Université A. MIRA de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département d'informatique

$1^{ère}$ année Informatique Ingénieur
Année universitaire
2022 / 2023

Interrogation écrite n°2 du module Analyse 1

Exercice n°1 :

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \ln(x), \quad g(x) = \ln(x)(\ln(x) + 4x) + 4x^2.$$

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction f admet une unique racine c sur $]0, +\infty[$, tel que $e^{-1} < c < 1$. (**Utiliser** $e > \frac{5}{2}$.)
2. Montrer que c est aussi une racine unique de g sur $]0, +\infty[$.

Exercice n°2 :

On définit la fonction f sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ par : $f(x) = \frac{e^{\alpha x} - \alpha x - 1}{x \sin(x)}, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

1. Donner $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $]-\pi, \pi[$.
2. Le prolongement $\tilde{f}$ est-il dérivable ?
3. Pour quelle valeur de α, on a $\tilde{f}(0) = (\tilde{f})'(0)$. Où $(\tilde{f})'(0)$ désigne la dérivée de $\tilde{f}$ au point 0.

Exercice n°3 :

1. Monter que $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{\sin^2(\arctan x)} = \frac{x^2+1}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $\sin(\arctan x)$ selon $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Corrigé

Exercice 1

2 points/7,5

On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + \ln(x), \quad g(x) = \ln(x)(\ln(x) + 4x) + 4x^2.$$

1 En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que la fonction f admet une unique racine c sur $]0,+\infty[$, tel que $e^{-1} < c < 1$. (**Utiliser** $e > \frac{5}{2}$.)

0,25 pt La fonction f est la somme des fonctions continues sur $]0,+\infty[$, donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

De plus, on a

$$f(e^{-1}) = 2e^{-1} + \ln(e^{-1}) = \frac{2}{e} - 1,$$

donc

$$\begin{aligned} e > \frac{5}{2} &\Longrightarrow \frac{2}{e} < \frac{4}{5} \\ &\Longrightarrow \frac{2}{e} - 1 < \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} < 0, \end{aligned}$$

0,25 pt d'où

$$f(e^{-1}) < 0, \tag{1}$$

Et

$$f(1) = 2 \times 1 + \ln(1) = 2,$$

0,25 pt donc

$$f(1) > 0. \tag{2}$$

De (1) et (2) on a $f(1)f(e^{-1}) < 0$.

0,25 pt D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f admet au moins une racine c sur $]0,+\infty[$, tel que $e^{-1} < c < 1$.

0,25 pt D'autre part, la fonction f est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$ ($x \mapsto 2x$ et ln), donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

☛(On peut aussi étudier le signe de la dérivée.)

On déduit donc que, la fonction f admet une unique racine c sur $]0,+\infty[$, tel que $e^{-1} < c < 1$.

2 Montrer que c est aussi une racine unique de g sur $]0,+\infty[$.

☛Pour montrer que la même valeur c est une racine unique de g, il faut chercher une relation entre les deux fonctions f et g.

On remarque que $g(x)$ est une identité remarquable ;

0,25 pt
$$\begin{aligned} \forall x \in]0,+\infty[: g(x) &= \ln(x)(\ln(x) + 4x) + 4x^2 = (\ln(x))^2 + 2(2x)\ln(x) + (2x)^2 \\ &= (\ln(x) + 2x)^2 = (f(x))^2. \end{aligned}$$

0,25 pt Donc on a $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$,
et comme c est l'unique racine de f sur $]0, +\infty[$, alors aussi c est l'unique racine de g sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2

4 points/7,5

On définit la fonction f sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ par : $f(x) = \frac{e^{\alpha x}-\alpha x-1}{x\sin(x)}, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

1 Donner $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $]-\pi, \pi[$.

0,25 pt **1** La fonction f est la somme et le produit et la composition des fonctions continues sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, donc f est continue sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

2 La continuité au point $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-\alpha x-1}{x\sin(x)}, \text{ cas indéterminé.}$$

0,25 pt On a les deux fonction $x \mapsto e^{\alpha x} - \alpha x - 1$ et $x \mapsto x\sin(x)$ sont dérivables au voisinage de 0, et $\lim\limits_{x\to 0} e^{\alpha x} - \alpha x - 1 = \lim\limits_{x\to 0} x\sin(x) = 0$.

0,5 pt Donc on applique la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha e^{\alpha x} - \alpha}{\sin(x) + x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha^2 \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}}{\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)}. \quad (\alpha \neq 0)$$

Division de dénominateur et numérateur par x.

0,25 pt Par le changement de variable $X = \alpha x$ ($x \to 0 \implies X \to 0$), on obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x} = \lim_{X\to 0} \frac{e^{X}-1}{X} = 1,$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha e^{\alpha x} - \alpha}{\sin(x) + x\cos(x)} = \frac{\alpha^2 \times 1}{1 + \cos(0)} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

☛**On peut aussi appliquer la règle de l'Hôpitel une autre fois.**

0,25 pt Ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{\alpha^2}{2}$, d'où f est prolongeable par continuité,

0,25 pt tel que :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\\ \frac{\alpha^2}{2}, & si\ x = 0 \end{cases}$$

2 Le prolongement $\tilde{f}$ est-il dérivable ?

0,25 pt **1** La fonction f est la somme et le produit et la composition des fonctions dérivables sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, donc f est dérivables sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

0,25 pt **2** La dérivabilité au point $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\frac{\alpha^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{\alpha x}-\alpha x-1}{x\sin(x)}-\frac{\alpha^2}{2}}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\alpha x-1-\frac{\alpha^2}{2}x\sin(x)}{x^2\sin(x)}(\text{cas indéterminé.})$$

0,25 pt On pose les deux fonctions $u(x) = e^{\alpha x} - \alpha x - 1 - \frac{\alpha^2}{2}x\sin(x)$ et $v(x) = x^2\sin(x)$, qui sont dérivables au voisinage de 0, et

$$\lim_{x\to 0} u(x) = \lim_{x\to 0} e^{\alpha x} - \alpha x - 1 - \frac{\alpha^2}{2}x\sin(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} v(x) = \lim_{x\to 0} x^2\sin(x) = 0.$$

0,25 pt On applique la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\sin(x)-\frac{\alpha^2}{2}x\cos(x)}{x^2\cos(x)+2x\sin(x)},\text{ cas indéterminé.}$$

0,5 pt Les deux fonctions u et v sont deux fois dérivables au voisinage de 0, donc on applique une deuxième fois la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{u''(x)}{v''(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^2 e^{\alpha x}-\frac{\alpha^2}{2}\cos(x)-\frac{\alpha^2}{2}\cos(x)+\frac{\alpha^2}{2}x\sin(x)}{2x\cos(x)-x^2\sin(x)+2\sin(x)+2x\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^2(e^{\alpha x}-1)-\alpha^2(\cos(x)-1)+\frac{\alpha^2}{2}x\sin(x)}{4x\cos(x)+2\sin(x)-x^2\sin(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^3\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}-\alpha^2\frac{\cos(x)-1}{x}+\frac{\alpha^2}{2}\sin(x)}{4\cos(x)+2\frac{\sin(x)}{x}-x\sin(x)},\quad \alpha\neq 0$$

Division de dénominateur et numérateur par x.

0,25 pt On sais que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

0,25 pt Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{u''(x)}{v''(x)} = \frac{\alpha^3\times 1-\alpha^2\times 0+\frac{\alpha^2}{2}\sin(0)}{4\cos(0)+2\times 1-0\sin(0)} = \frac{\alpha^3}{6} \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \frac{\alpha^3}{6}.$$

☛**On peut aussi appliquer la règle de l'Hôpitel une autre fois.**
D'où $\tilde{f}$ est dérivable au point $x_0 = 0$, telle que $(\tilde{f})'(0) = \frac{\alpha^3}{6}$. On déduit donc que $\tilde{f}$ est dérivable sur $]-\pi,\pi[$.

0,25 pt **3** Pour quelle valeur de α, on a $\tilde{f}(0) = (\tilde{f})'(0)$. Où $(\tilde{f})'(0)$ désigne la dérivée de $\tilde{f}$ au point 0.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(0) = (\tilde{f})'(0) &\implies \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^3}{6}\\ &\implies \alpha^2(\alpha-3) = 0\\ &\implies \alpha = 3,\ \text{car } \alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Exercice 3

1,5 point/7,5

1 Monter que $\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{\sin^2(\arctan x)} = \frac{x^2+1}{x^2}$.

0,5 pt On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{\sin^2(\arctan x)} &= \frac{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}{\sin^2(\arctan x)}\\ &= \frac{\sin^2(\arctan(x))}{\sin^2(\arctan x)} + \frac{\cos^2(\arctan(x))}{\sin^2(\arctan x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(\arctan(x))}\\ &= 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}.\end{aligned}$$

2 Étudier le signe de $\sin(\arctan x)$ selon $x \in \mathbb{R}$.

☛**Rappel :** $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\begin{cases}\arctan(x) \leqslant 0, & \text{si } x \leqslant 0\\ \arctan(x) > 0, & \text{si } x > 0\end{cases}$ et $\begin{cases}\sin(x) \leqslant 0, & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]\\ \sin(x) > 0, & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$

0,5 pt Donc

$$\forall x \leqslant 0 : -\frac{\pi}{2} < \arctan(x) \leqslant 0 \implies \sin(\arctan(x)) \leqslant 0$$
$$\forall x > 0 : 0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{2} \implies \sin(\arctan(x)) > 0.$$

3 En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

0,5 pt On a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{\sin^2(\arctan x)} = \frac{x^2+1}{x^2} &\implies \sin^2(\arctan x) = \frac{x^2}{x^2+1}\\ &\implies |\sin(\arctan x)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\\ &\implies \begin{cases}-\sin(\arctan x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}, & \text{si } x < 0\\ \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, & \text{si } x > 0\end{cases}\\ &\implies \begin{cases}\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, & \text{si } x < 0\\ \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, & \text{si } x > 0\end{cases}\\ &\implies \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

La formule est vérifier pour $x = 0$, $(\sin(\arctan 0) = 0)$
Donc on déduit que $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.