Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Janvier 2023
Durée :01 heure 30

Examen de Maths 1

Exercice 1. (04 pts)
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + k\right) = \left(3 \cdot 1^2 + 1\right) + \left(3 \cdot 2^2 + 2\right) + \cdots + \left(3n^2 + n\right) = n(n+1)^2.$$

Exercice 2. (8 pts)

I. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par : $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

1. Calculer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{2\})$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Donner l'intervalles J pour que $f : [0, +\infty[\longrightarrow J$ soit bijective ; puis déterminer l'application réciproque f^{-1} de f.

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence $\sqrt{2}$.

Exercice 3. (08 pts)

I. Soient $a \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{\sin ax}{x} + x^2 - x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. a) Énoncer le Théorème des valeurs intermédiaires.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]-1, 0[$.

II. 1. En utilisant le théorème des accroissements finis montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b < 1$:

$$\frac{a - b}{\sqrt{1 - b^2}} < \arccos b - \arccos a < \frac{a - b}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

2. En déduire que $\frac{\pi}{2} - \frac{5}{\sqrt{11}} < \arccos \frac{5}{6} < \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}$.

III. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$.

Rappel : Au voisinage de 0 on a :
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$, $\quad \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$.

Bon courage

Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
Janvier 2023
Durée :01 heure 30

Corrigé de l'examen de Maths 1

Exercice 1. (**04 pts**) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k = n(n+1)^2.$$

Pour $n = 1$, on a :
$3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ et $1 \cdot 2^2 = 4$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. (1***pt***)
Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k = n(n+1)^2 \qquad (1\boldsymbol{pt})$$

et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} 3k^2 + k = (n+1)(n+2)^2.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 3k^2 + k &= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k + 3(n+1)^2 + (n+1) \qquad (1.5\boldsymbol{pt}) \\
&= n(n+1)^2 + 3(n+1)^2 + (n+1) \\
&= (n+1)(n(n+1) + 3(n+1) + 1) \\
&= (n+1)\left(n^2 + 4n + 4\right) \\
&= (n+1)(n+2)^2,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie. (0.5***pt***)

Exercice 2. (**8 pts**)

I. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par : $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

1. Calculons $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{2\})$.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{0\}) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{0\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{1+x^2} = 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / 1 + x^2 = 0\right\} \qquad (0.5\boldsymbol{pt}) \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\right\} \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\{2\}) &= \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \{2\}\}\\
&= \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 2\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}/\sqrt{1+x^2} = 2\right\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}/1+x^2 = 4\right\} \qquad (0.5\boldsymbol{pt})\\
&= \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 = 3\right\}\\
&= \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}
\end{aligned}
$$

2. 2. Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
   (a) Injectivité de f : D'après la question précédente, on a
   $f(-\sqrt{3}) = 2 = f(\sqrt{3})$ mais $-\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$. Donc f n'est pas injective. $(0.5\boldsymbol{pt})$
   (b) Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = 0$ (par exemple) n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente). $(0.5\boldsymbol{pt})$
   (c) Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective). $(0.5\boldsymbol{pt})$

3. Donnons l'intervalle J tel que $f : [0, +\infty[\longrightarrow J$ soit bijective. $(0.5\boldsymbol{pt})$
   Il est facile de vérifier que $f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ est une bijection.
   $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in J = [1, +\infty[$ on a

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\Longleftrightarrow y = \sqrt{x^2+1}\\
&\Longleftrightarrow y^2 = x^2 + 1\\
&\Longleftrightarrow x^2 = y^2 - 1 \qquad (1\boldsymbol{pt})\\
&\Longleftrightarrow |x| = \sqrt{y^2-1} \qquad (\text{car } y \geqslant 1)\\
&\Longleftrightarrow x = \sqrt{y^2-1} \qquad (\text{car on cherche } x \in [0, +\infty[).
\end{aligned}
$$

   Donc

$$
\begin{aligned}
f^{-1} :&[1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\qquad (1\boldsymbol{pt})\\
&y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}
\end{aligned}
$$

II. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (i) Réflexivité de $\mathcal{R}$: Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) = f(x)$.
   Donc $x\mathcal{R}x$, d'où la réflexivité de $\mathcal{R}$. $(0.5\boldsymbol{pt})$
   (ii) Symétrie de $\mathcal{R}$: Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathcal{R}y$, on a

$$x\mathcal{R}y \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x) \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$, d'où la symétrie de $\mathcal{R}$. (0.5***pt***)
(iii) Transitivité de $\mathcal{R}$: Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ \text{et} \\ f(y) = f(z) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = f(z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

d'où la transitivité de $\mathcal{R}$. (1***pt***)
Conclusion : De i), ii) et iii), $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminons la classe d'équivalence $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\sqrt{2}} &= \{x \in \mathbb{R} / x\mathcal{R}\sqrt{2}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = f(\sqrt{2})\} \qquad (1\boldsymbol{pt}) \\
&= \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{1+x^2} = \sqrt{3}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 2\} \\
&= \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

Exercice 3. (**08 pts**)

I. Soient $a \in \mathbb{R}$ et g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\sin ax}{x} + x^2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Continuité de g sur $\mathbb{R}$
   a) Continuité de g sur $\mathbb{R}^*$ (1***pt***) :
   g est continue sur $\mathbb{R}^*$ car la fonction $x \longmapsto x^2 + 4x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty, 0[$, et la fonction
   $x \longmapsto \dfrac{\sin ax}{x} + x^2 - x$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $]0, +\infty[$.
   Donc g est continue sur $\mathbb{R}^*, \forall a \in \mathbb{R}$.
   b) continuité de g en 0 :
   Pour que g soit continue en 0 , il faut et il suffit que :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} g(x) = g(0).$$

   On a $g(0) = 1$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{\sin ax}{x} + x^2 - x = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} a\frac{\sin ax}{ax} + x^2 - x = a. \qquad (0.5\boldsymbol{pt})$$

   et

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} x^2 + 4x + 1 = 1. \qquad (0.5\boldsymbol{pt})$$

Donc g est continue en 0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} g(x) = g(0),$$

c'est à dire, si et seulement si $a = 1$.
Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = 1$. $\quad (0.5\boldsymbol{pt})$

2. a. **Théorème des valeurs intermédiaires :** $\quad (1\boldsymbol{pt})$
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
1. f est continue sur $[a, b]$,
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Alors

$$\exists x_0 \in]\, a, b\, [: f\,(x_0) = 0.$$

Et si de plus f est stictement monotone, alors le x_0 est unique.

b. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]-1, 0[$.
On a g est continue sur $]-1, 0[$, et on a $g(0) = 1 > 0$, et $g(-1) = -2 < 0$, donc $g(-1).g(0) < 0$.
Alors par le théorème de valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in]-1, 0[$, tel que $g(c) = 0$. $\quad (1\boldsymbol{pt})$

II. 1. On considère la fonction $h(x) = \arccos x$ sur $[a, b]$ avec $0 \le a < b < 1$.
h est une fonction continue $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. $\quad (0.5\boldsymbol{pt})$
Alors d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]a, b[: h(b) - h(a) = (b - a)h'(c)$$

ou encore

$$\exists c \in]a, b[: \arccos b - \arccos a = \frac{a - b}{\sqrt{1 - c^2}} \qquad (0.5\boldsymbol{pt})$$

Or $a < c < b$, donc

$$\sqrt{1 - b^2} < \sqrt{1 - c^2} < \sqrt{1 - a^2}$$

Par suite :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}$$

De plus, pour $a - b < 0$, on a

$$\frac{a - b}{\sqrt{1 - b^2}} < \frac{a - b}{\sqrt{1 - c^2}} < \frac{a - b}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Par conséquent : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 \le a < b < 1$ on a :

$$\frac{a - b}{\sqrt{1 - b^2}} < \arccos b - \arccos a < \frac{a - b}{\sqrt{1 - a^2}} \qquad (1\boldsymbol{pt}).$$

2. Il suffit d'écrire l'encadrement précédent pour $a = 0$ et $b = \frac{5}{6}$. (0.5***pt***)

III. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$.

Au voisinage de 0, on a :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right), \quad \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$

Pour calculer le DL du quotient $\dfrac{x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)}$, On effectue la division suivant les puissances croissantes.

D'où,

$$\frac{x + \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} = x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right). \qquad (1\boldsymbol{pt})$$

Ainsi le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$ est $x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$.