Logique Mathématique

① Montrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N} : 1+4+7+10+\cdots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

Solution :

Posons $P(n) = \left(1+4+7+10+\cdots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}\right)$

Pour $n=1$, $P(1)$ est vérifiée car :

$$\boxed{3-2=1=\frac{1(3(1)-1)}{2}}$$

Hypothèse de récurrence

Supposons que la propriété $P(k)$ est vraie à l'ordre $k>1$ c'est-à-dire

$P(k) : \left(1+4+7+10+\cdots+(3n-2) = \dfrac{k(3k-1)}{2}\right)$

est vraie.

Montrons par la suite que $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire

$$\boxed{1+4+7+10+\cdots+(3k-2)+(3(k+1)-2) = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}}$$

Comme $P(k)$ est vraie, alors

$P(k+1) \Leftrightarrow P(k) + (3(k+1)-2)$

donc $P(k+1) \Leftrightarrow \dfrac{k(3k-1)}{2} + 3(k+1)-2$

$\underline{\text{or}}$ $\dfrac{k(3k-1)}{2} + 3(k+1)-2 = \dfrac{k(3k-1)}{2} + \dfrac{6(k+1)-4}{2}$

$= \dfrac{3k^2-k+6k+6-4}{2} = \boxed{\dfrac{3k^2+5k+2}{2}}$ ①

$\underline{\text{on a aussi}}$ $\dfrac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} = \dfrac{(k+1)(3k+2)}{2}$

$= \dfrac{3k^2+3k+2k+2}{2} = \boxed{\dfrac{3k^2+5k+2}{2}}$ ②

Comme ① = ② $\forall k > 1$, alors $p(k+1)$ est vraie. Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $p(n)$ est vraie.

$\underline{\text{Remarque}}$: on peut developper le polynôme $\boxed{3k^2+5k+2}$ en posant $3k^2+5k+2=0$, donc

$\Delta = 5^2-4(3)(2) = 25-24 = 1 > 0$, alors

$k_1 = \dfrac{-5+1}{6} = \dfrac{-2}{3}$ et $k_2 = \dfrac{-5-1}{6} = \dfrac{-6}{6} = \boxed{-1}$

finalement on trouve

$3k^2+5k+2 = (k+1)(k+2/3) = (k+1)(3k+2)$

donc $\dfrac{3k^2+5k+2}{2} = \dfrac{(k+1)(3k+2)}{2}$

$= \dfrac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$.

2) Montrer par récurrence que :

Solution $\forall n \geq 2 : 2^n > 1+n$

Notons par $P(n)$ la propriété $\forall n \geq 2 : 2^n > 1+n$

Pour $n=2$, on a : $(2^2 = 4) > (1+2=3)$, donc $P(2)$ est Vraie

Hypothèse de récurrence

Supposons que $P(k)$ est vraie $\forall k > 2$ et

Montrons que $P(k+1)$ reste vraie.

c'est-à-dire $2^{k+1} > 1+(k+1)$

Comme $\underbrace{P(k) \text{ est vraie}}_{\text{hypothèse de récurrence}}$, alors $\boxed{2^k > 1+k}$ *

si on va multiplier les deux membres de *

par 2, on obtient

$$2 \cdot 2^k > 2(1+k) \Rightarrow 2^{k+1} > 2+2k$$

or $2+2k > (2+k = 1+(k+1))$, donc

$\boxed{2^{k+1} > 1+(k+1)}$, alors $P(k+1)$ est vraie

et par récurrence on a $\boxed{\forall n \geq 2 : 2^n > 1+n}$.

③ Montrer par récurrence que
$\forall n \in \mathbb{N}$: 4 divise $5^n - 1$

<u>Solution</u>

Notons par $P(n)$ la propriété $\boxed{4 \text{ divise } 5^n - 1, \text{ avec } n \in \mathbb{N}}$

* 4 divise $5^n - 1$ signifie qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ /
$\boxed{5^n - 1 = 4 \cdot m}$

pour $n = 1$, $5^1 - 1 = 4$. Comme 4 divise 4, alors la propriété $P(1)$ est vraie.

<u>hypothèse de récurrence</u>

supposons que $P(k)$ est vraie pour $k > 1$
$\left(5^k - 1 = 4 \cdot m \text{ avec } m \in \mathbb{N}\right)$ et montrons que $P(k+1)$ est vraie
$\left(\exists m' \in \mathbb{N} \mid 5^{k+1} - 1 = 4m'\right)$

comme $5^k - 1 = 4m$ (hypothèse de récurrence);

alors $5^k = 4m + 1 \Rightarrow 5 \cdot 5^k = 5(4m+1)$

$\Rightarrow 5^{k+1} = 20m + 5 \Rightarrow 5^{k+1} - 1 = 20m + 4$

$\Rightarrow 5^{k+1} - 1 = 4(5m+1) = 4(m' = 5m+1)$

Donc $\exists m' \in \mathbb{N} \; (m' = 5m+1) \mid 5^{k+1} - 1 = 4m'$,
alors $P(k+1)$ est vraie et par récurrence on a

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 5^n - 1 \text{ divise } 4}$

(11) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} 2^{i} = 2^{n+1} - 1$$

c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

<u>Solution</u> $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} + 1$

Notons par $p(n)$ la propriété $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, $n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$, on a $\boxed{1 = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1}$, donc $p(0)$ est vraie

<u>Hypothèse de récurrence</u>

Supposons que $p(k)$ est vraie, pour $k > 0$

$\left(\sum_{i=1}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1 \right)$ et montrons que

$p(k+1)$ est vraie $\left(\sum_{i=1}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1 \right)$

on a $$\sum_{i=1}^{k+1} 2^i = \underbrace{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k}_{2^{k+1} - 1} + 2^{k+1}$$ Hypothèse de récurrence

$$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1$$

$$= 2(2^{k+1}) - 1 = 2^{(k+1)+1} - 1$$, donc

$p(k+1)$ est vraie et par récurrence on a, alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : 2^{n+1} - 1 = \sum_{i=1}^{n} 2^i}$$

5 Montrer par l'absurde que pour $0 < x < 1$, on a $\frac{1}{x(1-x)} \geq 4$

Solution

Supposons le contraire

c'est-à-dire $\exists x \left(0 < x < 1 \right) /$

$$\frac{1}{x(1-x)} < 4$$

$$\Rightarrow \quad 1 < 4 \cdot x(1-x) \Rightarrow 1 < 4x - 4x^2$$

$$\Rightarrow 1 - 4x + 4x^2 < 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 < 0 \quad \text{Contradiction car}$$

$$\boxed{(2x-1)^2 \geq 0 \ \forall x \in]0\ 1[}$$

6 Montrer par la contraposition que

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$

Solution

Soit $a, b \in \mathbb{R} / ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$

Donc $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$.

Relations

Exercice n° 01

Soit $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ un ensemble,
on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in S^2 \quad (a,b)\,R\,(c,d) \Longleftrightarrow 10a+b \leq 10c+d$$

Montrer que R est une relation ~~[illegible]~~ d'ordre

1) Soit $(a,b) \in S^2$, on a $10a+b = 10a+b$, alors $10a+b \leq 10a+b$, donc $(a,b)\,R\,(a,b) \Longrightarrow$ R est reflexive sur S.

2) Soient $(a,b),(c,d) \in S^2$ tels que $(a,b)\,R\,(c,d)$ et $(c,d)\,R\,(a,b)$ $\Longleftrightarrow \begin{cases} 10a+b \leq 10c+d \\ 10c+d \leq 10a+b \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 10(a-c)+b-d \leq 0 \\ 10(c-a)+d-b \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad 0 \leq 10(a-c)+b-d \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{10(a-c)+b-d=0}$$

avec $a,b,c,d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

donc $\boxed{a=c \text{ et } b=d}$, donc R est antisymétrique.

3) Soient $(a,b), (c,d), (e,f) \in S^2$ tels que

$(a,b) \, R \, (c,d)$ et $(c,d) \, R \, (e,f)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a+b \leq 10c+d \\ 10c+d \leq 10e+f \end{cases} \Leftrightarrow 10a+b \leq 10e+f$$

donc R est transitive. Comme R est reflexive, antisymétrique et transitive, alors R est une relation d'ordre

Exercice n° 02

Soit R une relation définie sur $\mathbb{N}$ par

$x R y \Longleftrightarrow x$ divise y

1) Montrer que R est une relation d'ordre
2) L'ordre est-il total ?
3) Soit $A = \{2,3,5\}$. Déterminer $\sup(A)$ et $\operatorname{Inf}(A)$
4) Soit $B = \{4,8,16\}$. Déterminer $\sup(B)$ et $\operatorname{Inf}(B)$.

$\boxed{xRy \Leftrightarrow x \text{ divise } y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,/\, y = nx}$

1)/

a) $\forall x \in \mathbb{N}$, on a $x = 1 \cdot x$ donc $\exists n \in \mathbb{N} \, (n=1) \,/\, x = 1 \cdot x$

donc xRx, alors R est reflexive.

b) soient $x, y \in \mathbb{N} \,/\, xRy$ et $yRx \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, y = n_1 x \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} \,/\, x = n_2 y \end{cases} \Rightarrow y = n_1 n_2 y \Rightarrow$$

$n_1 \cdot n_2 = 1$ Comme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$, alors

$n_1 \cdot n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 1$, donc $x = y$

$\Rightarrow R$ est antisymétrique

c) Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ | $x R y$ et $y R z$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N} \mid y = n_1 x & (1) \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} \mid z = n_2 y & (2) \end{cases}$

de (1) et (2) on a $z = n_2 y = n_2(n_1 x) = n_2 n_1 x$

donc $\exists n_3 \in \mathbb{N} \; (n_3 = n_1 \cdot n_2) \mid z = n_3 \cdot x \Rightarrow$

$x R z$, donc R est transitive.

comme R est reflexive, antisymetrique et transitive, alors R est une relation d'ordre

2) pour $x = 2$ et $y = 5$, on a $x \not R y$ et $y \not R x$

car 2 ne divise pas 5 et 5 ne divise pas 2

donc l'ordre n'est pas total.

1' 3) Majorants de A (M)

2 $\forall x \in A$: x divise M donc

$\exists n \in \mathbb{N} \mid \boxed{M = n x}$, alors M est un multiple commun de 2, 3 et 5, donc M est donné par les multiples de 30.

Minorants de A (m)

$\forall x \in A$: m divise $x \Rightarrow$ m est un diviseur commun de 2, 3 et 5 $\Rightarrow \boxed{m = 1}$

3 Dans ce cas $\sup(A) = PPCM\{2,3,5\} = 30$

$\inf(A) = PGCD\{2,3,5\} = 1$

<u>RQ</u>: $30 \notin A$, alors $\max\{A\}$ n'existe pas

$1 \notin A$, alors $\min\{A\}$ n'existe pas.

<u>même chose pour B</u>

on trouve M est donné par les multiples de 16

m est donné par les diviseurs de 4

$M = \{16, 32, 48, \dots\}$, $m = \{1, 2, 4\}$

$\sup(B) = 16$, $\inf(A) = 4$

$\max(B) = 16$ car $16 \in B$

$\min(B) = 4$ car $4 \in B$.

<u>Exercice n° 03</u>

1). On définit sur $\mathbb{R}$, la relation R comme suit:

$x R y \iff x - y \in \mathbb{Z}$ ($x-y$ est un entier)

2) Montrer que R est une relation d'équivalence

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x R x$, donc R est reflexive.

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$; $x R y \iff x - y = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\iff -(x-y) = -k$ avec $-k \in \mathbb{Z}$

$\iff y - x = k'$, $(k' = -k) \in \mathbb{Z}$, donc

$x R y \Rightarrow y R x$, alors R est symétrique.

3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ / xRy et yRz

$\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x - y = k_1 & (1) \\ y - z = k_2 & (2) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow (x-y) + (y-z) = k_1 + k_2$

$\Rightarrow x - z = k_1 + k_2 = k_3$ avec $k_3 \in \mathbb{Z}$

donc xRz, alors R est transitive.

Comme R est reflexive, symétrique et transitive, alors R est une relation d'équivalence.

Exercice n°04 Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

On définit sur A, la relation R par :

$xRy \Leftrightarrow x - y$ est divisible par 4

(ie) $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \boxed{x - y = 4 \cdot k}$.

1) * Montrer que R est une relation d'équivalence

2) Donner l'ensemble quotient (ensemble des classes d'équivalences).

1)
a/ Soit $x \in A$, il est clair que $x - x = 0$ est divisible par 4 car $\exists k = 0 \in \mathbb{Z}$ / $0 = 4 \cdot k$, donc xRx, alors R est reflexive

b) Soient $x, y \in A \mid x R y \iff$

$\exists k \in \mathbb{Z} \mid x - y = 4 \cdot k \iff -(x-y) = -4k$

$\Rightarrow y - x = 4(-k) \iff y - x = k' \cdot 4$ avec

$k' = -k \in \mathbb{Z}$, donc $y R x$, alors R

est symétrique.

c) Soient $x, y, z \in A \mid x R y$ et $y R z$

$$\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \mid \begin{cases} x - y = 4 \cdot k_1 & (1) \\ y - z = 4 \cdot k_2 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow x - z = 4(k_1 + k_2) \Rightarrow$

$\exists k' \in \mathbb{Z} \ (k' = k_1 + k_2) \mid x - z = 4 \cdot k'$

alors $x R z$, donc R est transitive

comme R est reflexive, symétrique et transitive, alors R est une relation d'équivalence

2) $\dot{1} = \{x \in A \mid 1 R x\} = \{x \in A \mid x = 4 \cdot k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{1, 5, 9, 13, 17\}$.

$\dot{2} = \{x \in A \mid 2 R x\} = \{x \in A \mid x = 4 \cdot k + 2\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$= \{2, 6, 10, 14, 18\}$ de même :

$\dot{3} = \{3, 7, 11, 15, 19\}$

$\dot{4} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

Ensemble quotient est $\{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$

Applications

Exercice n° 01 :

Considérons les deux applications f et g suivantes :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x/2, \text{ si } x \text{ est pair} \\ (x-1)/2, \text{ si non} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto g(x) = 2x$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijection de f et g.

* Injectivité de f : on a $f(4) = f(5) = 2$, mais $4 \neq 5$ donc f n'est pas injective

Surjectivité de f : soit $y \in \mathbb{N}$, alors

$\exists (x \text{ pair}) \in \mathbb{N}$ avec $\frac{x}{2} = y \Rightarrow \boxed{x = 2y}$

$\exists (x \text{ impair}) \in \mathbb{N}$ avec $\frac{x-1}{2} = y \Rightarrow \boxed{x = 2y+1}$

donc f est surjective

bijection f n'est pas bijective, car elle n'est pas injective

** Injectivité de g : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ /

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, alors

g est injective

Surjectivité de g : pour $y=5$, on a
$g(x)=5 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=5/2 \notin \mathbb{N}$, donc
g n'est pas surjective.

bijection de g : g n'est pas bijective, car elle n'est pas surjective.

Exercice n°02

On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}-\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x+1}{x-3}$$

1) L'application f est-elle injective ? surjective ?
2) quelle restriction doit-on faire sur l'espace d'arrivée pour que f devienne une bijection ?
Dans ce cas donner l'application réciproque de f.

1) Soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}-\{3\}$, si $f(x_1)=f(x_2)$ $\Rightarrow$

$\frac{2x_1+1}{x_1-3}=\frac{2x_2+1}{x_2-3} \Rightarrow -7x_1=-7x_2 \Rightarrow x_1=x_2$,

donc f est injective.

Soit $y \in \mathbb{R} \mid f(x)=y \Rightarrow \frac{2x+1}{x-3}=y \Rightarrow$

$x=\frac{3y+1}{y-2}$, pour que x soit défini, il faut que $y \neq 2$, donc f n'est pas surjective

2) Pour que f soit surjective, il suffit de prendre $\mathbb{R}-\{2\}$ comme espace d'arrivée. Dans ce cas $f^{-1}(y)$ est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R}-\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{3\}$$
$$x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2}$$

<u>Exercice n° 03</u>.

Considérons l'application f définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f

2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

<u>Injectivité de f</u> : On a $f(2) = \frac{2\times 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \frac{2\times \frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{5}$$

Comme $2 \neq \frac{1}{2}$ et $f(2) = f(\frac{1}{2})$, alors f n'est pas injective

<u>Surjectivité de f</u> : pour $y=2$, on a $f(x) = 2 \Rightarrow$

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2(1+x^2) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)\times(1) = 1-4 = -3 < 0$, alors l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, donc f n'est pas surjective.

Bijectivité de f : Comme f n'est pas injective et n'est pas surjective, alors f n'est pas bijective

2) $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$

$= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : y = \frac{2x}{1+x^2}\}$

$= \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R} : yx^2 - 2x + y = 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} / \Delta = 4 - 4y^2 \geq 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} / 4(1 - y^2) \geq 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} / 4(1-y)(1+y) \geq 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} / y \in [-1, 1]\}$

$= [-1, 1]$

Exercice n° 04

Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x) = 2x + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

1) f et g sont-elles injective ? Surjective ?

2) A-t-on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

3) Calculer $f(\{0, 1\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f([0, 1])$ et $f^{-1}([5, 7])$.

4) Calculer $g^{-1}(\{1\})$, $g([-4, 4])$, $g^{-1}([-4, -1])$ et $g^{-1}([0, 4[)$.

1) <u>injectivité de f</u> : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$, alors f est injective

<u>RQ</u> : on peut aussi montrer l'injectivité de f, en utilisant la première dérivée de f. ou $f'(x) = 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante,

donc f est injective.

<u>surjectivité de f</u>. $\forall y \in \mathbb{R}, \overset{?}{\exists} x \in \mathbb{R} \,/\, y = f(x)$

Soit $y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \Rightarrow y = 2x + 5 \Rightarrow 2x = y - 5$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{y-5}{2}} \in \mathbb{R}$, alors f est surjective.

<u>Injectivité de g</u> : Comme $-1 \neq 1$ et $g(-1) = g(1) = \frac{1}{2}$

alors g n'est pas injective.

<u>surjectivité de g</u> pour $y = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \neq -1$

car ($g(x)$ est toujours positive), donc g n'est pas surjective.

2/

* $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left[\frac{1}{x^2+1}\right] = \frac{2}{x^2+1} + 5$

** $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[2x+5] = \frac{1}{(2x+5)^2 + 1}$,

alors $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$

3)

$$f(\{0,1\}) = \{f(x) \mid x \in \{0,1\}\}$$
$$= \{f(0), f(1)\} = \{2(0)+5,\ 2(1)+5\}$$
$$= \{5, 7\}$$

$$f^{-1}(\{5\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+5 = 5\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x = 0\} = \{0\}$$

$f([0,1]) = \{f(x) \mid x \in [0,1]\}$ Comme f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, alors

$$f([0,1]) = \{[f(0), f(1)]\} = [5, 7]$$

$f^{-1}([5,7]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [5,7]\}$ ma

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+5 \in [5,7]\}$$

- $2x+5 \in [5,7] \iff 5 \leq 2x+5 \leq 7$

$$\iff \begin{cases} 2x+5 \leq 7 & ① \\ 2x+5 \geq 5 & ② \end{cases}$$

① $\iff 2x+5 \leq 7 \iff 2x \leq 2 \iff x \leq 1$
$\iff x \in]-\infty\ 1]$.

② $\iff 2x+5 \geq 5 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq 0$
$\iff x \in [0\ +\infty[$

Donc $f^{-1}([5,7]) =]-\infty\ 1] \cap [0\ +\infty[= \boxed{[0,1]}$

4)

$$g^{-1}(\{1\}) = \{x\in\mathbb{R} / g(x)=1\} = \{x\in\mathbb{R} / \frac{1}{x^2+1}=1\}$$
$$= \{x\in\mathbb{R} \mid x^2=0\} = \{0\}.$$

$g([-4,4]) = \{g(x) \mid x\in[-4,4]\}$. on a

$g'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}^-$ comme le montre le tableau suivante :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

donc $g([-4,4]) = \{g(x) \mid x\in[-4,4]\}$
$= \{g(x) \mid x\in[-4\ 0]\cup[0\ 4]\}$
$= \{g(x) \mid x\in[-4\ 0]\}\cup\{g(x) \mid x\in[0,4]\}$
$= [g(-4)\ g(0)]\cup[g(4), g(0)]$
$= \left[\frac{1}{17}, 1\right]\cup\left[\frac{1}{17}, 1\right] = \left[\frac{1}{17}, 1\right]$

<u>Rq.</u> $g(-4) = \frac{1}{(-4)^2+1} = \frac{1}{17}$, $g(0) = \frac{1}{(0)^2+1} = 1$

$g(4) = \frac{1}{(4)^2+1} = \frac{1}{17}$

$g^{-1}([-4,-1]) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [-4,-1]\} = \emptyset$

car $\boxed{g(x) > 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $\left(\frac{1}{x^2+1} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\right)$

$g^{-1}([0\ 4[) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [0\ 4[\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1}{x^2+1} < 4\} = \mathbb{R}$

car $\boxed{0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}}$

Exercice n°05 Considérons l'application f définie par : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x - 3$

1) calculer $f^{-1}(\{-6\})$ et $f^{-1}(\{0\})$

2) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f

3) Donner des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective.

4) Déterminer l'application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$..

1) a) $f^{-1}(\{-6\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -6\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = -6\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$
$= \{\ \} = \emptyset$ car $\boxed{\Delta_{x^2+2x+3} = -8 < 0}$

b) $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$
$= \{-3, 1\}$ car $\Delta = 16 > 0$, $\boxed{x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3}$

2) Comme $f(-3) = f(1) = 0$ et $-3 \neq 1$, alors
f n'est pas injective
Comme $f^{-1}(\{-6\}) = \emptyset$ (-6 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$), alors
f n'est pas surjective.
f n'est pas bijective (car elle n'est pas Injective) et (car elle n'est pas surjective).

3) pour determiner I et J, il faut
donner l'intervalle J tel que $\forall y \in J$
(y possède un antécédent dans $\mathbb{R}$) $\exists x \in \mathbb{R} \mid y = f(x)$

9

et donner l'intervalle I tel que

$\forall x_1, x_2 \in I$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Pour l'intervalle J, il faut résoudre l'equation $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = y$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - (y+3) = 0$

$\Delta = 4 + 4(y+3) = 16 + 4y = 4(4+y)$

Si $\Delta \geq 0$, alors $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = y$ (donc f surjective)

Si non ($\Delta < 0$) f n'est pas surjective.

Donc nous allons prendre le cas où $\Delta \geq 0$

c'est-à-dire $(4+y) \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \geq -4}$.

Il est clair que pour $\boxed{y > -4}$ l'equation $x^2 + 2x - (y+3)$ ~~dans~~ admet deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-2+2\sqrt{4+y}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2-2\sqrt{4+y}}{2}$

$x_1 = -1 + \sqrt{4+y}$ et $x_2 = -1 - \sqrt{4+y}$

Dans ce cas il faut choisir un intervalle I qui ne contient pas à la fois x_1 et x_2

$\underline{\text{or}}$ pour $\boxed{y=-4}$ l'equation

$$x^2+2x+(y+3) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

admet une racine double $\boxed{x=-1}$.

et $f'(x) = (x^2+2x-3)' = 2x+2 = 0$ si $\boxed{x=-1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

f est décroissante sur $]-\infty \; -1]$ et croissante sur $[-1 \; +\infty[$

donc il faut prendre soit $I =]-\infty \; -1]$

soit $I' = [-1 \; +\infty[$ et $J = [-4 \; +\infty[$

$\underline{\text{avec}}$ $\forall y \in [-4 \; +\infty[$

$$x_1 = -1+\sqrt{4+y} \in [-1 \; +\infty[$$

et $x_2 = -1-\sqrt{4+y} \in]-\infty \; -1]$

donc

$$f_p^{-1} : [-4 \; +\infty[\longmapsto [-1 \; +\infty[$$
$$x \longmapsto -1+\sqrt{4+x}$$

et

$$f^{-1} : [-4 \; +\infty[\longmapsto]-\infty \; -1]$$
$$x \longmapsto -1-\sqrt{4+x}$$

ici on peut avoir deux Intervalle pour I

soit $I = [-1 \; +\infty[$, soit $I' =]-\infty \; -1]$