Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université A. Mira Bejaia

Faculté des Sciences Exactes **04 – 02 – 2019**

Département de Mathématiques /M.I **Durée : 1h30mn**

Première année M.I.

Examen d'Algèbre 1

Exercice 1. (04 points)

1. Soient P et Q deux propositions. Montrer que $\overline{P \Rightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \overline{Q}$ est vraie.

2. Ecrire la négation de la proposition R suivante:

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 0 \Longrightarrow 1/x > 0)$. Dire si R est vraie.

3. Soit la proposition S suivante:

$\forall x, y \in \mathbb{R}, [(x > 0) \wedge (y > 0) \Longrightarrow xy > 0]$.

Montrer que $S \Longrightarrow R$.

4. Montrer que pour tous réels $a \neq 1$ et $b \neq 1$, on a $a + b - ab \neq 1$.

Exercice 2. (06 points)

Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \quad ; \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

1. Soit $\mathbf{B} = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$. Déterminer $f^{-1}(\mathbf{B})$.

2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g.

3. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives? Surjectives?

Exercice 3. (06 points)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ suivante:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists b > 0, x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Donner la classe d'équivalence des éléments: $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ et $C = (1, 1)$.

3. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. En déduire l'ensemble quotient $\mathbb{R}^2_{/\mathcal{R}}$.

Questions de cours (04 points)

1. Donner la définition d'un groupe abélien.

2. Soit $(G, \star)$ un groupe.

Donner la caractérisation d'un élément neutre de G et montrer son unicité.

3. Soit $x \in G$, donner la caractérisation de l'élément symétrique de x et montrer son unicité.