Université A. Mira Bejaia
Faculté des Sciences Exactes **10 – 03 – 2020**
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I.

Corrigé de l'Examen d'Algèbre 1

Exercice 1. (08 points)

1.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 2x-y \end{array}$$

a)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=1\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x-1\} \end{aligned}$$

Représentation graphique: C'est la droite d'équation $y = 2x - 1$ (Voir figure)

b) L'application f n'est pas injective car $f(1,1) = f(0,-1) = 1$ et $(1,1) \neq (0,-1)$

c)Surjection de f:

Soit $z \in \mathbb{R}$, $\exists ?(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ z = f(x,y)$

$z = f(x,y) \Longrightarrow z = 2x - y$. Il suffit de prendre $(x,y) = (z,z)$ oubien $(x,y) = (0,-z)$. D'où f est surjective.

2.

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,\ t^2) \end{array}$$

a)

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}) &= \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 | \exists x\in\mathbb{R} : (y,z)=g(x)\} \\ &= \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 | \exists x\in\mathbb{R} : (y,z)=(x,x^2)\} \end{aligned}$$

Représentation graphique: C'est la parabolle d'équation $z = x^2$ (voir la figure ci-dessus).

b) L'application g n'est pas surjective car par exemple $(0,-1)$ n'a pas d'antécédant par g.

c) $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbf{D}) &= \{t \in \mathbb{R} : g(t) \in \mathbf{D}\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : t = t^2\} \\ &= \{0,\ 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(g^{-1}(\mathbf{D})) &= g(\{0, 1\}) \\ &= \{g(t), t \in \{0, 1\}\} \\ &= \{g(0), g(1)\} \\ &= \{(0, 0),\ (1, 1)\} \end{aligned}$$

3. Déterminons $f \circ g$:

Soit $t \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(t, t^2) = 2t - t^2$

D'où

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 2t - t^2 \end{array}$$

Cette application n'est pas injective car $(f \circ g)(0) = (f \circ g)(2) = 0$ mais $0 \neq 2$.

Exercice 2. (06.5 points)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow |x^2 - 1| = |y^2 - 1|.$$

1.Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:

On pose $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x^2 - 1| \end{array}$

$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$

La rélexivité: Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(x)$, donc $x\mathcal{R}x$. D'où $\mathcal{R}$ est réflexive.

La symétrie: Soient $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow f(y) = f(x) \\ &\Longrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

La transitivité: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a $x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ et $y\mathcal{R}z \Longrightarrow f(y) = f(z)$, donc $f(x) = f(z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$. D'où $\mathcal{R}$ est transitive.

Conclusion: $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2.

$$\begin{aligned}
\dot{0} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}\ 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| = 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 1 \ ou\ 1 - x^2 = 1\} \\
&= \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{1} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}\ 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| = 0\} \\
&= \{-1,\ 1\}
\end{aligned}$$

3. Sur $[1, +\infty[$, on a $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ et

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \{y \in [1, +\infty[: y\mathcal{R}x\} \\
&= \{y \in [1, +\infty[: y^2 - 1 = x^2 - 1\} \\
&= \{x\}
\end{aligned}$$

D'où $Card(\dot{x}) = 1$

Exercice 3. (05.5 points)

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

1. Commutativité: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y \star x$.

Donc $(\star)$ est commutative.

2. Existence de l'élément neutre ?

$\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ x \star e = e \star x = x$

Comme la loi est commutative, on résout une seule équation:

$$\begin{aligned}
x \star e = x &\Longrightarrow xe + (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x \\
&\Longrightarrow (e - 1)(x + (x^2 - 1)(e + 1)) = 0 \\
&\Longrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ ou \\ e = -\frac{x}{x^2 - 1} - 1 \text{ (rejeté car il dépend de } x) \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où l'élément neutre de $(\star)$ est $e = 1$

3. $(2 \star 2) \star 3 = 13 \star 3 = 39 + 1344 = 1383$

$2 \star (2 \star 3) = 2 \star 30 = 60 + 2697 = 2757$.

Comme $(2 \star 2) \star 3 \neq 2 \star (2 \star 3)$ On en déduire que la loi $(\star)$ n'est pas associative.

4. Le(s) symétrique(s) de l'élément 2 pour la loi $(\star)$:

$2 \star x = x \star 2 = e = 1$, comme la loi est commutative, on résout une seule équation.

$$\begin{aligned}
2 \star x = 1 &\implies 2x + 3(x^2 - 1) = 1 \\
&\implies 3x^2 + 2x - 4 = 0 \text{ (équation de second degrès, son discriminant est } \Delta = 52) \\
&\implies x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3}
\end{aligned}$$

D'où 2 admet deux symétriques pour $(\star)$: $\frac{-1-\sqrt{13}}{3}$ et $\frac{-1+\sqrt{13}}{3}$.