Université A. Mira Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I
Première année M.I.

Corrigé de l'examen d'Algèbre 1

Exercice 1. (03 points)

$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $\}$.

P : « $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ».

R : « $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), [(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)]$ ».

1. $\overline{P}$: « $\exists f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ »,

$\overline{R}$: « $\exists f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), [(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)]$ ».

2. L'implication $\bar{P} \Longrightarrow \bar{R}$ est vraie ou fausse ?

On a P, R sont fausses, donc $\overline{P}$, $\overline{R}$ sont vraies. D'où $\bar{P} \Longrightarrow \bar{R}$ est vraie.

Exercice 2. (**Interrogation**) (10 points)

Soient f et g deux applications définies par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

1. Montrons que f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \\ &\Longrightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1) \\ &\Longrightarrow -2x_1 + x_2 = -2x_2 + x_1 \\ &\Longrightarrow 3(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

D'où f est injective.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\}) =?$

$f^{-1}(\{a\}) = \{x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} : f(x) = a\}$

$$\begin{aligned} f(x) = a &\Longrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = a \\ &\Longrightarrow (a-2)x = a+1 \\ &\Longrightarrow x = \frac{a+1}{a-2} \end{aligned}$$

On a $a+1 \neq a-2 \Longrightarrow x \neq 1$.
D'où
$$f^{-1}(\{a\}) = \{\frac{a+1}{a-2}, \quad a \neq 2\}.$$
Pour $y = 2, \nexists\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $f(x) = 2$
d'où f n'est pas surjective.

3. $\mathbf{D} =?$ tel que
$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\ & x & \longmapsto & h(x) = f(x) \end{array}$$
soit bijective.
D'après la question précédente h est injective car f l'est, et f est surjective pour $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
D'où h est bijective pour $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Calcul de h^{-1} :
D'après la deuxième question $h^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : h^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.
4. En déduire que $g \circ h$ est bijective.
On a $g \circ h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$ est bien définie et est bijective car h est bijective (question **3.**) et g est bijective : en effet : $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \exists ! x = y - 1 \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : y = g(x)$.

Déterminons $(g \circ h)^{-1}$ par deux méthodes différentes :
$1^{\text{ère}}$ **méthode** : On calcule d'abord l'expression de $g \circ h$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
$$\begin{aligned} (g \circ h)(x) = g[h(x)] &= g\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \\ &= \frac{2x+1}{x-1} + 1 \\ &= \frac{3x}{x-1} \end{aligned}$$
On a $y = \dfrac{3x}{x-1} \Longrightarrow 3x = y(x-1) \Longrightarrow x(3-y) = -y \Longrightarrow x = \frac{y}{y-3} \neq 1$
d'où
$$\begin{array}{rccc} (g \circ h)^{-1}: & \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-3} \end{array}$$
$2^{\text{ème}}$ **méthode** : On utilise $(g \circ h)^{-1} = (h^{-1} \circ g^{-1})$
On a $\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ & x & \longmapsto & x-1 \end{array}$
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} : h^{-1}[g^{-1}(x)] = h^{-1}(x-1) = \dfrac{x-1+1}{x-1-2} = \dfrac{x}{x-3}$
D'où $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} : (g \circ h)^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-3}$.

Exercice 3. (04 points)

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

a) **Réflexivité** : Soit $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 - x^2 = x - x = 0 \Longrightarrow x\mathcal{R}x.$

D'où $\mathcal{R}$ est réflexive.

b) **La symétrie** Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$: on a $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x^2 - y^2 = x - y \Longrightarrow y^2 - x^2 = y - x \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$

d'où $\mathcal{R}$ est symétrique.

c) **La transitivité** Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) &\Longrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x - y, \\ y^2 - z^2 = y - z, \end{cases} \\ &\Longrightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

D'où de a), b) et c) la relation $\mathcal{R}$ est d'équivalence.

- Ou bien en posant f l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$, la relation $\mathcal{R}$ sera

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$

$\mathcal{R}$ est d'équivalence car " = " est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

2. Le graphe de $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\mathcal{R}y\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = x - y\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-y)(x+y) = x - y\} \end{aligned}$$

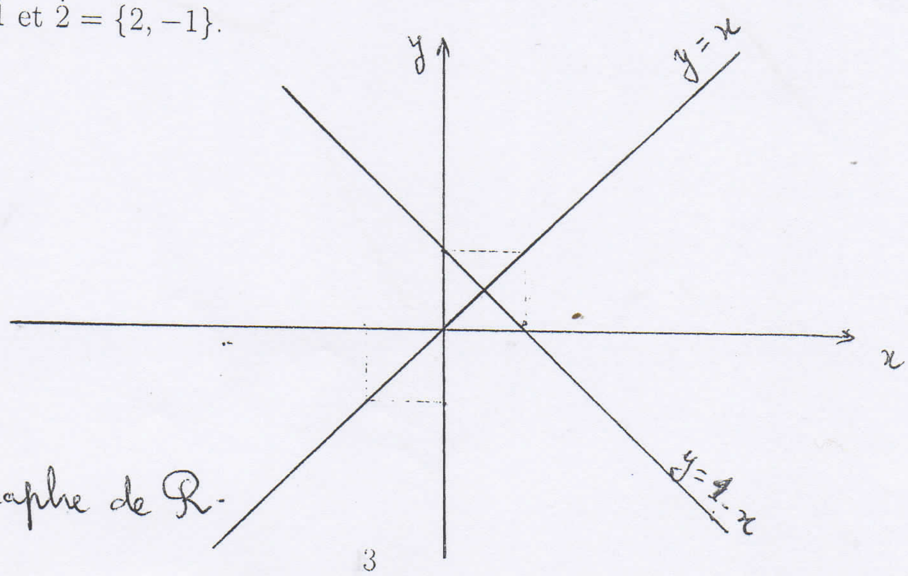
- $x = y$ est une solution.
- Si $x \neq y \Longrightarrow x + y = 1 \Longrightarrow y = 1 - x$

d'où $\mathbf{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \text{ ou } y = 1 - x\}.$

Le graphe de $\mathcal{R}$ est l'union des deux droites d'équations respectives $y = x,\ y = 1 - x$.(Voir la représentation graphique).

3. $\dot{x} = \{y \in \mathbb{R} : y\mathcal{R}x\} = \{y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = x - y\} = \{x, 1 - x\}.$

D'où $\dot{0} = \{0, 1\} = \dot{1}$ et $\dot{2} = \{2, -1\}$.



- Graphe de R.

Exercice 4. (03 points)

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{Z}^2, \quad (a,b) \star (a',b') = (aa', -3bb').$$

1. $(1,2) \star (3,4) = (3,-24)$.

2. $*$ est commutative, en effet

$\forall (a,b),\ (a',b') \in \mathbb{Z}^2 : (a,b) \star (a',b') = (aa', -3bb') = (a'a, -3b'b) = (a',b') \star (a,b)$.

<u>Existence de l'élément neutre de $*$</u>

$\exists\ (e,e') \in \mathbb{Z} : \forall (a,b) \in \mathbb{Z} : (a,b) \star (e,e') = (e,e') \star (a,b) = (a,b)$

Comme $*$ est commutative, il suffit de résoudre une seule équation.

On prend $(a,b) \star (e,e') = (a,b) \Longrightarrow \begin{cases} e = 1, \\ e' = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

D'où $*$ n'admet pas d'élément neutre dans $\mathbb{Z}^2$.