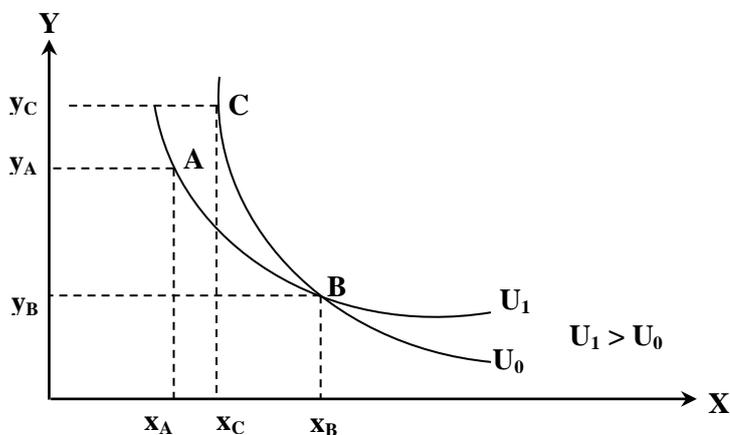


Première partie : Approche ordinale de l'utilité, notion de courbes d'indifférence et de l'élasticité.

1. Le concept de courbe d'indifférence vient de l'évaluation ordinale de l'utilité (approche ordinale de l'utilité), il est apparu pour la première fois dans la littérature chez les auteurs Néo-classiques (les tenants de l'approche ordinale) qui considèrent que le niveau de satisfaction ne peut être mesuré et le consommateur est seulement capable de classer ou d'ordonner ses choix de consommation. Indifférence est par rapport au choix unique et aux combinaisons de consommation qui donnent au consommateur le même niveau d'utilité, c'est-à-dire le consommateur est indifférent le long d'une même courbe d'indifférence.

2. Deux courbes d'indifférence du même individu ne peuvent pas se couper, puisque dans le cas contraire cela signifierait qu'il existe deux niveaux d'utilité pour une même combinaison de biens, ce qui serait contraire au postulat n°01 de la fonction d'utilité. Ainsi l'hypothèse de la transitivité des choix ne se tient plus. Pour démontrer que deux courbes d'indifférence du même consommateur ne se coupent jamais, il suffit de supposer le contraire. Tel qu'il est illustré sur le graphique ci-dessous :



D'après le graphique ci-dessus, la combinaison « B » a deux niveaux d'utilité, or une combinaison ne peut procurer au consommateur plus d'un niveau d'utilité. De la représentation graphique précédente, on devrait s'attendre, -selon l'hypothèse de la transitivité des choix-, à ce que les deux combinaisons « A » et « C » procurent au consommateur le même niveau d'utilité, puisque les deux combinaisons « A » et « B » procurent le même niveau de satisfaction (elles se situent sur la même courbe d'indifférence U_1) et « B » et « C » procurent le même niveau de satisfaction (elles se situent sur la même courbe d'indifférence U_0). Or $U_1 > U_0$ et donc $A \neq C$ (ce qui constitue une contradiction). De ce fait deux courbes d'indifférence pour le même consommateur ne peuvent jamais se couper. Sinon, on dira que le consommateur est incapable d'établir ses ordres de préférences (l'hypothèse de la complétude n'est pas vérifiée).

3. Lorsque l'on veut mesurer l'effet d'une variation, d'un phénomène sur un autre, on peut calculer la sensibilité en faisant le rapport entre les deux variations. Mais cela a peu de sens lorsque les ordres de grandeur des deux phénomènes sont différents. Pour résoudre ce problème, il suffit de comparer non pas les variations absolues comme le font les sensibilités, mais les variations relatives, ce qui neutralise les différences de grandeurs puisque chaque niveau de variation est rapporté à son niveau de grandeur. On appelle de telles mesures les « élasticités ».

L'élasticité prix de la demande mesure l'effet de variation du prix de 1% sur la quantité demandée (ceteris-paribus) ou encore, c'est le rapport de la variation relative (en %) de la demande et la variation relative (en %) du prix (toutes choses étant égales par ailleurs).

Deuxième partie : Le Taux Marginal de substitution (TMS), l'optimum du consommateur et le multiplicateur de Lagrange λ .

Exercice n°01 :

1. L'expression mathématique du TMS_{y à x} :

On a : $TMS_{y \text{ à } x} = \frac{Um_y}{Um_x}$. $Um_y = \frac{\partial U_T}{\partial y} = \frac{4 \cdot (0,75)x^{0,5}y^{0,75}}{y}$. $Um_x = \frac{\partial U_T}{\partial x} = \frac{4 \cdot (0,5)x^{0,5}y^{0,75}}{x}$

$TMS_{y \text{ à } x} = \frac{4 \cdot (0,75)x^{0,5}y^{0,75}}{y} * \frac{x}{4 \cdot (0,5)x^{0,5}y^{0,75}} = \frac{0,75x}{0,5y} = \frac{3x}{2y}$

La valeur du TMS_{x à y} au point (x,y) = (8,6) :

On a : $TMS_{x \text{ à } y} = \frac{1}{TMS_{y \text{ à } x}} = \frac{1}{\frac{3x}{2y}} = \frac{2y}{3x} = \frac{(2) \cdot (6)}{(3) \cdot (8)} = \frac{2}{4} = 0,5$

2. Le consommateur doit :

	Δy	Δx	ΔU	
On a : $TMS_{x \text{ à } y} = 0,5$	-0,5Unité -2Unités	+1Unité Δx	0 Util 0 Util	} $\Rightarrow \Delta x = \frac{(-2) * (+1)}{(-0,5)} = +04 \text{ Unités}$

Augmenter sa consommation du bien X de 04^{unités} afin qu'il puisse garder constant son niveau de satisfaction tout en diminuant sa consommation du bien Y de 02^{unités}.

3. Détermination des coordonnées du point d'équilibre par la méthode de Lagrange :

A. Formalisation mathématique du problème du consommateur :

$$\begin{cases} \text{Max } U_T = f(x, y) \\ \text{S/C} \\ R = P_x x + P_y y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Max } U_T = 4x^{0,5}y^{0,75} \\ \text{S/C} \\ 600 = 3x + 6y \end{cases}$$

B. Construction de la fonction de Lagrange :

Ce problème lié peut s'écrire sous la forme de la fonction de Lagrange, on aura la fonction suivante :

$L(x, y, \lambda) = U_T + \lambda (R - P_x x - P_y y) \Leftrightarrow L(x, y, \lambda) = 4x^{0,5}y^{0,75} + \lambda(600 - 3x - 6y)$

$\Leftrightarrow L(x, y, \lambda) = 4x^{0,5}y^{0,75} + 600\lambda - 3\lambda x - 6\lambda y$

C. Résolution du problème du consommateur :

La fonction de Lagrange, et par conséquent le problème du consommateur, admet des solutions lorsque ses dérivées partielles par rapport à x, y et λ s'annulent simultanément. On aura un système d'équations (S) composé de trois équations :

$$(S): \begin{cases} \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 \cdot (0,5)x^{0,5}y^{0,75}}{x} - 3\lambda = 0 \\ \frac{4 \cdot (0,75)x^{0,5}y^{0,75}}{y} - 6\lambda = 0 \\ 600 - 3x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 \cdot (0,5)x^{0,5}y^{0,75}}{3x} = \lambda \dots (1) \\ \lambda = \frac{4 \cdot (0,75)x^{0,5}y^{0,75}}{6y} \dots (2) \\ 600 = 3x + 6y \dots (3) \end{cases}$$

On a l'équation (1) égale à l'équation (2), on aura :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 \cdot (0,5)x^{0,5}y^{0,75}}{3x} = \frac{4 \cdot (0,75)x^{0,5}y^{0,75}}{6y} \\ 600 = 3x + 6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,75x \dots (4) \\ 600 = 3x + 6y \dots (3) \end{cases}$$

On remplace « y » par sa valeur dans l'équation (3), on aura :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,75x \dots (4) \\ 600 = 3x + 6(0,75x) \dots (5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,75(80) = 60 \text{ Unités} \\ x = \frac{600}{7,5} = 80 \text{ Unités} \end{cases}$$

Donc, les coordonnées du point d'équilibre sont (x,y) = (80,60).

4. L'effet d'une diminution du revenu de 10% sur le niveau de l'utilité :

On a : $\lambda = \frac{\Delta U_T}{\Delta R}$. ΔR est donnée en dinar, on doit transformer donc la variation relative (10%) du revenu en une variation absolue.
 $\frac{\Delta R}{R} * 100\% = -10\% \Leftrightarrow \Delta R = -0,1 * R = -0,1 * 600 = -60 \text{ DA}$.

Le multiplicateur de Lagrange λ , on le calcule soit à partir de la première égalité ou bien à partir de la deuxième égalité du système d'équations (S) :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{4 \cdot (0,5)x^{0,5}y^{0,75}}{3x} = \frac{4(0,5)x(80)^{0,5}(60)^{0,75}}{3(80)} = 1,60 \text{ Utils/DA} \\ \lambda = \frac{4 \cdot (0,75)x^{0,5}y^{0,75}}{6y} = \frac{4 \cdot (0,75)x(80)^{0,5}(60)^{0,75}}{6(60)} = 1,60 \text{ Utils/DA} \end{cases}$$

Pour une augmentation (diminution) de 01 DA du revenu du

consommateur, son utilité augmente (diminue) de 1,6 Utils.

$$\text{On a donc } \lambda = \frac{\Delta U_T}{\Delta R} \Rightarrow \Delta U_T = \lambda * \Delta R = (1,6) * (-60) = -96 \text{ Utils}$$

Ou encore :

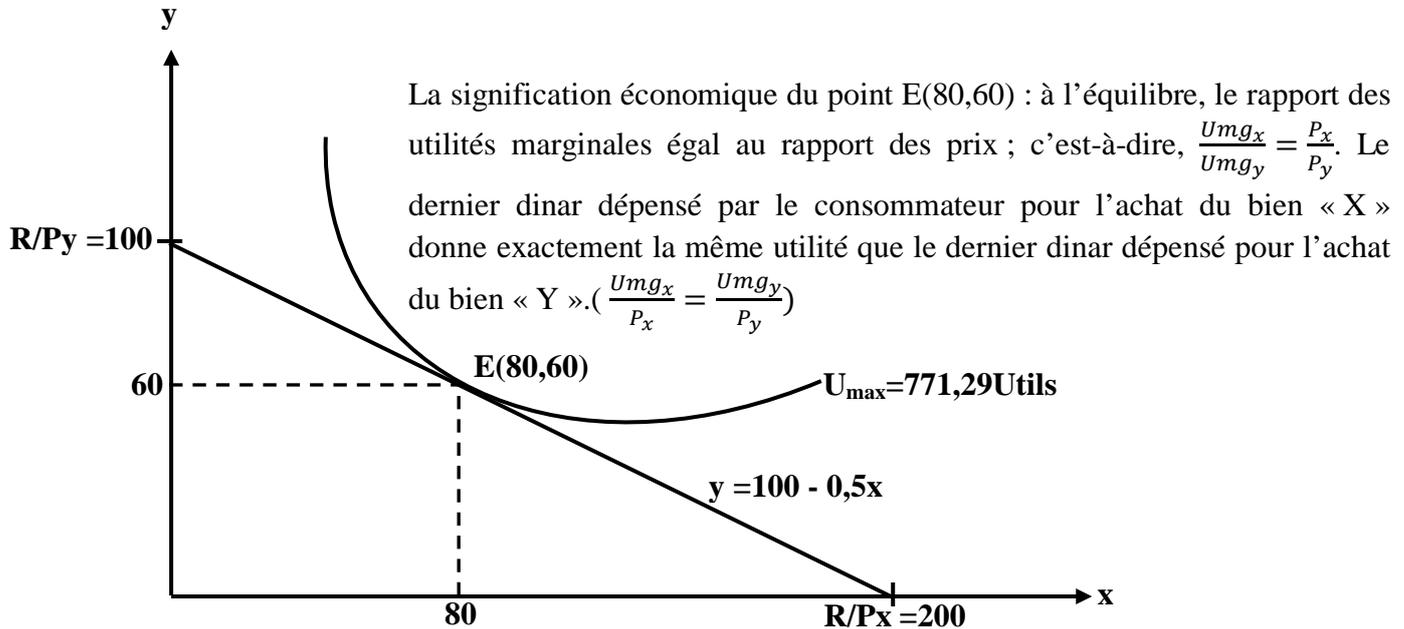
	ΔR	ΔU_T	
On a : $\lambda = 1,6$	+01 DA -60 DA	+1,6 Utils ΔU_T	} $\Rightarrow \Delta U_T = \frac{(-60) * (+1,6)}{(+01)} = -96 \text{ Utils}$

Donc le niveau d'utilité diminue de 96 Utils si le revenu du consommateur baisse de 10% (60DA).

5. La variation de revenu nécessaire pour accroître le niveau de l'utilité de 200^{Utils} :

On a : $\lambda = \frac{\Delta U_T}{\Delta R} \Rightarrow \Delta R = \frac{\Delta U_T}{\lambda} = \frac{+200}{1,6} = +125 \text{ DA}$. Alors, le revenu doit augmenter de 125^{DA} pour accroître le niveau d'utilité de 200^{Utils}.

6. La représentation graphique de l'équilibre (l'optimum) du consommateur :



Exercice n°02 :

1. Quel commerçant le touriste va choisir ?

Répondre à cette question, revient à trouver la combinaison de fruits qui procure plus d'utilité au touriste. On doit donc déterminer, tout d'abord, les deux combinaisons optimales. Calculer par la suite le niveau d'utilité procuré par chacune des deux combinaisons et enfin choisir celle qui procure plus d'utilité au touriste :

1.1. La détermination des combinaisons optimales :

1.1.1. Les quantités de (x,y) qui maximisent l'utilité du touriste :

À l'équilibre, on a :

$$\begin{cases} \frac{Um_x}{P_x} = \frac{Um_y}{P_y} \\ S/C \\ R = P_x x + P_y y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8xy}{160} = \frac{4x^2}{100} \\ S/C \\ 1200 = 160x + 100y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{20} = \frac{x}{25} \\ S/C \\ 120 = 16x + 10y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{4} = \frac{x}{5} \\ S/C \\ 60 = 8x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 4x \\ S/C \\ 60 = 8x + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ Kilogrammes} \\ y = 4 \text{ Kilogrammes} \end{cases}$$

1.1.2. Les quantités de (z,w) qui maximisent l'utilité du touriste :

$$\begin{cases} \frac{Um_z}{P_z} = \frac{Um_w}{P_w} \\ S/C \\ R = P_z z + P_w w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10zw}{250} = \frac{5z^2}{80} \\ S/C \\ 1200 = 250z + 80w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{w}{25} = \frac{z}{16} \\ S/C \\ 120 = 25z + 8w \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25z = 16w \\ S/C \\ 60 = 16w + 8w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{16}{25}w \\ w = \frac{120}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3,2 \text{ Kilogrammes} \\ w = 5 \text{ Kilogrammes} \end{cases}$$

1.2. Niveau d'utilité procuré au touriste par chacune des deux combinaisons :

1.2.1. Niveau d'utilité procuré au touriste par la combinaison (x,y) :

$$U_{1\max} = f(x,y) = f(5,4) = 4 * 5^2 * 4 + 6 = 406 \text{ Utils}$$

1.2.2. Niveau d'utilité procuré au touriste par la combinaison (z,w) :

$$U_{2\max} = f(z,w) = f(3,2; 5) = 5 * 3,2^2 * 5 + 8 = 264 \text{ Utils}$$

1.3. Choix du commerçant :

Comme : $U_{1\max} > U_{2\max}$, le touriste va acheter la combinaison de fruits (Pomme, Nectarine) du commerçant A.

2. L'expression et la valeur du TMS_{x à y} au point (x,y) = (5,4) :

$$\text{TMS}_{x \text{ à } y} = \frac{Um_x}{Um_y}. \quad Um_x = \frac{\partial U_1}{\partial x} = 8xy, \quad Um_y = \frac{\partial U_1}{\partial y} = 4x^2$$

$$\text{TMS}_{x \text{ à } y} = \frac{8xy}{4x^2} = \frac{2y}{x}. \quad \text{Sa valeur : } \text{TMS}_{x \text{ à } y} = \frac{2y}{x} = \frac{2*4}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

3. Le touriste doit :

	Δy	Δx	ΔU	
On a : $\text{TMS}_{x \text{ à } y} = 1,6$	-1,6 Unités	+1 Unité	0 Util	} $\Rightarrow \Delta x = \frac{(+2) * (+1)}{(-1,6)} = -1,25 \text{ Unités}$
	+2 Unités	Δx	0 Util	

Baisser sa consommation de X (Pomme) de 1,25^{unités} pour qu'il puisse garder le même niveau d'utilité tout en augmentant sa consommation de Y (Nectarine) de 2^{unités}.

4. L'effet d'une augmentation de 10% du revenu sur l'équilibre du touriste :

$$\lambda = \frac{Um_x}{P_x} = \frac{Um_y}{P_y} \Leftrightarrow \lambda = \frac{8xy}{160} = \frac{4x^2}{100}$$

$$\lambda = \frac{5*4}{20} = \frac{5^2}{25} = 01 \text{ Util/DA.}$$

$$\frac{\Delta R}{R} * 100\% = +10\% \Rightarrow \Delta R = 0,1 * R = 0,1 * 1200 = 120 \text{ DA}$$

$$\text{On a : } \lambda = \frac{\Delta U_T}{\Delta R} \Rightarrow \Delta U_T = \lambda * \Delta R = 1 * 120 = 120 \text{ Utils}$$

Un accroissement de 10% (120^{DA}) du revenu du touriste, entraîne une augmentation de 120^{Utils} de son utilité.

Exercice n°01 :

1/ L'interprétation des signes :

-Le signe négatif devant « P », indique qu'il existe une relation inverse entre le nombre d'usagers et le prix du billet, conformément à la loi de la demande.

-Le signe négatif devant « R », indique que le transport par autobus est un bien inférieur, c'est-à-dire avec un revenu plus élevé, les usagers préfèrent utiliser un autre moyen de transport (voiture personnelle, taxi, etc.). Ceci dit, l'élasticité-revenu est négative.

-Le signe positif devant « P_a », indique que l'automobile et le transport en commun sont substitués, c'est-à-dire, l'élasticité-croisée est positive.

2/ L'équation de la demande si R=300^{DA} et P_a=5,8^{DA}

$$Q_d = 6000 - 2000 P.$$

3/ Le prix du billet d'autobus si Q_d = 4000 Places :

$$Q_d = 4000 \Leftrightarrow 4000 = 6000 - 2000 P$$

$$\Rightarrow P = 1 \text{ DA.}$$

4/ Le nombre de passagers supplémentaires si P_a augmente de 2DA :

$$Q_d = 5450 - 2000 P + 100 (5,8 + 2) - 0,1 (300) = 6200 - 2000 P.$$

Lorsque P = 1^{DA}, Q_d = 4200 passagers. Un surplus de 200 passagers.

5/ L'ajustement que la direction devrait apporter au prix du billet :

$$4000 = 6200 - 2000 P$$

$$\Rightarrow P = 1,1 \text{ DA. Le prix doit augmenter de } 0,1^{\text{DA}}.$$

Exercice n°02 :

$$D_x = f(R, P_x, P_y) = \frac{0,1 R - 0,4 P_x + 0,75 P_y}{0,125 P_x - 700}. \quad P_x = 8000^{\text{DA}}, P_y = 4000^{\text{DA}} \text{ et } R = 62000^{\text{DA}}.$$

1. La variation de la demande hôtelière si P_x diminue de 1000DA :

1.1. Niveau de la demande :

$$D_x = f(62000, 8000, 4000) = \frac{0,1 \cdot 62000 - 0,4 \cdot 8000 + 0,75 \cdot 4000}{0,125 \cdot 8000 - 700} = \frac{6000}{300} = 20 \text{ Nuitées}$$

1.2. Élasticité-prix directe :

$$ep_x = \frac{\partial D_x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_x} = \frac{-0,4(0,125 P_x - 700) - 0,125(0,1 R - 0,4 P_x + 0,75 P_y)}{(0,125 P_x - 700)^2} \cdot \frac{P_x}{D_x} = \frac{(-120 - 750)}{300^2} \cdot \frac{8000}{20}$$

$$ep_x \cong -3,87$$

$|ep_x| = 3,87 > 1 \Rightarrow$ **Une demande élastique.** Une variation de 1% de P_x , induit une variation, en sens opposé, de 3,87% de la demande hôtelière.

1.3. Variation de la demande :

$$\frac{\Delta P_x}{P_x} * 100\% = \frac{-1000}{8000} * 100\% = -12,5\%$$

	$\frac{\Delta P_x}{P_x}$	$\frac{\Delta D_x}{D_x}$	
On a : $ep_x = -3,87$	-1% -12,5%	+3,87% $\frac{\Delta D_x}{D_x}$	$\} \Rightarrow \frac{\Delta D_x}{D_x} = \frac{(-12,5) * (+3,87)}{(-1)} = 48,37\%$

Donc, une diminution de 1000DA (12,5%) de P_x , provoquera une augmentation de 48,37% de la demande hôtelière du touriste.

2. La relation entre les deux modes d'hébergement :

$$ep_y = \frac{\partial D_x}{\partial P_y} * \frac{P_y}{D_x} = \frac{0,75}{0,125P_x - 700} * \frac{P_y}{D_x} = \frac{0,75}{300} * \frac{4000}{20} = \frac{0,75}{3} * 2 = 0,5$$

$ep_y = 0,5 > 0 \Rightarrow$ Le mode d'hébergement hôtellerie et les autres modes d'hébergement sont des substituts.

3. L'effet d'une diminution de 10% du prix moyen des autres modes d'hébergement sur la demande hôtelière du touriste :

	$\frac{\Delta P_y}{P_y}$	$\frac{\Delta D_x}{D_x}$	
On a : $ep_y = 1$	-1% -10%	-0,5% $\frac{\Delta D_x}{D_x}$	$\} \Rightarrow \frac{\Delta D_x}{D_x} = \frac{(-10\%) * (-0,5\%)}{(-1\%)} = -5\%$

Donc, une diminution de 10% du prix moyen des autres modes d'hébergement, induira une diminution de 5% de la demande hôtelière du touriste.

4. La catégorie du service hôtellerie :

$$e_R = \frac{\partial D_x}{\partial R} * \frac{R}{D_x} = \frac{0,1}{0,125P_x - 700} * \frac{R}{D_x} = \frac{0,1}{300} * \frac{62000}{20} = 1,03$$

$e_R = 1,03 > 1 \Rightarrow$ Le service hôtellerie est un service de luxe.

Exercice n°03 :

$U = f(x, y) = 2x^2y$, $R=150^{DA}$, $P_x = 10^{DA}$ et $P_y = 20^{DA}$.

1-a. L'expression de la courbe consommation-revenu (CCR) :

À l'équilibre, on a : $\frac{Um_{g_x}}{Um_{g_y}} = \frac{P_x}{P_y} \Leftrightarrow \frac{4xy}{2x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{x}{4}$: Est l'expression de la CCR.

La CCR : c'est l'ensemble des points représentatifs des combinaisons optimales de X et Y lorsque, les prix des biens restent constants et que le budget du consommateur varie.

La particularité de cette CCR : c'est une droite passant par l'origine et de pente $\frac{1}{4}$.

Courbe d'Engel : c'est la courbe de demande individuelle d'un bien en fonction du revenu.

En appliquant la condition de l'équilibre, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Um_g_x}{Um_g_y} = \frac{P_x}{P_y} \\ R = P_x x + P_y y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2y}{x} = \frac{P_x}{P_y} \\ R = P_x x + P_y y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P_x}{2P_y} x \\ 2R = 3P_x x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P_x}{2P_y} x \\ x^d = \frac{2R}{3P_x} \end{array} \right. : C'est la fonction de demande de X$$

1-b. Les expressions de la courbe d'Engel de X et Y :

La courbe d'Engel est la fonction de demande, quand les prix sont constants :

$$\begin{cases} y^d = \frac{R}{3P_y} = \frac{1}{60} R \\ x^d = \frac{2R}{3P_x} = \frac{1}{15} R \end{cases}$$

Particularité : Les fonctions de demande individuelles ne dépendent que du revenu et du prix du bien considéré, et sont des fonctions décroissantes du prix du bien considéré.

1-c. $e_{y^d/R} = \frac{\partial y^d}{\partial R} * \frac{R}{y^d} = \frac{1}{3P_y} * \frac{R}{\frac{R}{3P_y}} = 1$. Si le revenu augmente de 1%, la quantité consommée du bien Y augmente de 1%.

$e_{y^d/R} = 1 \Rightarrow Y$ est un bien de luxe.

Si le revenu diminue de 20%, la quantité consommée du bien Y diminue de 20%.

2-a. La courbe consommation-prix (CCP) est le lieu géométrique des points d'équilibre, lorsque le prix d'un bien varie, le prix de l'autre bien ainsi que le revenu restent constants.

$$\text{À l'équilibre : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{Um_g_x}{Um_g_y} = \frac{P_x}{P_y} \\ R = P_x x + P_y y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P_x}{2P_y} x \text{ (} P_y \text{ une constante} = 20 \text{ DA; } P_x \text{ varie)} \\ 150 = P_x x + 20 y = P_x x + 20 \left(\frac{P_x}{40} x\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P_x}{40} x \\ y = \frac{5}{2} \end{array} \right.$$

La CCP est une droite horizontale (la quantité optimale de Y ne dépend pas de P_x).

Équation de demande du bien X : $x^d = f(R, P_x) = \frac{2R}{3P_x}$.

La fonction de demande du bien X en fonction du prix est : $x^d = f(\bar{R}, P_x) = \frac{100}{P_x}$, c'est une fonction décroissante.

2-b-1. L'élasticité-prix directe :

$$e_{x^d/P_x} = \frac{\partial x^d}{\partial P_x} * \frac{P_x}{x^d} = \frac{-3*2R}{(3P_x)^2} * \frac{P_x}{\frac{2R}{3P_x}} = -1.$$

$\left| e_{x^d/P_x} \right| = 1 \Rightarrow$ La demande du bien X est isoélastique : Si P_x augmente (diminue) de 1%, la demande du bien X diminue (augmente) de 1% (La quantité demandée en bien X varie proportionnellement à celle du prix de ce bien).

2-b-2. L'élasticité-prix croisée :

$e_{x^d/P_y} = \frac{\partial x^d}{\partial P_y} * \frac{P_y}{x^d} = 0$; La quantité demandée en bien X ne dépend pas du prix du bien Y => Les biens X et Y sont indépendants.