Algébre 1

Exercices avec Solutions

1ére Année MI

- chapitre 1: Logique et Raisonnements
- chapitre 2: Ensembles et Applications
- chapitre 3: Relations binaires
- chapitre 4: Structures Algébriques

Année Universitaire 2018-2019

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère année LMD Mathématique et Informatique — ALGÈBRE 1

Fiche de TD 1 : Logique et Raisonnements

Exercice 1 : Dans le LMD mathématique et informatique, un étudiant qui sera admis en deuxième année choisira entre mathématique OU informatique mais pas les deux simultanément. C'est le OU 'exclusif'.
Écrire la table de vérité du " ou exclusif ".

Exercice 2 : Soient p et q deux propositions données. En utilisant la table de vérité, montrer que

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \text{ et } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Exercice 3 : Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :
(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D).
Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : Former la négation des propositions suivantes :

$$[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q) \text{ et } [(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r).$$

Exercice 5 : Soient les quatre assertions suivantes :
$(a) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(b) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$;
$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.
Les assertions $(a), (b), (c), (d)$ sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Exercice 6 : Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression

" x est la fille de y ", où x et y sont dans F.

Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous) :
1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit : " pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y " dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \underline{\exists x \in F}, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.

Exercice 7 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 8 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

$$P_n : 10^n - 1 \text{ est divisible par } 9.$$
$$Q_n : 10^n + 1 \text{ est divisible par } 9.$$

1. Démontrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
2. Démontrer que si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie.
3. Un étudiant affirme : " Donc P_n et Q_n sont vraies pour tout entier naturel n ". Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4. Démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
5. Démontrer que Q_n est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 9 : Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant 2 paires de chaussettes.

Exercice 10 : Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.

Exercice 11 : Montrer par l'absurde que

$$\forall a, b \geqslant 0 : \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$

Année Universitaire 2018-2019

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Corrigé de la fiche de TD 1 : Logique et Raisonnements

Exercice 1 : Dans le LMD mathématique et informatique, un étudiant qui sera admis en deuxième année choisira entre mathématique OU informatique mais pas les deux simultanément. C'est le OU 'exclusif'.
Écrire la table de vérité du " ou exclusif ".

Solution Exercice 1 :
Voici la table de vérité du " ou exclusif " :

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

On remarque que le " ou exlusif " est vrai que si les deux assertions p et q sont différentes.

Exercice 2 : Soient p et q deux propositions données. En utilisant la table de vérité, montrer que

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \text{ et } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})\,.$$

Solution Exercice 2 :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1

Exercice 3 : Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :
(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D).
Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Solution Exercice 3 : Posons : E=(C ou D), et utilisons la distributivité de " et " par rapport à " ou " et inversement :
(A ou B) et (C ou D)$\Leftrightarrow$(A ou B) et E.
$\Leftrightarrow$(A et E) ou (B et E).
$\Leftrightarrow$(A et (C ou D)) ou (B et (C ou D)).
$\Leftrightarrow$(A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D).
Pour résoudre le système, il suffit de poser A : $x-1=0$,B :$y-2=0$,C :$x-2=0$,D :$y-3=0$.
On aurra :
($x=1$ et $x=2$) ou ($x=1$ et $y=3$) ou ($x=2$ et $y=2$) ou ($y=2$ et $y=3$).
Donc l'ensemble des solutions $S = \{(1,3),(2,2)\}$.

Exercice 4 : Former la négation des propositions suivantes :

$$[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q) \text{ et } [(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r).$$

Solution Exercice 4 :

$$\begin{aligned}
\overline{[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q)} &\Leftrightarrow \overline{[(p \Rightarrow q) \vee r]} \vee \overline{(p \vee q)} \\
&\Leftrightarrow [\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge \overline{r}] \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{r}] \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r)} &\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge \overline{(p \wedge r)} \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge (\overline{p} \vee \overline{r})
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Soient les quatre assertions suivantes :
$(a) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(b) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$;
$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.
Les assertions $(a), (b), (c), (d)$ sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Solution Exercice 5 : Attention ! l'ordre des quantificateurs est important !
L'assertion (a) est fausse : Est-ce- qu'on peut trouver un réel x pour que pour tout réel y leur somme soit toujours positive ? c'est pas toujours vraie ! sinon on peut montrer que $(\overline{a})$:$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leqslant 0$ qui est vraie, il suffit de prendre par exemple $y = -(x + 1)$. On obtiendra $x + y = x - x - 1 = -1 \leqslant 0$.
L'assertion (b) est vraie : en effet, pour tout réel x il exsite un y qui dépend de x. Prenons $y = -x+1$ implique que $x+y = x-x+1 = 1 > 0$. Sa négation $(\overline{b})$:$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y \leqslant 0$.
L'assertion (c) est fausse. Il suffit de trouver un x et un y qui ne vérifie pas (c). Par exemple $x = -1$ et $y = 0$. On voit facilement que $x + y = -1 + 0 = -1 < 0$.
Sa négation $(\overline{c})$:$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leqslant 0$.
L'assertion (d) est vraie : Il suffit de prendre $x = -1$. On obtiendra que $y^2 > x = -1$, pour tout réel y. Sa négation $(\overline{d})$:$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leqslant x$.

Exercice 6 : Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression

" x est la fille de y ", où x et y sont dans F.

Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous) :
1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.
Par exemple, la première proposition s'écrit : " pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y " dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.

Solution Exercice 6
2. $\exists y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$. Sa négation :$\forall y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.
3. $\forall x \in F, \exists y \in F, \overline{P(x, y)}$. Sa négation :$\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.
4. $\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$. Sa négation :$\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$.

Exercice 7 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Solution Exercice 7

Posons $A(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$ et $B(n) = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

Pour $n = 1$,

$$A(1) = \sum_{k=1}^{1}(-1)^k k = -1 = \frac{-(2+1)-1}{4} = B(1).$$

Donc la propriété est vraie pour le rang $n = 1$.

Supposons que la propriété est vraie pour le rang n, et montrons qu'elle reste vraie pour le rang $(n+1)$.

$$A(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1).$$

La quantité en vert, et en utilisant l'hypothèse de récurrence elle est égale à

$$\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Donc on a

$$A(n+1) = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4} = B(n+1)$$

On conclut que la propriété reste vraie pour le rang $(n+1)$.

Exercice 8 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

$$P_n : 10^n - 1 \text{ est divisible par } 9.$$
$$Q_n : 10^n + 1 \text{ est divisible par } 9.$$

1. Démontrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
2. Démontrer que si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie.
3. Un étudiant affirme : " Donc P_n et Q_n sont vraies pour tout entier naturel n ". Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4. Démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
5. Démontrer que Q_n est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Solution Exercice 8

1. P_{n+1} : $10^{n+1}-1 = 10(10^n)-1 = 10(9k+1)-1 = 9(10k)+9 = 9(10k+1) = 9k'$ car par hypothèse P_n : 10^n-1 est divisible par 9 i.e $10^n-1 = 9k, k \in \mathbb{N}$.

2. Q_{n+1} : $10^{n+1}+1 = 10(10^n)+1 = 10(9k-1)+1 = 9(10k)-9 = 9(10k-1) = 9k''$ car par hypothèse Q_n : 10^n+1 est divisible par 9 i.e $10^n+1 = 9k, k \in \mathbb{N}$.

3. On voit que 2,11,101,1001,...ne sont pas divisibles par 9. Donc pour $n=0$, la première hypothèse de la démonstration par recurrence pour dire que Q_n est vraie n'est pas vérifiée. C'est l'erreur commise par l'étudiant.

4. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
Pour $n=0$, P_0 : $10^0-1 = 1-1 = 0$ est divisible par 9. D'après la question 1, P_n est vraie pour tout entier naturel n.

5. Montrons que Q_n est fausse pour tout entier naturel n. Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe au moins $k \in \mathbb{N}$ tel que Q_k est vraie et on montre que Q_{k-1} est vraie. De là on peut déduire que pour tout $n < k, Q_n$ est vraie ce qui est absurde (en particulier pour $n=0$).

Exercice 9 : Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant 2 paires de chaussettes.

Solution Exercice 9

On va procèder par l'absurde. Supposons que nous rangeons $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts et que chaque tiroir contient au moins 3 paires de chaussettes ou bien au plus une paire de chaussette.

On distingue deux cas :

1. Si chaque tiroir contient une paire, donc pour n tiroir on obtiendra n paires de chaussettes contradiction avec l'hypothèse de départ.

2. Si chaque tiroir contient au mois 3 paires i.e nombre de paires $\geqslant 3$. Si on montre que c'est absurde pour le cas =3, sa sera de même pour les cas > 3.
Si le nombre de paires =3, donc dans chaque tiroir en mettra 3 paires ce qui nous donne à la fin $3n$ paires dans n tiroirs ce qui est absurde.

Exercice 10 : Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1,3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.

Solution Exercice 10
1. La contraposée est :

Si l'entier n est impair, alors l'entier $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

2. Admettons qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.
Prouvons la contraposée.
Calculons $n^2 - 1 = (4k + r)^2 - 1 = 16k^2 + 8kr + r^2 - 1 = 8(2k^2 + kr) + r^2 - 1$.
Puisque $r \in \{1, 3\}$ alors on distingue deux cas possibles :
i. Si $r = 1$ alors $n^2 - 1 = 8k'$ avec $k' = 2k^2 + k$.
ii. Si $r = 3$ alors $n^2 - 1 = 8k'$ avec $k' = 2k^2 + 3k + 1$.
Donc, dans les deux cas on a $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Pour prouver qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$, il suffit de remplacé le k par $2k$ et $2k + 1$ dans la formule connue d'un entier impair $n = 2k + 1$.

Exercice 11 : Montrer par l'absurde que

$$\forall a, b \geqslant 0 : \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$

Solution Exercice 11
Par l'absurde : Soient $a, b \geqslant 0$. Supposons que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a(a+1) = b(b+1) \Rightarrow a^2 - b^2 = b - a \Rightarrow (a-b)(a+b) = b - a.$$

Puisque $a \neq b$ alors on peut diviser par $a - b \neq 0$.
On aboutit à : $a + b = -1$ contradition avec le faite que $a, b \geqslant 0$. D'où le résultat.

Année Universitaire 2018-2019

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 2 : Ensembles et Applications

Exercice 1 :
Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B, A \cup B, A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$.
1. $E = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 4\}$.
2. $E = \mathbb{R}, A =]-\infty; 2], B = [3; +\infty[$.
3. $E = \mathbb{R}, A = \mathbb{N}, B =]0; +\infty[$.

Exercice 2 :
Soit A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes :
a. $C_A(C_A(X)) = X$.
b. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.
c. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Exercice 3 :
Soient A et B deux ensembles.
1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Y a-t-il égalité ?

Exercice 4 :
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B par :
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$
a. Que valent $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$?
b. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
c. Montrer que $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
d. Montrer que $(A \Delta B) \Delta B = A$.

Exercice 5 :
Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :

$$\begin{array}{cc} 1) A \subset f^{-1}(f(A)) & 2) f(f^{-1}(B)) \subset B \\ 3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') & 4)\ f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \\ 5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') & 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \end{array}$$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Exercice 6 :
Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?
1. f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$.
2. g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(x) = 2x + 1$.
3. h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $h(x) = |x| - [x]$.
4. u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 7 :
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
a. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
b. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
Exercice 8 :
Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\dfrac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
a. Montrer que f est injective.
b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$.
c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver f^{-1}.

Année Universitaire 2018-2019

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Corrigé de la fiche de TD 2 : Ensembles et Applications

Exercice 1 :
Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B, A \cup B, A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$.
1. $E = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 4\}$.
2. $E = \mathbb{R}, A =]-\infty; 2], B = [3; +\infty[$.
3. $E = \mathbb{R}, A = \mathbb{N}, B =]0; +\infty[$.

Solution Exercice 1
1. $A \cap B = \{2\}; A \cup B = \{1, 2, 4\}; A \cap \overline{B} = \{1\}; \overline{A} \cap B = \{4\}$.
2. $A \cap B = \emptyset; A \cup B =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[; A \cap \overline{B} = A; \overline{A} \cap B = B$.
3. $A \cap B = \mathbb{N}^*; A \cup B = [0; +\infty[; A \cap \overline{B} = \{0\}; \overline{A} \cap B = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

Exercice 2 :
Soit A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes :
a. $C_A(C_A(X)) = X$.
b. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.
c. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Solution Exercice 2
a. Montrons que $C_A(C_A(X)) = X$.
i). Montrons que $C_A(C_A(X)) \subset X$. Soit $x \in C_A(C_A(X))$. Cela veut dire que $x \notin C_A(X)$, c'est à dire que $x \in X$. Donc $C_A(C_A(X)) \subset X$.
ii). Montrons que $X \subset C_A(C_A(X))$. Soit $x \in X$. Ceci implique que $x \notin C_A(X)$. Donc $x \in C_A(C_A(X))$. D'aprés i) et ii), on a montrer l'égalité.
b. Soit $x \in C_A(X \cup Y)$. Ceci entraine que $x \notin X \cup Y$. Celà veut dire que $x \notin X$ et $x \notin Y$. Donc $x \in C_A(X)$ et $x \in C_A(Y) \Rightarrow x \in C_A(X) \cap C_A(Y)$. L'implication dans le sens inverse ainsi que $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$ se démontre de la même manière.
c. Soit $x \in C_A(Y)$, ce qui implique que $x \notin Y$ et $x \notin X$ car $X \subset Y$ par hypothèse. Donc $x \in C_A(X)$. L'implication dans le sens inverse ce démontre de la même manière.

Exercice 3 :
Soient A et B deux ensembles.
1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Y a-t-il égalité ?

Solution Exercice 3
1. Montrons que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Soit $E \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow E \subset A \cap B \Leftrightarrow E \subset A$ et $E \subset B \Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A)$ et $E \in \mathcal{P}(B)$. $\Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Montrons que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
Soit $E \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A)$ ou $E \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \subset A$ ou $E \subset B$. Ceci implique que $E \subset A \cup B \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A \cup B)$.
En générale, on a pas égalité dans 2). Il suffit de prendre $A = \{1, 3\}$ et $B = \{2\}$.

Exercice 4 :
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

a. Que valent $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$?
b. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
c. Montrer que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
d. Montrer que $(A\Delta B)\Delta B = A$.

Solution Exercice 4
a. $A\Delta A = \emptyset$ et $A\Delta\emptyset = A$.
b. Montrons que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Donc $x \in A\Delta B$ si et seulement si ou bien $x \in A$ ou bien $x \in B$ (le ou exclusif). Alors on a $A\Delta B = \{x \in A \text{ ou bien } x \in B\}$.

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \vee x \notin A)\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)\}.$$

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\}.$$

c. Montrons que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \vee x \in B) \text{ et } (x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B})\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \text{ ou } (x \in \overline{A} \wedge x \in B)\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cap \overline{B} \text{ ou } x \in \overline{A} \cap B\}.$$

$$A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

d. Montrons que $(A\Delta B)\Delta B = A$. Pour celà, calculons $(A\Delta B)\Delta C$.

$$(A\Delta B)\Delta C = [\overline{(A\Delta B)} \cap C] \cup [(A\Delta B) \cap \overline{C}].$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [\overline{(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})} \cap C] \cup [((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \cap \overline{C}].$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [\overline{(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}} \cap C] \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)) \cap C] \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

$$(A\Delta B)\Delta C = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

Maintenant, si $C = B$, on obtient :

$$(A\Delta B)\Delta B = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap B) \cup (A \cap B \cap B) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{B}).$$

$$(A\Delta B)\Delta B = \emptyset \cup (A \cap B) \cup \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A.$$

Exercice 5 :
Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :

$$\begin{array}{cc} 1) A \subset f^{-1}(f(A)) & 2) f(f^{-1}(B)) \subset B \\ 3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') & 4)\ f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \\ 5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') & 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \end{array}$$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Solution Exercice 5
1. Soit $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ par définition de $f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y = f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in B$.
3. "$\subset$" : Soit $y \in f(A \cup A') \Rightarrow \exists x \in A \cup A' : y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A$ ou $\exists x \in A' : y = f(x)$.
$(\exists x \in A : y = f(x))$ ou $(\exists x \in A' : y = f(x)) \Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(A') \Rightarrow y \in f(A) \cup f(A')$.
"$\subset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.
4. Soit $y \in f(A \cap A') \Rightarrow \exists x \in A \cap A' : y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A : y = f(x)$ et $\exists x \in A' : y = f(x)$.
$\Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(A') \Rightarrow y \in f(A) \cap f(A')$.
5. "$\subset$" : Soit $x \in f^{-1}(B \cup B') \Rightarrow f(x) \in B \cup B' \Rightarrow f(x) \in B$ ou $f(x) \in B'$.
$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B') \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
"$\subset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.
6. "$\subset$" : Soit $x \in f^{-1}(B \cap B') \Rightarrow f(x) \in B \cap B' \Rightarrow f(x) \in B$ et $f(x) \in B'$.
$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B') \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
"$\subset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.
Montrons que si f est injective alors on a égalité dans 4). En effet :
Soit $y \in f(A) \cap f(A') \Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(A') \Rightarrow (\exists x_1 \in A : y = f(x_1))$ et $(\exists x_2 \in A' : y = f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car f est injective. Donc $\exists x = x_1 = x_2 \in A \cap A' : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \cap A')$.

Exercice 6 :
Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?
1. f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$.
2. g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(x) = 2x + 1$.
3. h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $h(x) = |x| - [x]$.
4. u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

Solution Exercice 6
1. f est injective et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans $\mathbb{N}$.
2. g est injective et non surjective car les nombres pairs n'ont pas d'antécédents dans $\mathbb{N}$.
3. h est non injective car $h(5) = h(6)$ mais $5 \neq 6$, et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans $\mathbb{Z}$.
4. u est injective et surjective donc bijective.

Exercice 7 :
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
a. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
b. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Solution Exercice 7
a. Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ $\Rightarrow x_1 = x_2$ car $g \circ f$ est injective.
b. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective i.e

$$\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y).$$

$g \circ f$ est surjective i.e

$$\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x).$$

Posons $y = f(x)$, alors $z = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y)$. Donc g est surjerctive.

Exercice 8 :
Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\dfrac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
a. Montrer que f est injective.
b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$.
c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver f^{-1}.

Solution Exercice 8
1. Pour a non nul, on a $h(a) = \dfrac{4a}{a^2+1}$, et de même on trouve que $h(\dfrac{1}{a}) = \dfrac{4a}{a^2+1}$. Donc l'application h n'est pas injective car par exemple $h(2) = h(\dfrac{1}{2})$ mais $2 \neq \dfrac{1}{2}$.
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
a. Montrons que f est injective : Soient $x_1, x_2 \in I$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2^2+1}.$$

Après un simple calcul on trouve :

$$(x_2 - x_1)[x_1x_2 - 1] = 0,$$

ce qui implique que $x_1 = x_2$ ou bien $x_1 = \dfrac{1}{x_2} \notin I \Rightarrow x_1 = x_2$.
b. Vérifions que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$. Il suffit de montrer que $f(x) - 2 \leqslant 0$. En effet :

$$f(x) - 2 = \frac{4x}{x^2+1} - 2 = \frac{4x - 2x^2 - 2}{x^2+1} = \frac{-2(x-1)^2}{x^2+1} \leqslant 0.$$

(Suite et fin Solution Exercice 8)

c. Montrons que f est une bijection de I sur $]0,2]$. Il suffit de résoudre l'équation $y = f(x)$, et de trouver un unique x en fonction de y.

$$y = \frac{4x}{x^2+1} \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0.$$

$\Delta = 4(4-y^2) \geqslant 0$ car $y \in]0,2] \Rightarrow x_1 = \dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}, x_2 = \dfrac{2-\sqrt{4-y^2}}{y}$.

On remarque que $x_1 > 0$ et $x_1.x_2 = 1$ ce qui implique que $x_2 > 0$. Cherchons lequel des deux n'appartient pas à I.

$x_1 - 1 = \dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} - 1 = \dfrac{2-y+\sqrt{4-y^2}}{y} \geqslant 0 \Rightarrow x_1 \in I$.

Par l'absurde, on suppose que $x_2 \in I$ et on aboutit à une contradiction qui va nous permettre de dire que $x_2 \notin I$.

Conclusion : f est une bijection et f^{-1} définie de $]0,2]$ sur I :

$$x = f^{-1}(y) = \frac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}.$$

Année Universitaire 2018-2019

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 3 : Relations binaires

Exercice 1 :
Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 2 :
Soit E un ensemble et $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ une partition de E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x, y) \in E^2$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, ..., n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 3 :
Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants, deux minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$.
3. La partie A possède t-elle un plus grand élément et un plus petit élément ?

Exercice 4 :
On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a \leqslant b + 1.$$

1. Vérifier que $0\mathcal{S}1$ et $1\mathcal{S}0$. Donner une conclusion.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b + 1.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

Année Universitaire 2018-2019

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Corrigé de la fiche de TD 3 : Relations binaires

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Solution Exercice 1

1. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence il faut qu'elle soit : réflexive, symétrique et transitive. La réflexivité est obtenue en remplçant y par x. En effet :
$x\mathcal{R}x \Rightarrow x^2 - x^2 = x - x \Rightarrow 0 = 0$, c'est une propriété qui est vraie donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Prenons $x, y \in \mathbb{R}$ et montrons que si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. C'est la symétrie. Chose qui est évident car si on multiplie la quantité $x^2 - y^2 = x - y$ par -1, on obtiendra $y^2 - x^2 = y - x$, ce qui implique que $y\mathcal{R}x$.
Maintenant, on prend $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$. On aura deux équations $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$. En faisant l'addition on obtient que $x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow x\mathcal{R}z$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.
Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. $cl(x) = \{y \in \mathbb{R}/x\mathcal{R}y\}$. Soit $y \in cl(x)$ alors on a :

$$x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow (x - y)(x + y) - (x - y) = 0.$$

$$(x - y)[x + y - 1] = 0 \Rightarrow y = x \vee y = 1 - x.$$

$$\Rightarrow cl(x) = \{x, 1 - x\}.$$

3. L'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} cl(x) = \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit E un ensemble et $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ une partition de E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x, y) \in E^2$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, ..., n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$.

Solution Exercice 2

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

a. $\mathcal{R}$ est une relation réflexive : En effet,

$$x\mathcal{R}x \Rightarrow \exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } x \in X_i).$$

b. $\mathcal{R}$ est une relation symétrique car :

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (y \in X_i \text{ et } x \in X_i).$$

$$\Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

c. $\mathcal{R}$ est une relation transitive : Soit $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$:

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists i_1 \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_{i_1} \text{ et } y \in X_{i_1}) \\ y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists i_2 \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (y \in X_{i_2} \text{ et } z \in X_{i_2}) \end{cases}$$

On remarque que le y est à la fois dans X_{i_1} et X_{i_2} chose qui n'est pas vraie car les X_i forment une partition de E. Donc forcèment $X_{i_1} = X_{i_2}$ ce qui implique que $i_1 = i_2$. Finalement, on a $\exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } z \in X_i) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2. $cl(x) = \{y \in E / x\mathcal{R}y\} = X_i$.

Exercice 3 :

Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants, deux minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{(1,2),(3,1)\}$.
3. La partie A possède t-elle un plus grand élément et un plus petit élément ?

Solution Exercice 3

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre :

– $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow (x \leqslant x \text{ et } y \leqslant y)$.

– $\mathcal{R}$ est anti-symétrique :$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y') \\ (x',y')\mathcal{R}(x,y) \Rightarrow (x' \leqslant x \text{ et } y' \leqslant y) \end{cases} \Rightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

– $\mathcal{R}$ est transitive :$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y') \\ (x',y')\mathcal{R}(x'',y'') \Rightarrow (x' \leqslant x'' \text{ et } y' \leqslant y'') \end{cases} \Rightarrow x \leqslant x'' \text{ et } y \leqslant y'' \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'').$$

L'ordre n'est pas total car par exemple $(0,1)$ n'est pas en relation avec $(1,0)$ et inversement.

2. Soit $A = \{(1,2),(3,1)\}$.
(m_1, m_2) un minorant de A si $\forall (x,y) \in A : (m_1,m_2)\mathcal{R}(x,y)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \leqslant 1 \wedge m_1 \leqslant 3 \\ m_2 \leqslant 2 \wedge m_2 \leqslant 1 \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des minorants $\mathcal{N} = \{(m_1,m_2) \in \mathbb{R}^2 / m_1 \leqslant 1 \wedge m_2 \leqslant 1\}$.
(M_1, M_2) un majorant de A si $\forall (x,y) \in A : (x,y)\mathcal{R}(M_1,M_2)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 \geqslant 1 \wedge M_1 \geqslant 3 \\ M_2 \geqslant 2 \wedge M_2 \geqslant 1 \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des majorants $\mathcal{M} = \{(M_1,M_2) \in \mathbb{R}^2 / M_1 \geqslant 3 \wedge M_2 \geqslant 2\}$.
Conclusion : $SupA = (3,2)$ et $InfA = (1,1)$.
3. La partie A ne possède ni plus petit élément ni plus grand élément.

Exercice 4 :
On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a \leqslant b+1.$$

1. Vérifier que $0\mathcal{S}1$ et $1\mathcal{S}0$. Donner une conclusion.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b+1.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

Solution Exercice 4
1. On peut vérifier facilement que $0\mathcal{S}1$ et $1\mathcal{S}0$ mais $0 \neq 1$ ce qui implique que $\mathcal{S}$ n'est pas anti-symétrique.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$:
a. La réflexivité : soit $a \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}a \Rightarrow a < a+1$ une proposition qui est vraie.
b. L'anti-symétrie : soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{cases} a\mathcal{R}b \Rightarrow a < b+1 \Rightarrow a \leqslant b \\ b\mathcal{R}a \Rightarrow b < a+1 \Rightarrow b \leqslant a \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

c. La transitivité : soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{cases} a\mathcal{R}b \Rightarrow a < b+1 \Rightarrow a \leqslant b \\ b\mathcal{R}c \Rightarrow b < c+1 \Rightarrow b \leqslant c \end{cases} \Rightarrow a \leqslant c \Rightarrow a < c+1 \Rightarrow a\mathcal{R}c.$$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 4 : Structures Algèbriques

Exercice 1 :
Soit $(G, \star)$ un groupe qui admet e comme élément neutre.
I. Montrer que :

1. $\forall a \in G : a \star x = a \Leftrightarrow x = e$.
2. $\forall a \in G : x \star a = a \Leftrightarrow x = e$.

II. Trouver tout les éléments x de G qui satisfait la relation $x \star x = x$.

Exercice 2 :
On définit dans l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, la loi $\bigstar$ comme suit :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\} : a \bigstar b = a + b + 2ab.$$

Montrer que $(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, \bigstar)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 :
Soit $(G, .)$ un groupe. On appelle le centre de G l'ensemble

$$C = \{c \in G / x.c = c.x, \forall x \in G\}.$$

Montrer que C est un sous-groupe de G.

Exercice 4 :
Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe surjectif.
Montrer que si $(G_1, .)$ est commutatif alors $(G_2, .)$ est commutatif.

Exercice 5 :
Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on définit les deux lois suivantes : $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{x \dot{+} y} \\ \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{x \dot{\times} y} \end{cases}$$

1. Tracer les tableaux de $\dot{+}$ et $\dot{\times}$.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif.

Année Universitaire 2018-2019

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Corrigé de la fiche de TD 4 : Structures Algèbriques

Exercice 1 :

Soit $(G, \star)$ un groupe qui admet e comme élément neutre.

I. Montrer que :

1. $\forall a \in G : a \star x = a \Leftrightarrow x = e$.
2. $\forall a \in G : x \star a = a \Leftrightarrow x = e$.

II. Trouver tout les éléments x de G qui satisfait la relation $x \star x = x$.

Correction Exercice 1

I. Soit $(G, \star)$ un groupe qui admet e comme élément neutre.

a. " $\Rightarrow$ " : Soit $a \in G : a \star x = a$. Puisque G est un groupe alors pour tout a dans G il existe son symétrique a' tel que $a' \star a = e$. Alors

$$a \star x = a \Rightarrow a' \star a \star x = a' \star a.$$

$$\Rightarrow x = e.$$

" $\Leftarrow$ " : Soit $x = e$. Alors

$$\forall a \in G : a \star x = a \star e = a.$$

b. De même pour $\forall a \in G : x \star a = a \Leftrightarrow x = e$, il suffit de reprendre la même démonstration.

II. Le seul x qui satisfait la relation $x \star x = x$ est $x = e$.

Exercice 2 :

On définit dans l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, la loi $\bigstar$ comme suit :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\} : a \bigstar b = a + b + 2ab.$$

Montrer que $\left(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, \bigstar\right)$ est un groupe abélien.

Correction Exercice 2

Montrer que $\left(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, \bigstar\right)$ est un groupe abélien.

1. $\bigstar$ est associative :

Prenons $a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$:

$$a \bigstar (b \bigstar c) = a \bigstar (b + c + 2bc) = a + b + c + 2bc + 2a(b + c + 2bc).$$

$$(a \bigstar b) \bigstar c = (a + b + 2ab) \bigstar c = a + b + 2ab + c + 2c(a + b + 2ab).$$

Donc $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\} : a \bigstar (b \bigstar c) = (a \bigstar b) \bigstar c \Rightarrow \bigstar$ est associative.

2. L'élément neutre pour $\bigstar$:
Il suffit de résoudre $a\bigstar x = a \Rightarrow a + x + 2ax = a \Rightarrow x(1+2a) = 0 \Rightarrow x = 0$, car $a \neq -\dfrac{1}{2}$.
Donc $e = 0$ est l'élément neutre.
3. Tout élément a de $\mathbb{Q} \setminus \{-\dfrac{1}{2}\}$ admet un symétrique a' :
a' satisfait $a\bigstar a' = e \Rightarrow a + a' + 2aa' = 0 \Rightarrow a'(1+2a) = -a \Rightarrow a' = \dfrac{-a}{1+2a}$.
En plus , $\bigstar$ est commutative car :

$$a\bigstar b = a + b + 2ab = b + a + 2ba = b\bigstar a.$$

Conclusion : $(\mathbb{Q} \setminus \{-\dfrac{1}{2}\}, \bigstar)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 :
Soit $(G, .)$ un groupe. On appelle le centre de G l'ensemble

$$C = \{c \in G / x.c = c.x, \forall x \in G\}.$$

Montrer que C est un sous-groupe de G.

Correction Exercice 3
1. $e \in G$ vérifie $\forall x \in G : x.e = e.x \Rightarrow e \in C \Rightarrow C \neq \emptyset$.
2. Soient $c_1, c_2 \in C$. Montrons que $c_1.c_2 \in C$ i.e $(c_1.c_2).x = x.(c_1.c_2), \forall x \in G$.

$$\begin{aligned}(c_1.c_2).x &= c_1.(c_2.x)\\ &= c_1.(x.c_2)\\ &= (c_1.x).c_2\\ &= (x.c_1).c_2\\ &= x.(c_1.c_2)\end{aligned}$$

Donc x commute avec $c_1.c_2 \Rightarrow c_1.c_2 \in C$.
3. Soit $c \in C$. Montrons que $c^{-1} \in C$.

$$\begin{aligned}c.x = x.c &\Rightarrow c^{-1}.c.x = c^{-1}.x.c\\ &\Rightarrow x = c^{-1}.x.c\\ &\Rightarrow x.c^{-1} = c^{-1}.x\end{aligned}$$

Donc x commute avec $c^{-1} \Rightarrow c^{-1} \in C$.
Conclusion : C est un sous-groupe de G.

Exercice 4 :
Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe surjectif.
Montrer que si $(G_1, .)$ est commutatif alors $(G_2, .)$ est commutatif.

Solution Exercice 4
Il suffit de montrer que :
$$\forall y_1, y_2 \in G_2 : y_1.y_2 = y_2.y_1.$$
Puisque f est surjective alors $\forall y_1, y_2 \in G_2, \exists x_1, x_2 \in G_1$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. $y_1.y_2 = f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2)$ car f est morphisme. Le fait que G_1 est commutatif alors $\forall x_1 x_2 \in G_1 : x_1.x_2 = x_2.x_1$. Donc on a :
$$y_1.y_2 = f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2) = f(x_2.x_1) = f(x_2).f(x_1) = y_2.y_1.$$

Exercice 5 :
Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on définit les deux lois suivantes : $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$\begin{cases} \overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{x+y} \\ \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{x \times y} \end{cases}$$

1. Tracer les tableaux de $\dot{+}$ et $\dot{\times}$.
2. Montrer que $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ est un corps commutatif.

Correction Exercice 5
1. Les tableaux de $\dot{+}$ et $\dot{\times}$:

$\dot{+}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\dot{\times}$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

2. Montrons que $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ est un corps commutatif :
a. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+})$ est un groupe abélien car :
$\dot{+}$ est associative : $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$(\overline{x} \dot{+} \overline{y}) \dot{+} \overline{z} = (\overline{x+y}) \dot{+} \overline{z} = \overline{x+y+z} \text{ et } \overline{x} \dot{+} (\overline{y} \dot{+} \overline{z}) = \overline{x} \dot{+} (\overline{y+z}) = \overline{x+y+z}.$$
D'après le tableau de $\dot{+}$, on remarque que l'élément neutre est $e = 0$, et que pour chaque élément $\overline{x}$ de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, il existe un symétrique. Enfin, on peut vérifier facilement que $\dot{+}$ est commutative.
b. $\dot{\times}$ est associative car :
$\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$(\overline{x} \dot{\times} \overline{y}) \dot{\times} \overline{z} = (\overline{x \times y}) \dot{\times} \overline{z} = \overline{x \times y \times z} \text{ et } \overline{x} \dot{\times} (\overline{y} \dot{\times} \overline{z}) = \overline{x} \dot{\times} (\overline{y \times z}) = \overline{x \times y \times z}.$$
c. $\dot{\times}$ est distributive par rapport à $\dot{+}$ car :
$\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$\overline{x} \dot{\times} (\overline{y} \dot{+} \overline{z}) = \overline{x} \dot{\times} (\overline{y+z}) = \overline{x \times (y+z)} = (\overline{x \times y}) \dot{+} (\overline{x \times z}) = (\overline{x} \dot{\times} \overline{y}) \dot{+} (\overline{x} \dot{\times} \overline{z}).$$
De la même manière on montre que : $(\overline{x} \dot{+} \overline{y}) \dot{\times} \overline{z} = (\overline{x} \dot{\times} \overline{z}) \dot{+} (\overline{y} \dot{\times} \overline{z}) \Rightarrow \left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ un anneau.
En plus, la loi $\dot{\times}$ admet un élément unité 1 ce qui implique que l'anneau est unitaire.
Or, chaque élément non nul, admet un inverse (voir tableau de $\dot{\times}$), alors $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ est un corps commuattif puisque $\dot{\times}$ est commutative.