Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie **Janvier 2023**
Département de Technologie **Durée :01 heure 30**

Examen de Maths 1

Exercice 1. (**04 pts**)
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2+k\right)=\left(3\cdot 1^2+1\right)+\left(3\cdot 2^2+2\right)+\cdots+\left(3n^2+n\right)=n(n+1)^2.$$

Exercice 2. (**8 pts**)

I. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application définie par : $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.
1. Calculer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{2\})$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Donner l'intervalles J pour que $f:[0,+\infty[\longrightarrow J$ soit bijective ; puis déterminer l'application réciproque f^{-1} de f.

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x,y\in\mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x)=f(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence $\sqrt{2}$.

Exercice 3. (**08 pts**)

I. Soient $a\in\mathbb{R}$ et g la fonction définie par

$$g(x)=\begin{cases} x^2+4x+1 & \text{si } x\le 0,\\ \dfrac{\sin ax}{x}+x^2-x & \text{si } x>0.\end{cases}$$

1. Déterminer a pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. a) Énoncer le Théorème des valeurs intermédiaires.
   b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur $]-1,0[$.

II. 1. En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que pour tous réels a et b avec $0\le a<b<1$:

$$\frac{a-b}{\sqrt{1-b^2}}<\arccos b-\arccos a<\frac{a-b}{\sqrt{1-a^2}}.$$

2. En déduire que $\frac{\pi}{2}-\frac{5}{\sqrt{11}}<\arccos\frac{5}{6}<\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}$.

III. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x_0=0$ de la fonction $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{e^x}$.

Rappel : Au voisinage de 0 on a :
$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$, $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)$.

Bon courage