Chapitre 4 : Problème de satisfaction de contraintes (CSP)

Définition
Formellement, un problème de satisfaction de contraintes (ou CSP pour Constraint Satisfaction Problem) est défini par: **CSP (X,D,C)**
–Un ensemble fini de variables X1, …, Xn.
– Chaque variable Xi a un domaine Di de valeurs possibles.
–Un ensemble fini de contraintes C1, …, Cm sur les variables.
•Une contrainte restreint les valeurs pour un sous-ensemble de variables.
•Un état (nœud) d'un problème CSP est défini par une assignation de valeurs {X1=v1,Xn=vn,…} à certaines variables ou à toutes les variables.

–Une solution à un problème CSP est une assignation complète et consistante.

–Une assignation qui ne viole aucune contrainte est dite consistante ou légale.

–Une assignation est complète si elle concerne toutes les variables.

Une contrainte est définie comme étant une égalité ou une inégalité que doivent satisfaire les solutions d'un problème. En général, cette contrainte réduit l'espace solution. Si cette contrainte n'est pas satisfiable, elle réduit l'espace solution à l'ensemble vide.

Les contraintes sont :

- Relationnelles (elles lient des variables à d'autres variables),
- Déclaratives (elles définissent le problème),
- Permutables (l'ordre des contraintes n'est pas significatif).

Les contraintes peuvent néanmoins être classées par leur arité (le nombre de variable qu'elles contraignent), par exemple :

- Unaire : porte sur une seule variable;
- Binaire : porte sur deux variables;
- I n-aire : porte sur n variables (contrainte globale).

Type
Les contraintes peuvent être de différents types (suivant le domaine dans lequel le problème est posé) :
I **numériques**
I expressions arithmétiques, I opérations =; 6=; <;_; >;_I dans les réels, les entiers I opérateurs +;-; _ ,etc.
I **booléennes**
I expressions booléennes I opérations équivalence, non équivalence, implication I opérateurs et, ou, non, etc.

Exemple : Colorier une carte , Carte des provinces de l'Australie.

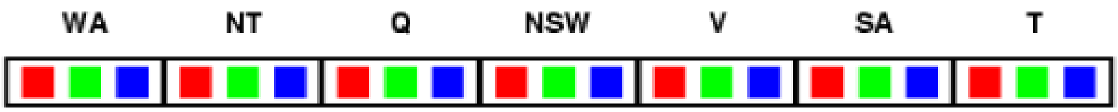
On vous demande d'utiliser seulement trois couleurs (***rouge***, ***vert*** et ***bleu***) de sorte que deux provinces frontalières n'aient jamais les mêmes couleurs.

•On peut trouver une solution à ce problème en le formulant comme un problème CSP :

Formulation du problème CSP : **CSP (X,D,C)**

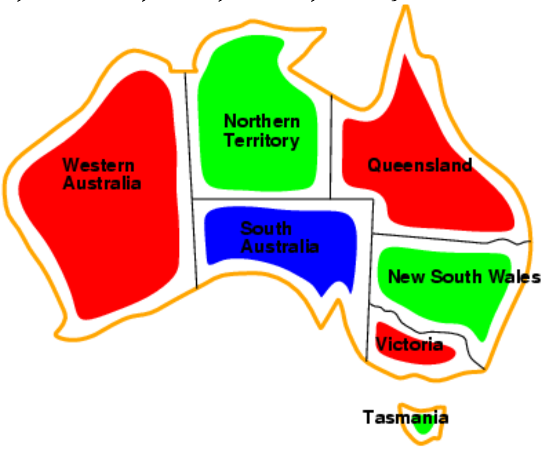
- X : Les **variables** sont les provinces : V = *{ WA, NT, Q, NSW, V, SA, T }*

- Le **domaine** de chaque variable est l'ensemble des trois couleurs : ***{R, G, B}***



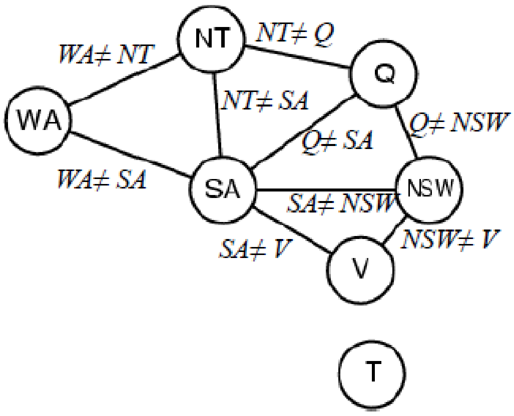
Contraintes binaires (concerne deux variables): *Les* provinces *frontalières doivent avoir des couleurs différentes :* **C={ WA≠ NT, …, NT≠ Q, … }**

Solution: { *WA=R, NT=G, Q= R, NSW=G, V=R, SA=B, T=G*}



•Pour des problèmes avec des **contraintes binaires** (c-à-d., qui implique seulement deux variables), on peut visualiser le problème CSP à l'aide d'un graphe de contraintes.

•Un graphe de contraintes est un graphe dont les nœuds sont des variables et les arêtes sont des contraintes entre les deux variables.



Types de problèmes CSP

•**CSP avec des domaines finis** (et discrets).

•**CSP Booléens**: les variables sont vraies ou fausses.

•**CSP avec des domaines continus** (et infinis)

–Par exemple, problèmes d'ordonnancement avec des contraintes sur les points (début/fin) dans le temps.

•CSP avec des **contraintes linéaires**.

•CSP avec des **contraintes non linéaires**.

•Les problèmes CSP sont également approfondies en **recherche opérationnelle**.

Applications

•Problèmes d'allocations des cours aux professeurs du DI :

–Chaque professeur dresse sa liste de préférences. La taille de la liste est d'au moins 3, 5 ou 7 choix s'il souhaite donner respectivement 1, 2 ou 3 cours durant une session.

–Un prof a priorité sur un cours s'il est le dernier à l'avoir donné, mais qu'il l'a donné moins de 3 fois consécutives.

–Pour chaque professeur, on lui accorde au moins l'un des deux premiers choix.