. Que faire le consommateur pour maintenir le même niveau d'Utilité en diminuant la quantité de Y de 2 unités

Le **TMS $_{x\_y}$ = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$**, c'est-à-dire que le consommateur renonce à 2 unité du bien Y, en gardant le même niveau d'utilité, il consomme une (1) unité supplémentaire du bien X :

On applique la règle des trois, d'après le TMST $_{x \to y}$:

	ΔX		Δ Y	Δ Ut
TMST $_{x \to y}$	+ 1	⟶	$-\frac{1}{2}$	0
	Δ X	⟶	- 2	

Pour garder le même niveau de satisfaction, la variation de X est de Δ Y = $\frac{-2.\ (+1)}{-\frac{1}{2}}$ = **+ 4** unités du bien X. c'est-à-dire que si le consommateur abandonne 2 unités du bien Y, il doit les substituant par +4 unités du bien X en gardant le même niveau d'utilité.

3. Il s'agit de vérifier la condition de maximisation $\begin{cases} Max\ Ut = f(x, y) \\ \text{S/C} \quad \text{R = Px . X + Py . Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ Ut = 4. x^{0,5}. y^{0,75} \\ \text{S/C} \quad 600 = 3 . X + 6 . Y \end{cases}$

En utilisant la méthode de LAGRANGE : on peut écrire : *L (x, y, λ) = Ut +λ . (R − Px . X − Py . Y) =*
L(x, y, λ) $=4. x^{0,5}. y^{0,75} + \lambda . (600 - 3 . X - 6 . Y)$, Cette équation de LAGRANGE admet des solutions si ces dérivées partielles s'annulent simultanément d'où le système d'équations ci-après :

$$\begin{cases} L'(x) = 0 \\ L'(y) = 0 \\ L'(\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4. 0,5.\ x^{0,5-1}.\ y^{0,75} - 3. \lambda = 0 \\ 4. 0,75.\ x^{0,5}.\ y^{0,75-1} - 6. \lambda = 0 \\ 600 - 3. x - 6. y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\ x^{-0,5}.\ y^{0,75} = 3. \lambda \\ 3.\ x^{0,5}.\ y^{-0,25} = 6. \lambda \\ 600 - 3. x - 6. y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2.\ x^{-0,5}.\ y^{0,75}}{3} \\ \lambda = \frac{3.\ x^{0,5}.\ y^{-0,25}}{6} \\ 600 = 3. x + 6. y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2.\ y^{0,75}}{3\ x^{0,5}} \dots (1) \\ \lambda = \frac{3.\ x^{0,5}}{6.\ y^{0,25}} \dots (2) \\ 600 = 3. x + 6. y .. (3) \end{cases} \quad (1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2.\ y^{0,75}}{3\ x^{0,5}} = \frac{3.\ x^{0,5}}{6.\ y^{0,25}} \\ 600 = 3. x + 6. y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12.\ y^{0,75}.\ y^{0,25} = 9.\ x^{0,5}.\ x^{0,5} \\ 600 = 3. x + 6. y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12.\ y = 9.\ x \\ 600 = 3.x + 6.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{12}.\ x = \frac{3}{4}.\ x \\ 600 = 3.x + 6.y \end{cases}$, On remplace la valeur de Y par X dans la troisième équation (3) et on obtient : $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.\ x \\ 600 = 3.x + 6.\left(\frac{3}{4}.\ x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.\ x \\ 600 = 3.x + 3.\left(\frac{3}{2}.\ x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.\ x \\ 600 = \frac{6.\ x + 9.\ x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.\ x \\ 600 = \frac{15.\ x}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.\ x \\ 1200 = 15.\ x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.\ x \\ x = \frac{1200}{15} = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.\ (80) \\ x = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80\ Unités \\ y = 60\ Unités \end{cases} \Leftrightarrow$

Donc, les quantités des biens x et y qui maximise l'utilité de ce consommateur sont : **(x^*, y^*) = (80, 60).**

4. L'effet d'une diminution du revenu de 10% sur le niveau d'utilité :

10% de R ? : On a $R = 600 \Leftrightarrow \Delta R = 600.\frac{-10}{100} = -60\ DA \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta R = -60\ DA}$

Le paramètre qui mesure l'effet d'une variation du revenu sur le niveau d'utilité est le multiplicateur de Lagrange (λ) : D'après les équations effectuées précédemment pour calculer l'équilibre du consommateur, on constate qu'il existe deux formules mathématiques du multiplicateur de Lagrange (λ) à savoir : $\begin{cases} \lambda = \frac{2.\ y^{0,75}}{3\ x^{0,5}} \dots (1) \\ \lambda = \frac{3.\ x^{0,5}}{6.\ y^{0,25}} \dots (2) \end{cases}$, le calcul de la valeur de λ se fait au choix, c'est-à-dire, soit on effectue le calcul par rapport à l'équation (1) ou (2).

$\lambda = \frac{2.\ (60)^{0,75}}{3\ (80)^{0,5}} = 1,6\frac{Utils}{DA}$, on remplace les valeurs quantités d'équilibre dans les deux équations et on obtient :

$\lambda = \frac{3.\ (80)^{0,5}}{6.\ (60)^{0,25}} = 1,6\frac{Utils}{DA}$, ce résultat indique que pour chaque 1 DA de revenu de plus, le niveau d'utilité totale augmente de 1.6 Utils. ($\lambda = \frac{\Delta\ Ut}{\Delta\ R}$). D'après la formule du multiplicateur Lagrange (λ) : $\lambda = \frac{\Delta\ Ut}{\Delta\ R} \Leftrightarrow\ \ \Delta\ Ut = \Delta\ R\ .\ \lambda$ $\Leftrightarrow\ \Delta\ Ut\ = -60\ .\ (1,6) = -96$ Utils. Pour une diminution du revenu de **60 DA**, l'utilité totale diminue de **96 Utils**.

5. La variation de revenu nécessaire pour accroître le niveau de l'utilité de 200 utils:

D'après la formule du multiplicateur Lagrange (λ) : $\lambda = \frac{\Delta\ Ut}{\Delta\ R} \Leftrightarrow\ \ \Delta\ R = \frac{\Delta\ Ut}{\lambda} \Leftrightarrow\ \Delta\ R\ = +\frac{200}{1.6} = +125\ DA$. Pour un accroissement du niveau d'Ut de 200 Utils, le consommateur devrait augmenter son revenu de **125 DA**.

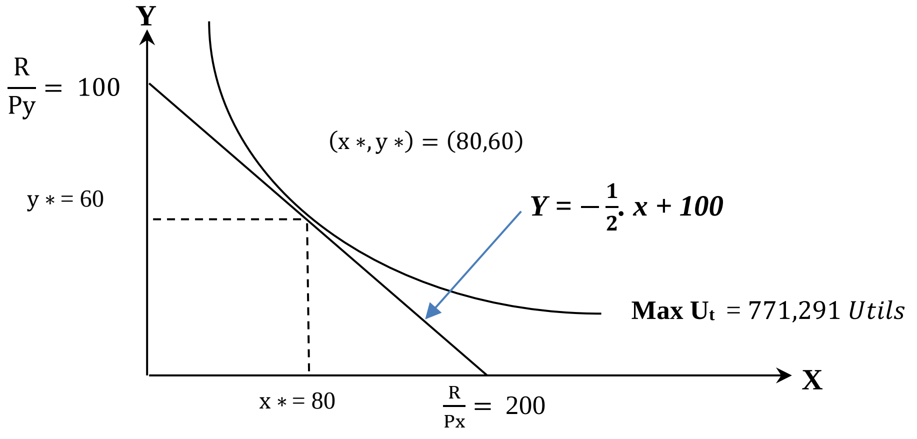
6. La représentation graphique de l'équilibre (l'optimum) :

- L'équation de la droite du budget :$R = Px\ .x + Py\ .y \Leftrightarrow Y = -\frac{Px}{Py}.\ x + \frac{R}{Py} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{6}.x + \frac{600}{6} \Leftrightarrow \boldsymbol{Y = -\frac{1}{2}.x + 100}$. Calculant maintenant les points d'intersection entre la droite budgétaire et les deux axes (abscisses et ordonnés) on obtient :

X	0	$\frac{R}{Px} = \frac{600}{3} = 200$
Y	$\frac{R}{Py} = \frac{600}{6} = 100$	0

1. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des abscisses est (0, 200).
2. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des ordonnées est (100, 0).

La valeur de l'utilité totale à l'équilibre : $Max\ Ut = 4.x^{0,5}.y^{0,75} = 4.(80)^{0,5}.(60)^{0,75} = 771,291\ Utils$



La signification économique de l'équilibre du consommateur E (80, 60) :
A l'équilibre, le rapport des utilités marginales égales au rapport des prix, c'est-à-dire : $\frac{Umg\ x}{Umg\ y} = \frac{Px}{Py}$; ce qui signifie que le dernier dinar dépensé par le consommateur afin d'acheter le bien (X) donne exactement la même utilité que ce dernier dinar dépensé pour l'achat du bien (Y). $\frac{Umg\ x}{Px} = \frac{Umg\ y}{Py}$

Exercice 2 : un estivant est en face d'un choix de préférence entre acheter la pomme et la nectarine ou d'acheter la poire et la pêche. Les deux fonctions d'utilité des deux combinaisons sont représentées comme suit : $\boldsymbol{U1 = f(x,y) = 4.x^2.y + 6}$ sachant que : Px = 160 DA, Py = 100 DA et $\boldsymbol{U2 = f(z,w) = 5.z^2.w + 8}$ sachant que : Pz = 250 DA, Pw = 80 DA et R = 1200 DA

1. lequel des deux acheteurs, l'estivant va choisir pour acheter la meilleure combinaison de biens : l'estivant doit acheter la combinaison qui va lui apporter un meilleur niveau d'utilité.

a. pour la fonction d'utilité U1 : $\begin{cases} \frac{Umg\ x}{Px} = \frac{Umg\ y}{Py} \\ \text{S/C R} = \text{Px.X} + \text{Py.Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8.xy}{160} = \frac{4.x^2}{100} \\ s/c\ 160.X + 100.Y = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 800.xy = 640.x^2 \\ \text{S/C } 160.X + 100.Y = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 800.y = 640.x \\ \text{S/C } 160.X + 100.Y = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{640}{800}.x \\ \text{S/C } 160.X + 100.Y = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = \frac{4}{5}.x \\ \text{S/C } 160.X + 100.\left(\frac{4}{5}.x\right) = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}.x \\ \text{S/C } \frac{160.\ 5.\ x + 4.\ 100.\ x}{5} = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}.x \\ \text{S/C } 800x + 400.x = 6000 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = \frac{4}{5}.x \\ \text{S/C } 1200x = 6000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5}.5 = 4 \\ x = \frac{6000}{1200} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\ Kg \\ y = 4\ Kg \end{cases}$, Donc les quantités des biens x et y qui maximisent l'utilité de ce consommateur sont : **$(x^*, y^*) = (5,4)$.**

Le niveau de l'utilité à l'équilibre de la première fonction d'Ut : $Max\ U1 = f(x*, y*) = f(5,4) = 4.5^2.4 + 6 = \boldsymbol{406\ Utils}$.

b. pour la fonction d'utilité U2 : $\begin{cases} \frac{Umg\ z}{Pz} = \frac{Umg\ w}{Pw} \\ \text{S/C R} = \text{Pz.Z} + \text{Pw.w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10.z.w}{250} = \frac{5.z^2}{80} \\ s/c\ 250.z + 80.w = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 800.z.w = 1250.z^2 \\ s/c\ 250.z + 80.w = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 800.w = 1250.z \\ s/c\ 250.z + 80.w = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{1250}{800}.z \\ s/c\ 250.z + 80.w = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} w = \frac{25}{16}.z \\ \text{S/C } 250.z + 80.\left(\frac{25}{16}.z\right) = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{25}{16}.z \\ \text{S/C } \frac{250.\ 16.\ z + 25.\ 80.\ z}{16} = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{25}{16}.z \\ \text{S/C } 4000z + 2000.z = 19200 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} w = \frac{25}{16}.z \\ \text{S/C } 6000z = 19200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{25}{16}.3{,}2 = 5 \\ z = \frac{9600}{2400} = 3{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3{,}2\ Kg \\ w = 5\ Kg \end{cases}$, Donc les quantités des biens x et y qui maximisent l'utilité de ce consommateur sont : **$(z^*, w^*) = (3{,}2\ ,\ 5)$.**

Le niveau de l'utilité à l'équilibre de la deuxième fonction d'Ut : $Max\ U2 = f(z*, w*) = f(3{,}2\ , 5) = 5.(3{,}2)^2.5 + 8 = \boldsymbol{264\ Utils}$.

Conclusion : l'estivant va choisir d'acheter la pomme et la nectarine parce que cette combinaison de biens lui procure un niveau d'utilité de 406 utils, meilleur que la poire et la pêche qui procure un niveau d'utilité de 264 utils, inférieur à la première combinaison.

2. Expression mathématique du TMS $_{x \rightarrow y}$:
TMS $_{x \rightarrow y} = \frac{Umg_x}{Umg_y} = \frac{8.\ x.\ y}{4.x^2.} = \frac{2.\ y}{x.}$,
La valeur du TMST $_{x \rightarrow y}$ lorsque (x, y) = (5, 4) : On a TMS $_{x \rightarrow y} = \frac{2.\ y}{x.}$: On remplace les valeurs de

(x, y) = (5, 4) dans cette formulation et on obtient : TMS $_{x \to y}$ = $\frac{2.\ 4}{5} = \frac{8}{5}$. Donc **TMS $_{x \to y}$ = $\frac{8}{5}$.**

3. Que faire le touriste pour avoir le même niveau d'Utilité en augmentant la quantité de Y de 2 unités
Le TMS $_{x \to y}$ = $\frac{8}{5}$, on doit d'abord calculer le TMS $_{y \to x}$

La valeur du TMST $_{y \to x}$ lorsque (x, y) = (5, 4) : On a TMS $_{y \to x}$ = $\frac{1}{\text{TMS}\ x \to y} = \frac{5}{8}$, c'est-à-dire que le touriste doit substituer $\frac{5}{8}$ unité du bien « X » par une unité du bien « Y » en gardant le même niveau d'utilité. Si l'estivant consomme (2) unité supplémentaire du bien Y, il va renoncer les quantités consommées du bien X (Δ x) :

On applique la règle des trois, d'après le TMST $_{x \to y}$:

	ΔX		Δ Y
TMST $_{x \to y}$	- $\frac{5}{8}$	⟶	+ 1
	Δ x	⟶	+ 2

Pour garder le même niveau de satisfaction, la variation de X est de Δ x = $\frac{2.\ (-\frac{5}{8})}{1} = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$ unités du bien X.

Conclusion : si l'estivant augmente sa consommation de 2 unités du bien Y, il doit renoncer à $\frac{5}{4}$ unités du bien X en gardant le même niveau d'utilité.

4. L'effet d'une augmentation du revenu de 10% sur l'équilibre de l'estivant :
Le paramètre qui mesure l'effet d'une variation du revenu sur le niveau d'utilité est le multiplicateur de Lagrange (λ) : D'après les équations effectuées précédemment pour calculer l'équilibre du consommateur, on constate qu'il existe deux formules mathématiques du multiplicateur de Lagrange (λ) à savoir : $\begin{cases} \lambda = \frac{8.xy}{160} \ldots(1) \\ \lambda = \frac{4.x^2}{100} \ldots(2) \end{cases}$, le calcul de valeur de λ se fait au choix, c'est-à-dire, soit on effectue le calcul par rapport à l'équation (1) ou (2).
$\lambda = \frac{8.xy}{160} = \frac{4.x^2}{100}$, on remplace les valeurs quantités d'équilibre dans les deux équations et on obtient :
$\lambda = \frac{8.\ 5.\ 4}{160} = \frac{4.\ 5^2}{100} = 1$, ce résultat indique que pour chaque 1 DA de revenu de plus, le niveau d'utilité totale augmente de 1 Utile. ($\lambda = \frac{\Delta\, Ut}{\Delta\, \text{R}}$). Pour une augmentation du revenu de 10 %, cela signifie qu'on doit calculer la valeur de l'augmentation du revenu de 10 %, c'est-à-dire que $\Delta\,\text{R} = 1200.\ 10\,\% = +120$ DA, D'après la formule du multiplicateur Lagrange (λ) : $\lambda = \frac{\Delta\, Ut}{\Delta\, \text{R}} \Leftrightarrow \quad Ut = \Delta\,\text{R}\,.\lambda \Leftrightarrow \quad Ut = +120\,.(1) = +120$ Utils. Pour une augmentation du revenu de 10 %, l'utilité totale augmente de 120 Utils par rapport au niveau de l'équilibre initial de l'estivant.

Troisième partie : Fonction de demande et calcul des élasticités de la demande.

Exercice 1 :
La fonction de demande en transport urbain s'écrit : $Qd_x = 5450 - 2000\,P + 100\,P\alpha - 0{,}1\,R$

1. L'interprétation des signes :
- Le signe négatif de la variable **P** indique qu'il existe une relation inverse entre le nombre d'usagers et le prix des billets conformément à la loi microéconomique de demande par rapport à son prix (quand le prix augmente, la demande envers ce bien baisse et le contraire est vrai).
- Le signe positif de la variable **P_α** montre que l'automobile et le transport en commun sont substituables, c'est-à-dire que l'élasticité croisée est positive.
- Le signe négatif de la variable **R** indique que le transport par autobus est un bien inférieur, c'est-à-dire avec un revenu plus élevé, les usagers préfèrent utiliser un autre moyen de transport (Voiture, Taxi. etc.) En calculant l'élasticité/Revenu, on constate qu'elle est négative.

2. L'équation de la demande lorsque R = 300 DA et P_α = 5,8 DA
$Qd_x = 5450 - 2000\,P + 100\,(5{,}8) - 0{,}1\,(300) \Leftrightarrow \boldsymbol{Qd_x = 6000 - 2000\,P}$

3. Le prix de billet d'autobus
$4000 = 6000 - 2000\,P \Leftrightarrow 2000\,P = 6000 - 4000 \Leftrightarrow 2000\,P = 2000 \Leftrightarrow \boldsymbol{P = 1\text{DA}}$

4. Le nombre de passagers supplémentaires
Si P_α augmente à 2 DA, la fonction de demande s'écrit : $Qd_x = 5450 - 2000\,P + 100\,(5{,}8 + 2) - 0{,}1\,(300) \Leftrightarrow Qd_x = 6200 - 2000\,P$
Lorsque $P = 1\,DA$, $Qd_x = 6200 - 2000\,(1) = 4200$ passagers, ce qui explique un surplus de 200 passagers.

5. L'ajustement que la direction des transports devrait apporter aux prix de billets
$4000 = 6200 - 2000\,P \Leftrightarrow 2000\,P = 6200 - 4000 \Leftrightarrow 2000\,P = 6200 - 4000 \Leftrightarrow P = \frac{2200}{2000}$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{P = 1,1\ DA,}$ Le prix de billet doit augmenter de 0,1 DA.

Exercice 2 :
La demande hôtelière d'un touriste (T) durant la saison estivale est définie par la fonction suivante : $\boldsymbol{Dx = f(R, Px, Py) = \frac{0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75 P_y}{0{,}125\,P_x - 700}}$
Dx : Nombre de nuits passées à l'hôtel, **Px :** Prix moyen d'une nuit passée à l'hôtel, **Py :** Prix moyen d'une nuit des autres modes d'hébergement (Camping, appartement, auberge, dortoir, etc). **Px** = 8000DA, **Py** = 4000DA et **R**= 62000DA.

1. Dites comment varie la demande hôtelière de l'individu (T) si Px diminue de 1000 DA ?
a. Calcul de l'élasticité Prix-directe
Valeur de la demande lorsque Px = 8000DA, **Py** = 4000DA et **R**= 62000DA.

$$\boldsymbol{Dx = f(R, Px, Py) = \frac{0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75 P_y}{0{,}125\,P_x - 700}} \Leftrightarrow Dx = \frac{0{,}1\,(62000) - 0{,}4\,(8000) + 0{,}75(4000)}{0{,}125\,(8000) - 700}$$
$$= \frac{6200 - 3200 + 3000}{1000 - 700} = \frac{6000}{300} = \boldsymbol{20\ nuitées}$$

$$E_{Dx/_{Px}} = \frac{\delta D_x}{\delta P_x} \times \frac{P_x}{D_x} = \frac{-0{,}4\,(0{,}125\,P_x - 700) - 0{,}125\,(0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75 P_y)}{(0{,}125\,P_x - 700)^2} \times \frac{P_x}{\frac{0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75 P_y}{0{,}125\,P_x - 700}} =$$
$$\frac{-0{,}4\,(0{,}125\,(8000) - 700) - 0{,}125\,(0{,}1\,(62000) - 0{,}4(8000) + 0{,}75(4000))}{(0{,}125\,(8000) - 700)^2} \times \frac{(8000)}{20} =$$
$$\frac{-0{,}4\,(1000 - 700) - 0{,}125\,(6200 - 3200 + 3000)}{(1000 - 700)^2} \times \frac{(8000)}{20} = \frac{-0{,}4\,(300) - 0{,}125\,(6000)}{(1000 - 700)^2} \times \frac{(8000)}{20} = \frac{-120 - 750}{(300)^2} \times \frac{(8000)}{20} =$$
$$\frac{-870}{90000} \times \frac{(8000)}{20} = \frac{-87}{9} \times \frac{8}{20} = \frac{-696}{180} = -3{,}87$$

$(-E_{Dx/_{Px}}) = -(-3{,}87) = +3{,}87\ /\ (-E_{Dx/_{Px}}) > 1 \Leftrightarrow$, La demande hôtelière est élastique.

Px diminue de 1000 DA, on calcule d'abord la variation de Px en pourcentage :

Δ Px		Δ Px en (%)
8000	⟶	100%
1000	⟶	Δ Px %

Δ Px% = $\frac{1000\,.100\%}{8000} = \frac{100}{8}$ = **12,5%,** le prix moyen d'une nuit passée à l'hôtel baisse de 12,5%.

Pour calculer la variation de Dx, on utilise la formule suivante :

$E_{Dx/_{Px}} = \frac{\left(\frac{\delta D_x}{D_x}\right)\%}{\left(\frac{\delta P_x}{P_x}\right)\%} \Leftrightarrow \left(\frac{\delta D_x}{D_x}\right)\% = E_{Dx/_{Px}}.\left(\frac{\delta P_x}{P_x}\right)\% = -3{,}86.\,(-12{,}5\%) = \boldsymbol{+48{,}37}\%$

Lorsque le prix moyen d'une nuit passée à l'hôtel baisse de 12,5%, la demande augmente de 48,37%.

2. Déterminez la relation entre le mode d'hébergement hôtellerie et les autres modes d'hébergement ?

On calcule l'élasticité prix-croisée pour connaitre le lien entre le mode d'hébergement hôtellerie et les autres modes d'hébergement :

$E_{Dx/_{Py}} = \frac{\delta D_x}{\delta P_y} \times \frac{P_y}{D_x} = \frac{0{,}75\,(0{,}125\,P_x - 700) - 0.(0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75P_y)}{(0{,}125\,P_x - 700)^2} \times \frac{P_y}{\frac{0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75P_y}{0{,}125\,P_x - 700}} = \frac{0{,}75\,(0{,}125\,(8000) - 700)}{(0{,}125\,(8000) - 700)^2} \times \frac{(4000)}{20} = \frac{0{,}75\,(1000-700)}{(1000-700)^2} \times \frac{(4000)}{20} = \frac{0{,}75\,(300)}{(1000-700)^2} \times \frac{(4000)}{20} = \frac{225}{(300)^2} \times \frac{(4000)}{20} = \frac{225}{90000} \times \frac{(4000)}{20} = \frac{225}{90} \times \frac{4}{20} = \frac{900}{1800} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

$E_{Dx/_{Py}} = 0{,}5\ /\ E_{Dx/_{Py}} > 0 \Leftrightarrow$ Le mode d'hébergement hôtellerie et les autres modes d'hébergement sont substituables.

3. Quel est l'effet d'une diminution de 10% du prix moyen des autres modes d'hébergement sur la demande hôtelière du touriste ?

Pour calculer la variation de Dx lorsque Py diminue de 10%, on utilise la formule suivante :

$E_{Dx/_{Py}} = \frac{\left(\frac{\delta D_x}{D_x}\right)\%}{\left(\frac{\delta P_y}{P_y}\right)\%} \Leftrightarrow \left(\frac{\delta D_x}{D_y}\right)\% = E_{Dx/_{Py}}.\left(\frac{\delta P_y}{P_y}\right)\% = \frac{1}{2}.(-10)\% = (\boldsymbol{-5}\%).$

Lorsque le prix moyen des autres modes d'hébergement diminue de 10%, la demande hôtelière baisse de 5%.

4. Dans quelle catégorie de services placez-vous l'hôtellerie ?

On calcule l'élasticité-Revenu pour connaitre la nature du service l'hôtellerie :

$E_{Dx/_{R}} = \frac{\delta D_x}{\delta R} \times \frac{R}{D_x} = \frac{0{,}1\,(0{,}125\,P_x - 700) - 0.(0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75P_y)}{(0{,}125\,P_x - 700)^2} \times \frac{R}{\frac{0{,}1\,R - 0{,}4\,P_x + 0{,}75P_y}{0{,}125\,P_x - 700}} = \frac{0{,}1\,(0{,}125\,(8000) - 700)}{(0{,}125\,(8000) - 700)^2} \times \frac{(62000)}{20} = \frac{0{,}1\,(1000-700)}{(1000-700)^2} \times \frac{(62000)}{20} = \frac{0{,}1\,(300)}{(1000-700)^2} \times \frac{(62000)}{20} = \frac{30}{(300)^2} \times \frac{(62000)}{20} = \frac{30}{90000} \times \frac{(62000)}{20} = \frac{3}{9} \times \frac{62}{20} = \frac{186}{180} = \boldsymbol{+1{,}03}.$

$E_{Dx/_{R}} = +1{,}03\ /\ E_{Dx/_{R}} > 1 \Leftrightarrow$ L'hôtellerie est un bien de luxe.

Exercice 3 :

Un consommateur a pour fonction d'utilité suivante : $\boldsymbol{Ut = f(x, y) = 2\,.\,x^2.\,y}$ où x et y représentent les quantités de biens X et Y consommées. On suppose que R = 150 DA, Px = 10 DA et Py = 20 DA.

a. **L'expression de la courbe consommation-Revenu :**

- **A l'équilibre, on a :** $\frac{Umg_x}{Umg_y} = \frac{P_x}{P_y} \Leftrightarrow \frac{2.2\,.x.\,y}{2\,.x^2} = \frac{10}{20} \Leftrightarrow \frac{4\,.x.\,y}{2\,.x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\,.\,y}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4.y = x \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{4}.x},$

cette équation représente la Courbe Consommation Revenu. La CCR est l'ensemble des points représentatifs des combinaisons optimales des deux biens X et Y, lorsque les prix de ces deux biens restent constants et que le budget du consommateur varie. La particularité pour cette courbe de consommation revenu est une droite passant par l'origine des axes et dispose d'une pente de $\frac{1}{4}$.

- **La courbe d'Engel :** C'est la courbe de demande individuelle d'un bien en fonction du revenu

Les combinaisons d'équilibre : $\begin{cases} \frac{Umg_x}{Umg_y} = \frac{\text{Px}}{\text{Py}} \\ \text{S/C} \quad \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2.2.x.\,y}{2.x^2} = \frac{\text{Px}}{\text{Py}} \\ \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4.x.\,y}{2.x^2} = \frac{\text{Px}}{\text{Py}} \\ \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{\text{Px}}{\text{Py}} \\ \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \\ \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \\ \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = \frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \\ \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \\ \text{R} = \frac{2.\text{Px}.\text{X}+\text{Px}.\,\text{x}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \\ 2.\text{R} = 3.\text{Px}.\text{X} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.x \ldots.(1) \\ \text{x} = \frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}} \ldots..(2) \end{cases}$, Remplaçant la valeur de (x) de l'équation (2) dans l'équation (1) et on obtient :

$\begin{cases} y = \frac{\text{Px}}{2.\text{Py}}.\frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}} \\ \text{x} = \frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\text{R}}{3.\text{Py}} \\ \text{x} = \frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}} \end{cases}$, X et Y représentent les fonctions de demande des deux biens respectivement x et y, donc on peut noter aussi $\begin{cases} D\text{x} = \frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}} \\ \text{Dy} = \frac{\text{R}}{3.\text{Py}} \end{cases}$ ou $\begin{cases} Qx = \frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}} \\ \text{Qy} = \frac{\text{R}}{3.\text{Py}} \end{cases}$

b. La courbe d'Angel et la fonction de demande quand les prix sont constants :

Si Px = 10 DA et Py = 20 DA, donc $\begin{cases} Dy = \frac{\text{R}}{3.\text{Py}} = \frac{\text{R}}{3.\,20} = \frac{\text{R}}{60} \\ \text{Dx} = \frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}} = \frac{2.\text{R}}{3.10} = \frac{\text{R}}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{Dy} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{60}}.\boldsymbol{R} \\ \mathbf{Dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}.\,\boldsymbol{R} \end{cases}$.

Particularité : Les fonctions de demande individuelles ne dépendent que du revenu et des prix des biens considérés et elles sont des fonctions décroissantes du prix du bien considérés.

c. La valeur de la diminution du revenu du consommateur pour la quantité demandée du bien (y) diminue de 20% :

On a la fonction de demande du bien (y) suivante : $\mathbf{Dy} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{3.Py}}$

$$E_{Dy/R} = \frac{\left(\frac{\delta D_y}{D_y}\right)\%}{\left(\frac{\delta R}{R}\right)\%} = \frac{\delta D_y}{\delta R} \times \frac{R}{D_y} = \frac{1}{\mathbf{3.Py}} \times \frac{R}{\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{3.Py}}} = \frac{1}{\mathbf{3.Py}} \times \frac{\mathbf{3.Py}.\,R}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{3.Py}.R}{\mathbf{3.Py}.\mathbf{R}} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{E_{Dy/R}} = \mathbf{1}$$

On a aussi $\left(\frac{\delta D_y}{D_y}\right)\% = 20\%$, il reste à calculer $\left(\frac{\delta R}{R}\right)\%$?

$$E_{Dy/R} = \frac{\left(\frac{\delta D_y}{D_y}\right)\%}{\left(\frac{\delta R}{R}\right)\%} \Leftrightarrow \left(\frac{\delta R}{R}\right)\% = \frac{E_{Dx/R}}{\left(\frac{\delta D_y}{D_y}\right)\%} \Leftrightarrow \left(\frac{\delta R}{R}\right)\% = \frac{20\%}{1} = 20\%.$$

Si le revenu augmente de 1%, la quantité demandée du bien Y augmente de 1%. $E_{Dx/R} = 1$, (Y) est un bien de luxe. Par rapport à la question (c), si le revenu diminue de 20%, la quantité demandée au bien Y diminue de 20%

2. On suppose que Px varie, P'_x = 5DA et que Py et R restent constants :

a. La Courbe Consommation Prix (CCP) : est le lieu géométrique des points d'équilibre lorsque l'un des prix des deux biens varie et que le prix de l'autre bien et le revenu restent constants.

A l'équilibre, , $\begin{cases} \frac{Umg_x}{Umg_y} = \frac{\text{Px}}{\text{Py}} \\ \text{S/C} \quad \text{R} = \text{Px}.\text{x} + \text{Py}.\text{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4.\ x.\ y}{\mathbf{2}\ .\boldsymbol{x^2}} = \frac{\text{Px}}{20} \\ 150 = \text{Px}.\text{X} + 20.\text{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2.\ y}{\boldsymbol{x}} = \frac{Px}{20} \\ 150 = \text{Px}.\text{X} + 20.\text{Y} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.x \\ 150 = \text{Px}.\text{X} + 20.(\frac{\text{Px}}{40}.x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.x \\ 150 = \text{Px}.\text{X} + \frac{\text{Px}}{2}.x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.x \\ 150 = \frac{2.\ \text{Px}.\ \text{X} + \text{Px}.\ \text{X}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.x \\ 150 = \frac{3.\ \text{Px}}{2}.x \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.x \\ 300 = 3\ \text{Px}.X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.x \\ \text{x} = \frac{300}{3\ \text{Px}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.x \\ \text{x} = \frac{100}{\text{Px}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{\text{Px}}{40}.\frac{100}{\text{Px}} = \frac{5}{2} \\ \text{x} = \frac{100}{\text{Px}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{y} = \frac{5}{2} \\ \text{x} = \frac{100}{\text{Px}} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} \text{x} = \frac{100}{\text{Px}}\ Unités \\ \text{y} = \frac{5}{2}\ Unités \end{cases}$,

La courbe consommation prix (CCP) est une droite horizontale (car la quantité optimale du bien (Y) ne dépend pas du prix du bien (X)), d'après le calcul des quantités d'équilibre, l'équation de la demande du bien (X) s'écrit comme suit :
$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{Px}}$ **,** ou encore**,** $\boldsymbol{D}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{Px}}$**,**
On constate que la courbe de demande du bien (X) est une fonction décroissante de son prix.

b. 1. L'élasticité-Prix directe
On a la fonction de demande du bien (X) qui s'écrit comme suit : $D\text{x} = \frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}}$

$E_{Dx/Px} = \frac{(\frac{\delta D_x}{D_x})\%}{(\frac{\delta P_x}{P_x})\%} = \frac{\delta D_x}{\delta P_x} \times \frac{P_x}{D_x} = \frac{-6.\ R}{9.(P_x)^2} \times \frac{P_x.}{\frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}}} = \frac{-6.\ R}{9.(P_x)^2} \times \frac{P_x.3.\ P_x.}{2.\ R} = -1 \quad E_{Dx/Px} = -1 \Leftrightarrow \left(-E_{Dx/Px}\right) = 1$

Une demande à élasticité unitaire : Si Px augmente ou (diminue) de 1%, la demande du bien (X) diminue ou (augmente) de 1% (la quantité demandée en bien (X) varie proportionnellement à celle du prix du bien de ce bien).

2. L'élasticité-Prix croisée

$E_{Dx/Py} = \frac{(\frac{\delta D_x}{D_x})\%}{(\frac{\delta P_y}{P_y})\%} = \frac{\delta D_x}{\delta P_y} \times \frac{P_y}{D_x} = 0 \times \frac{P_y}{\frac{2.\text{R}}{3.\text{Px}}} = 0$, La quantité demandée en bien (X) ne dépend pas du prix du bien (x) ⇔ les biens (x) et (y) sont indépendants.

<u>Quatrième partie : « QCM » d'évaluation des connaissances : choisissez la ou les bonnes réponses.</u>

1/ *B*
2/ *A*
3/ *C*
4/ *C*
5/ *D*
6/ *A*
7/ *C*
8/ *C et D*
9/ *C*
10/ C et *D*
11/ *C*
12/ *D*
13/ *B et D*
14/ *C*
15/ *D*

Complément théorique et pratique

1. Pour un seul bien X et à mesure que l'individu consomme des quantités supplémentaires de ce bien. Il a tendance à apprécier moins les quantités supplémentaires acquises. Au bout d'un certain nombre d'unités consommées, il atteint « un point de satiété ». L'individu ressent un peu de lassitude, ce qu'il traduit par des niveaux décroissants d'utilité marginale : les quantités supplémentaires consommées apportent chacune un degré de satisfaction de moins en moins élevé.

2. Démonstration mathématique du TMS : Soit $U_T = f\ (x, y)$. Mathématiquement, la différentielle totale de la fonction d'U_T est donnée par : $dU_T = \frac{\partial U_T}{\partial x}\ dx + \frac{\partial U_T}{\partial y} dy$, Par ailleurs, on sait que le long de la courbe d'indifférence, la variation de l'U_T est nulle. Donc, on peut écrire : $dU_T = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U_T}{\partial x}\ dx + \frac{\partial U_T}{\partial y} dy = 0$, On a : $\frac{\partial U_T}{\partial x} = Umg_x\ et\ \frac{\partial U_T}{\partial y} = Umg_y$, donc :

$$Umg_x . dx + Umg_y . dy = 0 \Leftrightarrow Umg_x . dx = -Umg_y . dy \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{Umg_x}}{\boldsymbol{Umg_y}} = \left| -\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} \right| = \boldsymbol{TMS}\mathbf{x}_{\rightarrow}\mathbf{y}$$

2.1. Le taux marginal de substitution (TMS) est la petite quantité d'un bien (bien 2) que le consommateur est prêt à abandonner pour consommer une autre quantité en plus d'un autre bien (bien 1), le niveau d'utilité totale demeure constant.

$$\boldsymbol{TMS}\mathbf{x}_{\rightarrow}\mathbf{y} = \frac{\boldsymbol{Umg_x}}{\boldsymbol{Umg_y}} = \left| -\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} \right|$$

$$\boldsymbol{TMS}\mathbf{y}_{\rightarrow}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{TMS}\mathbf{x}_{\rightarrow}\mathbf{y}} = \frac{\boldsymbol{Umg_y}}{\boldsymbol{Umg_x}} = \left| -\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dy}} \right|$$

Conséquence : Le $TMS\mathrm{y}_{\rightarrow}\mathrm{x}$ est l'inverse du $TMS\mathrm{x}_{\rightarrow}\mathrm{y}$

3. Démonstration du multiplicateur de LAGRANGE $\boldsymbol{\lambda}$ (le multiplicateur de Lagrange est égal à la première dérivée de l'Ut par rapport au R**) :**

Supposons un consommateur rationnel, dont la fonction d'utilité est donnée par : $UT=f\ (x, y)$. Ce consommateur dispose 'un revenu R, qu'il consacre en totalité pour l'achat des deux biens X et Y, dont les prix sont respectivement Px et Py. Trouver les quantités qui maximisent l'utilité de ce consommateur, revient à résoudre ce problème lié :

$\begin{cases} Max\ U_t = f(x, y) \\ S/c\ \ R = Px.x + Py.y \end{cases}$, Soit la fonction de Lagrange suivante : $L = f(x, y, \lambda) = Ut + \lambda\ (R - Px.x - Py.y)$:

La fonction de Lagrange admet une solution, lorsque ses dérivées partielles s'annulent simultanément. On aura donc,

$$\begin{cases} L'(x) = 0 \\ L'(y) = 0 \\ L'(\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\ Ut}{\partial\ x} - \lambda . Px = 0 \\ \frac{\partial\ Ut}{\partial\ y} - \lambda . Px = 0 \\ R - Px.x - Py.y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\frac{\partial\ Ut}{\partial\ x}}{Px} \ldots \ldots \ldots (1) \\ \lambda = \frac{\frac{\partial\ Ut}{\partial\ y}}{Py} \ldots \ldots \ldots (2) \\ R = Px.x + Py.y \ldots (3) \end{cases}$$

, Calculons la dérivée de la (3) équation par rapport à x et par rapport à y respectivement et on aura : $\begin{cases} \frac{\partial\ \mathrm{R}}{\partial\ x} = \mathrm{Px} \\ \frac{\partial\ \mathrm{R}}{\partial\ y} = \mathrm{Py} \end{cases}$, en remplaçant les valeurs de Px et Py, respectivement dans (1) et (2), on aura : $\begin{cases} \lambda = \frac{\frac{\partial\ \mathrm{Ut}}{\partial\ x}}{\frac{\partial\ \mathrm{R}}{\partial\ x}} \\ \lambda = \frac{\frac{\partial\ \mathrm{Ut}}{\partial\ y}}{\frac{\partial\ \mathrm{R}}{\partial\ y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\partial Ut}{\partial\ \mathrm{R}} \\ \lambda = \frac{\partial\ Ut}{\partial\ \mathrm{R}} \end{cases}$, le multiplicateur de Lagrange λ, mesure la sensibilité du niveau de l'utilité à la variation du revenu du consommateur. Il détermine l'effet d'une variation de 01 DA du revenu, sur le niveau d'utilité du consommateur.

Exercice 1 :

Le panier de bien que ce consommateur peut choisir afin qu'il maximise son utilité totale : Le panier d'équilibre réalise cette condition : Les rapports des utilités marginales pondérées à leurs prix sont égaux, en tenant compte la contrainte budgétaire. $\begin{cases} \frac{Umg_1}{\text{Px1}} = \frac{Umg_2}{\text{Px2}} = \frac{Umg_3}{\text{Px3}} \\ \text{S/C } \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} + + \text{Pz}.\text{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Umg_1}{1} = \frac{Umg_2}{2} = \frac{Umg_3}{4} \\ \frac{\text{S}}{\text{C}} \text{ R} = \text{X} + 2.\text{Y} + + 4.\text{Z} \end{cases}$

Quantités	$\frac{Umg_1}{\text{Px}}$	$\frac{Umg_2}{\text{Py}}$	$\frac{Umg_3}{\text{Pz}}$
1	~~10~~	25	15
2	09	20	~~10~~
3	~~08~~	15	~~08~~
4	07	~~10~~	**06**
5	**06**	~~08~~	05
6	05	**06**	04

1. Vérification de la première condition :

La première équation de la condition d'équilibre est vérifiée pour les trois paniers suivants :
Le premier panier : (1, 4, 2), Le deuxième panier (3, 5, 3), Le troisième panier (5, 6, 4).

2. Vérification de la seconde condition :

-Vérifiant maintenant la validité de la contrainte budgétaire pour la construction de l'équilibre pour les trois paniers déterminés précédemment :

Le premier panier **:** $\text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} + \text{Pz}.\text{Z}$ = 1.1 + 2.4 + 4.2 = 1 + 8 + 8 = 17 = R
Donc le panier de bien que le consommateur va choisir afin de maximiser son utilité en tenant compte de sa contrainte budgétaire est le panier (1, 4 ,2).

Le deuxième panier **:** $\text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} + \text{Pz}.\text{Z}$ = 1.3 + 2.5 + 4.3 = 3 + 10 + 12 = 25 > R
Donc ce panier n'est pas accessible.

Le troisième panier **:** $\text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} + \text{Pz}.\text{Z}$ = 1.5 + 2.6 + 4.4 = 5 + 12 + 16 = 33 > R
Donc ce panier aussi n'est pas accessible.

Exercice 2 :

1. L'équilibre du consommateur (Les quantités d'équilibre du consommateur)

$$\begin{cases} Max\ Ut = f(x, y, z) \\ \text{S/C } \text{R} = \text{Px}.\text{X} + \text{Py}.\text{Y} + \text{Pz}.\text{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ Ut = 5.\text{x}.y.z \\ \text{S/C } 630 = 6.\text{x} + 5.\text{Y} + 2.\text{z} \end{cases}:$$

La résolution du problème par la méthode de LAGRANGE

$L'(x, y, z, \lambda)$ = $\text{x}^2.y.z + \ .(630 - 6.\text{x} - 5.\text{Y} - 2.\ \text{z})$, Cette équation de LAGRANGE admet des solutions si ses dérivées partielles s'annulent simultanément (au même temps) d'où le système d'équations ci-après :

$$\begin{cases} L'(x) = 0 \\ L'(y) = 0 \\ L'(z) = 0 \\ L'(\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5.y.z - 6.\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\ 5.\text{x}.z - 5.\lambda = 0.\ldots\ldots\ldots\ldots.2 \\ 5.\ \text{x}.y - 2.\lambda = 0.\ldots\ldots\ldots\ldots.3 \\ 630 - 2.\text{x} - 4.\text{Y} - \text{z} = 0 \ldots 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5.\ y.\ z}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1 \\ \lambda = \text{x}.z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.2 \\ \lambda = \frac{5.\ x.\ y}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.3 \\ 630 = 6.\text{x} + 5.\text{y} + 2.\ \text{Z} \ldots 4 \end{cases}$$

, (1) = (3) et (2) = (3) : ⇔

$$\begin{cases} \frac{5.y.z}{6} = \frac{5.\ x.\ y}{2} \ldots\ldots\ldots 5 \\ \frac{5.x.z}{5} = \frac{5.\ x.\ y}{2} \ldots\ldots\ldots 6 \\ 630 = 6.x + 5.y + 2.\ Z \ldots 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3.\ x \ldots\ldots\ldots 5 \\ z = \frac{5.\ y}{2} \ldots\ldots\ldots 6 \\ 630 = 6.x + 5.y + 2.\ Z \ldots 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}.\ z \ldots\ldots\ldots 5 \\ y = \frac{2}{5}.\ z \ldots\ldots\ldots 6 \\ 630 = 6.x + 5.y + 2.\ Z \ldots 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

On remplace les valeurs de (X) et de (Y) respectivement dans l'équation (4) et on obtient :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}.\ z \ldots\ldots\ldots 5 \\ y = \frac{2}{5}.\ z \ldots\ldots\ldots 6 \\ 630 = 6.\left(\frac{1}{3}.\ z\right) + 5.\left(\frac{2}{5}.\ z\right) + 2.\ z.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}.\ z \ldots\ldots\ldots 5 \\ y = \frac{2}{5}.\ z \ldots\ldots\ldots 6 \\ 630 = 2.z + 2.\ z + 2.\ z \ldots 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}.\ z \ldots\ldots\ldots 5 \\ y = \frac{2}{5}.\ z \ldots\ldots\ldots 6 \\ 630 = 2.z + 2.\ z + 2.\ z \ldots 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}.\ z \ldots 5 \\ y = \frac{2}{5}.\ z \ldots 6 \\ 630 = 6.\ z \ldots 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}.\ (105) \\ y = \frac{2}{5}.\ (105) \\ z = \frac{630}{6} = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{105}{3} = 35 \\ y = \frac{2.\ (105)}{5} = 42 \\ z = 105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 35\ Unités} \\ \boldsymbol{z = 42\ Unités} \\ \boldsymbol{y = 105\ Unités} \end{cases}$$

Les quantités optimales sont : **(x, y, z) = (35, 42, 105).**

2. Le niveau d'utilité totale lorsque le revenu augmente de 15 DA :

Le niveau de l'utilité à l'équilibre : $Max\ Ut = 5.x.y.z = 5.\ (35).\ (42).\ (105) = 771750\ Utiles$. Donc, $\boldsymbol{Max\ Ut = 771750\ Utiles}$.

Le multiplicateur de Lagrange λ : $\lambda = \frac{5.\ y.\ z}{6} = \frac{5.\ (42).\ (105)}{6} = \frac{22050}{6} = 3675$. Cette valeur représente la variation de l'utilité consécutive à une variation unitaire du niveau du revenu du consommateur.

On a $\lambda = \frac{\Delta\, Ut}{\Delta\, R}$, Pour $\Delta\, R = +15$ DA, $\Delta\, Ut = \lambda.\ \Delta\, R = 3675.\ (15) = +55125$ Utils.

$U1 = U0 + \Delta Ut = 771750 + 55125 = 826875$ Utils.

La variation du revenu nécessaire pour que le niveau de l'utilité totale augmente de 10 % :

Avec $\Delta Ut = 10\,\%.\ (771750) = 77175$ Utils, il faut que $\Delta\, R = \frac{\Delta\, Ut}{\lambda} = \frac{77175}{3675} = +21\ DA$. Donc, il faut un accroissement du revenu de 21 DA pour accroitre le niveau d'utilité totale de 10%.

Exercice 3 : Les préférences d'un consommateur sont présentées comme suit : $Ut = f(x, y) = 4.x^{0,3}.y^{0,6}$ sachant que : Px = 04 DA, Py = 05 DA et R = 240 DA

1. Calcul du TMS $_{x\_y}$ en un point quelconque de la CI (X_0, Y_0) et sa valeur si (X, Y) = (6, 4) :

$TMS_{x\_y} = \frac{Umg_x}{Umg_y} = \frac{4.0{,}3.\ x^{0,3-1}.\ y^{0,6}}{4.0{,}6.\ x^{0,3}.\ y^{0,6-1}} = \frac{3.x^{-0,7}.\ y^{0,6}}{6.x^{0,3}.\ y^{-0,4}} = \frac{3.\ y^{0,4}.y^{0,6}}{6.\ x^{0,3}.\ x^{0,7}} = \frac{3.\ y^{0,4+0,6}}{6.\ x^{0,3+0,7}} = \frac{3.\ y}{6.\ x} = \frac{y}{2.\ x}$, Donc $\boldsymbol{TMS_{x\_y} = \frac{y}{2.\ x}}$

La valeur du TMS lorsque x=6 et y= 4 : On a $TMS_{x\_y} = \frac{y}{2.\ x}$, On remplace la valeur de x et y dans cette formulation et on obtient : $TMS_{x\_y} = \frac{4}{2.\ 6} = \frac{1}{3}$

2. Il s'agit de vérifier la condition de maximisation $\begin{cases} Max\ Ut = f(x,y) \\ S/C\quad R = Px.X + Py.Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ Ut = 4.x^{0,3}.y^{0,6} \\ S/C\quad 240 = 4.X + 5.Y \end{cases}$

En utilisant la méthode de LAGRANGE : on peut écrire : $L(x, y, \lambda) = Ut + \lambda.(R - Px.X - Py.Y) \Leftrightarrow$

$L(x, y, \lambda) = 4.x^{0,3}.y^{0,6} + \lambda.(240 - 4.X - 5.Y)$, Cette équation de LAGRANGE admet des solutions si ces dérivées partielles s'annulent simultanément (au même temps) d'où le système d'équations ci-après :

$$\begin{cases} L'(x) = 0 \\ L'(y) = 0 \\ L'(\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4.0{,}3.\ x^{0,3-1}.\ y^{0,6} - 4.\lambda = 0 \ldots (1) \\ 4.0{,}6.\ x^{0,3}.\ y^{0,6-1} - 5.\lambda = 0 \ldots (2) \\ 240 - 4.x - 5.y = 0 \ldots\ldots (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4.0{,}3.\ x^{0,3-1}.\ y^{0,6}}{4} \ldots (1) \\ \lambda = \frac{4.0{,}6.\ x^{0,3}.\ y^{0,6-1}}{5} \ldots (2) \\ 4.x + 5.y = 240 \ldots (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{0{,}3.\ y^{0,6}}{x^{0,7}} \ldots (1) \\ \lambda = \frac{4.\ 0{,}6.\ x^{0,3}}{5.\ y^{0,4}} \ldots (2) \\ 4.x + 5.y = 240 \ldots (3) \end{cases}$$

$(1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{0,3.\ y^{0,6}}{x^{0,7}} = \frac{4.0,6\ x^{0,3}}{5.y^{0,4}} \\ 4.x + 5.y = 240..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3.\ y^{0,6}.5\,.y^{0,4} = x^{0,7}.4.\ 0,6.\ x^{0,3} \\ 4.x + 5.y = 240..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3.5.10.\ y^{0,6+0,4} = 4.\ 0,6.10.\ x^{0,7+0,3} \\ 4.x + 5.y = 240..(3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15.\ y = 24.\ x \\ 4.x + 5.y = 240..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{24}{15}\ .x = \frac{8}{5} \\ 4.x + 5.y = 240..(3) \end{cases}$, On remplace la valeur de Y dans la troisième équation (3) et on obtient : $\begin{cases} y = \frac{8}{5}\ .x \\ 4.x + 5.\frac{8}{5}\ .x = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{5}\ .x \\ 4.x + 8\ .x = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{5}\ .x \\ 12\ .x = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{5}\ .20 = \frac{160}{5} = 32 \\ x = \frac{240}{12} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 32 \end{cases}$

Donc les quantités des biens x et y qui maximise l'utilité de ce consommateur sont : **$(x^*, y^*) = (20, 32)$.**

4. La représentation graphique de l'équation :

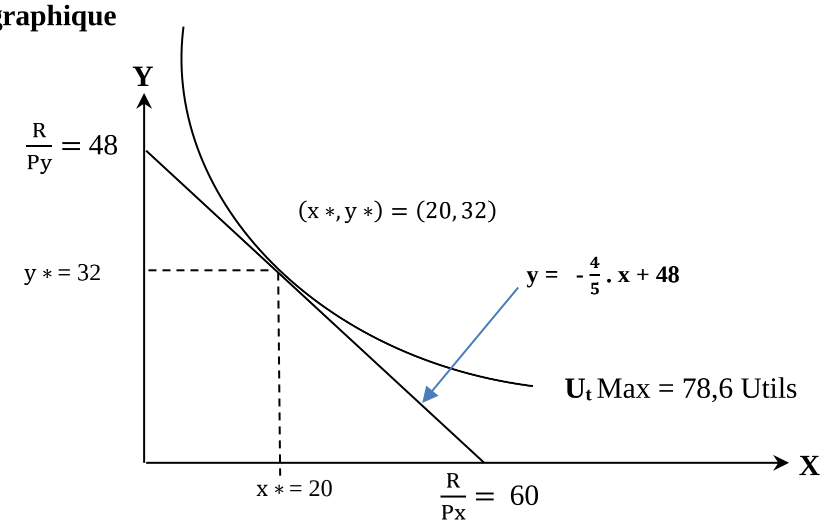
- Le niveau de l'utilité à l'équilibre : On a la fonction d'utilité qui s'écrit comme suit : $Ut = f\ (x, y) = 4.x^{0,3}.y^{0,6}$, en remplaçant les valeurs de quantités d'équilibre de ce consommateur $(x^*, y^*) = (20, 32)$ dans cette fonction on obtient : $Ut = f\ (x*, y*) = f\ (20, 32) = 4.\ (20)^{0,3}.(32)^{0,6} = 78{,}60\ Utiles.$

- L'équation de la droite du budget : $R\ = Px\,.x\ +\ Py\,.y \Leftrightarrow y = \frac{R}{Py} - \frac{Px}{Py}.\ X \Leftrightarrow y = \frac{240}{5} - \frac{4}{5}.\ x \Leftrightarrow$ **$y = 48 - \frac{4}{5}.\ x$:** Calculant maintenant les points d'intersection entre la droite budgétaire et les deux axes (abscisses et ordonnés) on obtient :

X	0	$\frac{R}{Px} = \frac{240}{4} = 60$
Y	$\frac{R}{Py} = \frac{240}{5} = 48$	0

1. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des abscisses est (0, 48).
2. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des ordonnées est (60, 0).

Représentation graphique



5. La valeur minimale du revenu « R » pour conserver le même niveau d'utilité :

Le prix du bien Y a subi une majoration de 100 %, c'est-à-dire qu'il a doublé : $P_y = 5.\ 2 = 10$ DA, on applique le principe suivant : les rapports des utilités marginales pondérées à leurs prix sont égaux en tenant compte de la contrainte budgétaire et de la majoration du prix du bien Y.

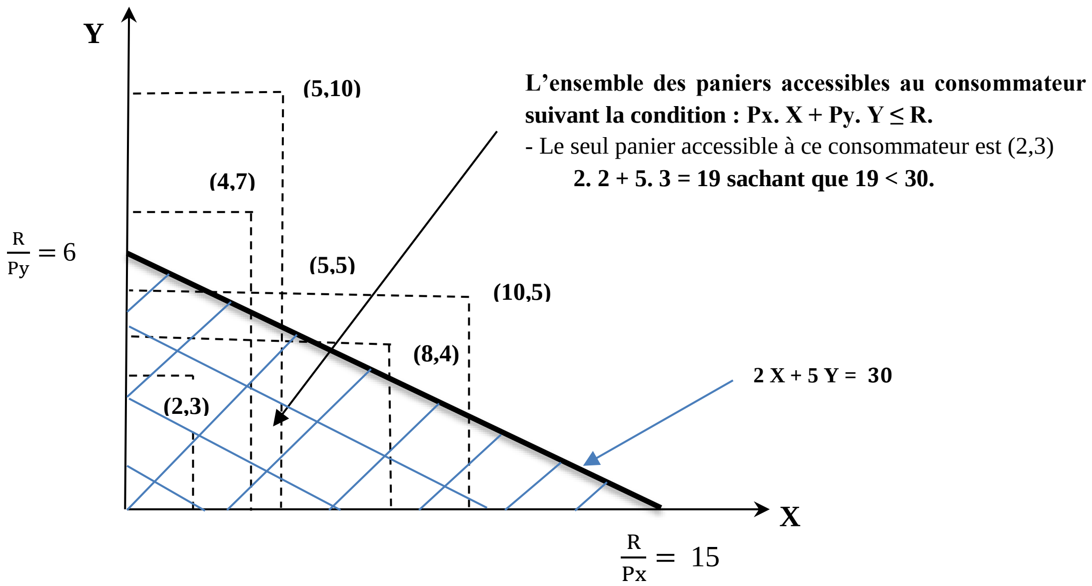
$\begin{cases} \frac{Umg_x}{P_x} = \frac{Umg_y}{P_y} \\ R\ =\ Px\,.x\ +\ Py\,.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4.0,3.\ x^{0,3-1}.\ y^{0,6}}{4} = \frac{4.0,6.\ x^{0,3}.\ y^{0,6-1}}{10} \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{0,3.\ y^{0,6}}{x^{0,7}} = \frac{4.0,6.\ x^{0,3}}{10.\ y^{0,4}} \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,3.\ y^{0,6}.10.\ y^{0,4} = x^{0,7}.\ 4.0,6.\ x^{0,3} \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.y\ =\ 2,4.\ x \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.10.y\ =\ 2,4.10.\ x \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 30.y\ =\ 24.\ x \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10.y\ =\ 8.\ x \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ =\ \frac{8}{10}.\ x \\ R\ =\ 4\,.x\ +\ 10\,.y \end{cases}$ On remplace la valeur de Y dans

l'équation de la droite budgétaire et on obtient : $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ R = 4.x + 10.\,\frac{8}{10}.\,x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ R = 4.x + 8.\,x \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ R = 12.\,x \end{cases}$, Sachant par ailleurs que : $\begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ \text{Utmax} = 4.\,x^{0,3}.\,y^{0,6} = 78,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ 4.\,x^{0,3}.\,(\frac{8}{10}.\,x)^{0,6} = 78,6 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ 4.\,x^{0,3}.\,\left(\frac{8}{10}\right)^{0,6}.\,x^{\,0,6} = 78,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ 4.\,\left(\frac{8}{10}\right)^{0,6}.\,x^{\,0,6+0,3} = 78,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ 4.\,\left(\frac{8}{10}\right)^{0,6}.\,x^{\,0,9} = 78,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ x^{\,0,9} = \frac{78,6}{4.\,\left(\frac{8}{10}\right)^{0,6}} \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,x \\ x = 31,74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8}{10}.\,31,74 \\ x = 31,74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 25,4 \\ x = 31,74 \end{cases}$, Revenant à la relation précédente $R = 12.\,x$, on remplace la valeur X dans cette équation et on obtient la valeur du revenu minimal : $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 31,74 \\ R = 12.\,x \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = 31,74 \\ R = 12.\,31,74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 31,74 \\ R = 380,88 \end{cases}$
La valeur minimale du revenu « R » pour conserver le même niveau d'utilité est R = 380,88 DA.

Exercice 4 : Soit les paniers (x, y) représentés comme suit : (10,05), (05,10), (04,07), (08,04), (05,05), (02,03).
1. Représentation graphique des différents paniers :



2. L'équation de la droite du budget : Soit $R = 30, Px = 02\ et\ Py = 05$. On a : $R = Px.X + Py.Y \Leftrightarrow Py.Y = -Px.x + R \Leftrightarrow: Y = -\frac{Px}{Py}.x + \frac{R}{Py}$. Application numérique et on obtient ; $Y = -\frac{2}{5}.x + \frac{30}{5} \Leftrightarrow : \boldsymbol{Y = -\frac{2}{5}.x + 6}$ qui représente l'équation de la droite budgétaire.

Calculant maintenant les points d'intersection entre la droite budgétaire et les deux axes (abscisses et ordonnés) on obtient :

X	0	$\frac{R}{Px} = \frac{30}{2} = 15$
Y	$\frac{R}{Py} = \frac{30}{5} = 6$	0

1. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des abscisses est (0, 15).
2. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des ordonnées est (6, 0).

Le seul panier accessible pour ce consommateur est : (2, 3).

Démonstration : on va remplacer la valeur de x et de y du panier (02,03) dans la droite budgétaire : R' = 2.2 + 5.3 = 19, Ce qui implique que : R' < R, 19<30. C'est-à-dire qu'il peut acquérir ce panier, car il se situe dans l'ensemble de ces paniers accessibles.

Exercice 5 : Les préférences d'un consommateur sont présentées comme suit : $Ut = f(x,y) = 4.x^{0,5}.y^{0,75}$ sachant que : Px = 03 DA, Py = 06 DA et R = 600 DA

1. Expression mathématique du TMS $_{x\_y}$:

TMS $_{y\_x}$ = $\frac{Umg_y}{Umg_x} = \frac{4.\ 0{,}75.\ x^{0,3}\ .\ y^{0,75-1}}{4.0{,}5.\ x^{0,5-1}.\ y^{0,75}} = \frac{0{,}75.\ x^{0,3}\ .\ y^{-0,25}}{0{,}5.\ x^{-0,5}.\ y^{0,75}} = \frac{0{,}75.\ x^{0,3}\ .\ x^{0,5}}{0{,}5.\ y^{0,25}.\ y^{0,75}} = \frac{10.\ 0{,}75.\ x}{10.\ 0{,}5.\ y} = \frac{7{,}5.\ x}{5.\ y}$,

La valeur du TMST $_{x\to y}$ lorsque (x, y) = (8, 6) : On a TMS $_{x\_y}$ = $\frac{1}{\text{TMS}_{y\_x}} = \frac{5.\ y}{7{,}5.\ x}$: On remplace la valeur de (x, y) = (8, 6) dans cette formulation et on obtient : TMS $_{x\_y}$ = $\frac{5.\ 6}{7{,}5\ .\ 8} = \frac{1}{2}$ = 0,5. Donc TMS $_{x\_y}$ = 0,5.

2. Que faire le consommateur pour avoir le même niveau d'Utilité en diminuant la quantité de Y de 2 unités

Le TMS $_{x\_y}$ = 0,5, c'est-à-dire qu'on renonçant à 0,5 unité du bien Y, le consommateur peut garder le même niveau d'utilité s'il consomme une (1) unité supplémentaire du bien X. lorsqu'il renonce à 2 unités du bien Y, il va les substituer par l'augmentation les quantités consommées du bien X (Δ x) :

On applique la règle des trois, d'après le TMST $_{x\to y}$:

	ΔY		Δ X
TMST $_{x\to y}$	- 0,5	⟶	1
	- 2	⟶	Δ x

Pour garder le même niveau de satisfaction, la variation de X est de Δ x = $\frac{-2.\ 1}{0{,}5} = \frac{-2}{0{,}5}$ = 4 unités du bien X. c'est-à-dire que si le consommateur abandonne 2 unités du bien Y en les substituant par 4 unités du bien X en gardant le même niveau d'utilité.

3. Il s'agit de vérifier la condition de maximisation $\begin{cases} Max\ Ut = f(x,y) \\ \text{S/C}\quad \text{R = Px.X + Py.Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ Ut = 4.x^{0,5}.y^{0,75} \\ \text{S/C}\quad 600 = 3.X + 6.Y \end{cases}$

En utilisant la méthode de LAGRANGE : on peut écrire : *L (x, y, λ) = Ut* +λ . $(R - Px\ .X - Py\ .Y)$ =
L(x, y, λ) = $4.x^{0,5}.y^{0,75}$ + λ . (600 − 3 .X − 6.Y), Cette équation de LAGRANGE admet des solutions si ces dérivées partielles s'annulent simultanément (au même temps) d'où le système d'équations ci-après :

$$\begin{cases} L'(x) = 0 \\ L'(y) = 0 \\ L'(\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4.0{,}5.\ x^{0,5-1}.\ y^{0,75} - 3.\lambda = 0 \ldots (1) \\ 4.0{,}75.\ x^{0,5}.\ y^{0,75-1} - 6.\lambda = 0 \ldots (2) \\ 600 - 3.x - 6.y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4.0{,}5.\ x^{-0,5}.\ y^{0,75}}{3} \ldots (1) \\ \lambda = \frac{4.0{,}75.\ x^{0,5}.\ y^{-0,25}}{6} \ldots (2) \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2.\ y^{0,75}}{3.\ x^{0,5}} \ldots (1) \\ \lambda = \frac{3.\ x^{0,5}.}{6.\ y^{0,25}} \ldots (2) \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases}$$

$$: (1) = (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2.\ y^{0,75}}{3.x^{0,5}} = \frac{3.\ x^{0,5}.}{6.\ y^{0,25}} \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\ y^{0,75}.\ 6\ y^{0,25} = 3.\ x^{0,5}.3.\ x^{0,5} \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.\ 6\ y = 3.3.x \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12.\ y = 9.x \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{12}.x \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.x \\ 600 = 3.x + 6.y..(3) \end{cases}$$

, On remplace la valeur de Y dans la troisième équation (3) et on obtient : $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.x \\ 600 = 3.x + 6.(\frac{3}{4}.x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.x \\ 600 = 3.x + \frac{18}{4}.x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.x \\ 600 = \frac{3.\ 4.\ x + 18.\ x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.x \\ 600.\ 4 = 12.\ x + 18.\ x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.x \\ 2400 = 30.\ x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.x \\ x = \frac{2400}{30} = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{4}.80 = 60 \\ x = 80 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 60 \\ x = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 80\ Unités \\ y = 60\ Unités \end{cases}$$

Donc les quantités des biens x et y qui maximise l'utilité de ce consommateur sont : **(x^*, y^*) = (80, 60).**

4. L'effet d'une diminution du revenu de 10% sur le niveau d'utilité :
Le paramètre qui mesure l'effet d'une variation du revenu sur le niveau d'utilité est le multiplicateur de Lagrange (λ) : D'après les équations effectuées précédemment pour calculer l'équilibre du consommateur, on constate qu'il existe deux formules mathématiques du multiplicateur de Lagrange (λ) à savoir : $\begin{cases} \lambda = \frac{0{,}3.\ y^{0{,}6}}{x^{0{,}7}} \ldots (1) \\ \lambda = \frac{4.\ 0{,}6.\ x^{0{,}3}}{5.\ y^{0{,}4}} \ldots (2) \end{cases}$, le calcul de valeur de λ se fait au choix, c'est-à-dire, soit on effectue le calcul par rapport à l'équation (1) ou (2).
$\lambda = \frac{0{,}3.\ y^{0{,}6}}{x^{0{,}7}} = \frac{4.\ 0{,}6.\ x^{0{,}3}}{5.\ y^{0{,}4}}$, on remplace les valeurs quantités d'équilibre dans les deux équations et on obtient :
$\lambda = \frac{0{,}3.\ (60)^{0{,}6}}{(80)^{0{,}7}} = \frac{4.\ 0{,}6.\ (80)^{0{,}3}}{5.\ (60)^{0{,}4}} = 1{,}6$, ce résultat indique que pour chaque 1 DA de revenu de plus, le niveau d'utilité totale augmente de 1,6 Utils. ($\lambda = \frac{\Delta\, Ut}{\Delta\, R}$). Pour une diminution du revenu de 10 % ça signifie : D'abord on doit calculer la valeur de la diminution du revenu de 10 %, c'est-à-dire que $\Delta\, R = 600.\ 10\,\% = -60$ DA, D'après la formule du multiplicateur Lagrange (λ) : $\lambda = \frac{\Delta\, Ut}{\Delta\, R} \Leftrightarrow \quad Ut = \Delta\, R . \lambda \ \Leftrightarrow \quad Ut\ = -60\,.(1{,}6) = -96\ \%$ Utils. Pour une diminution du revenu de 10 %, l'utilité totale diminue de 96 Utils.

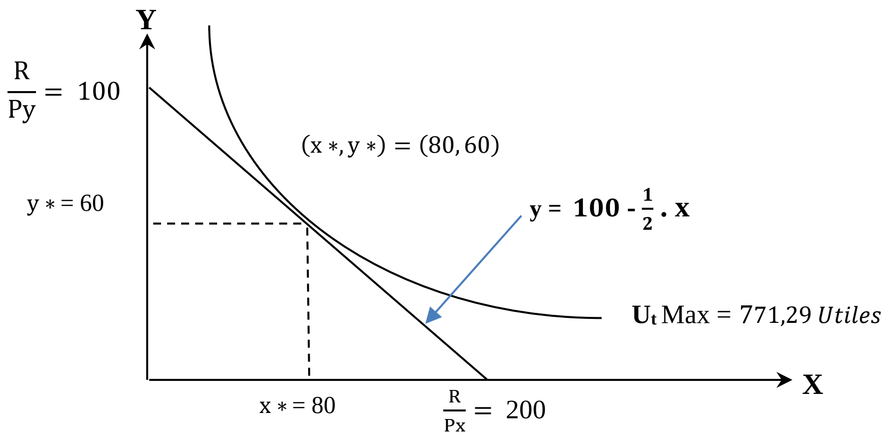
5. La variation du revenu nécessaire pour accroitre le niveau de l'utilité de 200 Utils :
On a la variation de l'utilité totale $\Delta\, Ut = 200\ Utiles$, on cherche à calculer la variation du revenu nécessaire Δ R : D'après la formule du multiplicateur Lagrange (λ), $\lambda = \frac{\Delta\, Ut}{\Delta\, R} \Leftrightarrow \Delta\, R = \frac{\Delta\, Ut}{\lambda} = \frac{200}{1{,}6} = 125\ DA$. La variation du revenu nécessaire pour accroitre le niveau de l'utilité de 200 Utils est de $\Delta\, R = 125$ DA.

6. La représentation graphique de l'équilibre (l'optimum) :
- L'équation de la droite du budget : $R = Px\,.\,x\ +\ Py\,.\,y \Leftrightarrow y = \frac{R}{Py} - \frac{Px}{Py}\,.\,x \Leftrightarrow y = \frac{600}{6} - \frac{3}{6}\,.\,x \Leftrightarrow \mathbf{y = 100 - \frac{1}{2}\,.\,x}$
Calculant les points d'intersection entre la droite budgétaire et les deux axes (abscisses et ordonnés) on obtient :

X	0	$\frac{R}{Px} = \frac{600}{3} = 200$
Y	$\frac{R}{Py} = \frac{600}{6} = 100$	0

1. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des abscisses est (0, 100).
2. Le point d'intersection de la DB avec l'axe des ordonnées est (200, 0).

La valeur de l'utilité totale à l'équilibre : $Max\ Ut = 4.x^{0{,}5}.y^{0{,}75} = 4.(80)^{0{,}5}.(60)^{0{,}75} = 771{,}29\ Utiles$



La signification économique de l'équilibre du consommateur E (80, 60) :
A l'équilibre, le rapport des utilités marginales égales au rapport des prix, c'est-à-dire : $\frac{Umg\ x}{Umg\ y} = \frac{Px}{Py}$; ce qui signifie que le dernier dinar dépensé par le consommateur afin d'acheter le bien (X) donne exactement la même utilité que ce dernier dinar dépensé pour l'achat du bien (Y). $\frac{Umg\ x}{Px} = \frac{Umg\ y}{Py}$

Travail réalisé par : Dr. **Nabil KANDI** en collaboration avec **M. MANAA B.**