Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie **Janvier 2023**
Département de Technologie **Durée :01 heure 30**

Corrigé de l'examen de Maths 1

Exercice 1. (**04 pts**) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}(n): \quad \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k = n(n+1)^2.$$

Pour $n = 1$, on a :
$3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ et $1 \cdot 2^2 = 4$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k = n(n+1)^2$$

et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3k^2 + k = (n+1)(n+2)^2.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 3k^2 + k &= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k + 3(n+1)^2 + (n+1) \\
&= n(n+1)^2 + 3(n+1)^2 + (n+1) \\
&= (n+1)(n(n+1) + 3(n+1) + 1) \\
&= (n+1)\left(n^2 + 4n + 4\right) \\
&= (n+1)(n+2)^2,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 2. (**8 pts**)

I. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par : $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

1. Calculons $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{2\})$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{0\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{1 + x^2} = 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / 1 + x^2 = 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\right\} \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{2\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 2\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{1+x^2} = 2\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 = 4\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 3\right\} \\
&= \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}
\end{aligned}$$

2. 2. Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
   (a) Injectivité de f : D'après la question précédente, on a $f(-\sqrt{3}) = 2 = f(\sqrt{3})$ mais $-\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$. Donc f n'est pas injective.
   (b) Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = 0$ (par exemple) n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente).
   (c) Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).

3. Donnons l'intervalle J tel que $f : [0, +\infty[\longrightarrow J$ soit bijective.
   Il est facile de vérifier que $f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est une bijection.
   $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in J = [1, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\Longleftrightarrow y = \sqrt{x^2+1} \\
&\Longleftrightarrow y^2 = x^2 + 1 \\
&\Longleftrightarrow x^2 = y^2 - 1 \\
&\Longleftrightarrow |x| = \sqrt{y^2-1} \quad \text{(car } y \geqslant 1) \\
&\Longleftrightarrow x = \sqrt{y^2-1} \quad \text{(car on cherche } x \in [0, +\infty[).
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
f^{-1} : &[1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\
&y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}
\end{aligned}$$

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (i) Réflexivité de $\mathcal{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) = f(x)$.
   Donc $x\mathcal{R}x$, d'où la réflexivité de $\mathcal{R}$.
   (ii) Symétrie de $\mathcal{R}$: Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathcal{R}y$, on a

$$x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x) \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$, d'où la symétrie de $\mathcal{R}$.
(iii) Transitivité de $\mathcal{R}$: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a

$$\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = f(y) \ldots (1) \\ \text{ et} \\ f(y) = f(z) \ldots (2) \end{array}\right.$$

En sommant les égalités (1) et (2) membres à membres, on obtient

$$f(x) + f(y) = f(y) + f(z) \Longrightarrow f(x) = f(z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

d'où la transitivité de $\mathcal{R}$.
Conclusion : De i), ii) et iii), $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminons la classe d'équivalence $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \overline{\sqrt{2}} &= \{x \in \mathbb{R} / x\mathcal{R}\sqrt{2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = f(\sqrt{2})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{1+x^2} = \sqrt{3}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2\} \\ &= \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Exercice 3. (08 pts)

I. Soient $a \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin ax}{x} + x^2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Continuité de g sur $\mathbb{R}$
a) Continuité de g sur $\mathbb{R}^*$:
g est continue sur $\mathbb{R}^*$ car la fonction $x \longmapsto x^2 + 4x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty, 0[$, et la fonction
$x \longmapsto \dfrac{\sin ax}{x} + x^2 - x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $]0, +\infty[$.
Donc g est continue sur $\mathbb{R}^*, \forall a \in \mathbb{R}$.
b) continuité de g en 0 :
Pour que g soit continue en 0 , il faut et il suffit que :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} g(x) = g(0).$$

On a $g(0) = 1$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin ax}{x} + x^2 - x = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} a\frac{\sin ax}{ax} + x^2 - x = a.$$

et

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2+4x+1 = 1.$$

Donc g est continue en 0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = g(0),$$

c'est à dire, si et seulement si $a=1$.
Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=1$.

2. a. **Théorème des valeurs intermédiaires :**
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction telle que
1. f est continue sur $[a,b]$,
2. $f(a)\cdot f(b)<0$.
Alors

$$\exists x_0 \in]\,a,b\,[: f\left(x_0\right)=0.$$

Et si de plus f est stictement monotone, alors le x_0 est unique.

b. Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet au moins une solution sur $]-1,0[$.
On a g est continue sur $]-1,0[$, et on a $g(0)=1>0$, et $g(-1)=-2<0$, donc $g(-1).g(0)<0$.
Alors par le théorème de valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c\in]-1,0[$, tel que $g(c)=0$.

II. 1. On considère la fonction $h(x)=\arccos x$ sur $[a,b]$ avec $0\le a<b<1$.
h est une fonction continue $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c\in]a,b[: h(b)-h(a)=(b-a)h'(c)$$

ou encore

$$\exists c\in]a,b[: \arccos b-\arccos a=\frac{a-b}{\sqrt{1-c^2}}$$

Or $a<c<b$, donc

$$\sqrt{1-b^2}<\sqrt{1-c^2}<\sqrt{1-a^2}$$

Par suite :

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$$

De plus, pour $a-b<0$, on a

$$\frac{a-b}{\sqrt{1-b^2}}<\frac{a-b}{\sqrt{1-c^2}}<\frac{a-b}{\sqrt{1-a^2}}$$

Par conséquent : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq a < b < 1$ on a :

$$\frac{a-b}{\sqrt{1-b^2}} < \arccos b - \arccos a < \frac{a-b}{\sqrt{1-a^2}}.$$

2. Il suffit d'écrire l'encadrement précédent pour $a = 0$ et $b = \dfrac{5}{6}$.

III. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$.

Au voisinage de 0, on a :
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right), \quad \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$

Pour calculer le DL du quotient $\dfrac{x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)}$, On effectue la division suivant les puissances croissantes.
D'où,

$$\frac{x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Ainsi le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$ est $x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$.