Université A. Mira de Béjaia
Département de Technologie
1ère Année Technologie

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Année Universitaire 2022-2023

Examen de l'analyse 1 **Parcours Ingénieur** **Durée :1h30**

Remarque *Les étapes nécessaires de la résolution seront prises en compte.*

Exercice 1 *(8 points)*

On considère les deux suites (U_n) et (V_n), $n \in \mathbb{N}$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}, pour\ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V_0 = 12, \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4}, pour\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n - V_n = -11\left(\frac{1}{12}\right)^n$.
2. Etudier la monotonie des deux suites (U_n) et (V_n).
3. Déduire que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.
4. Montrer que la suite définie par : $T_n = 3U_n + 8V_n$ est constante.
5. Déduire la limite de chacune des suites (U_n) et (V_n).
6. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ensemble suivant :
$$E = \{ V_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 2 *(6 points)*

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{sinx}{x}, & si \quad x \neq 0 \\ 0, & si \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f, calculer $f'(x)$.
3. Etudier la continuité de f' en 0.
4. La fonction f est-elle de classe C^1 de D_f ? Justifier.

Exercice 3 *(6 points)*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire les expressions suivantes sans valeur absolue :
$f(x) = 3 + |x^2 - 5x + 4|$, $\quad g(x) = |2 - x| + |x + 3|$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $E(x) = -4$, $\quad E(1 - x) - 3 = 0$.

Bonne chance
Dr. BOUKOUCHA

Corrigé de l'examen de l'analyse 1

Exercice 1. *(8points)* (U_n) *et* (V_n), $n \in \mathbb{N}$ *deux suites réelles définies par:*

$$\begin{cases} U_0 = 1, \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 12, \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Montrons par récurrence que: $P(n) : \left[\forall n \in \mathbb{N} : U_n - V_n = -11 \left(\frac{1}{12}\right)^n\right]$.

- *Pour* $n = 0$, *on a:* $U_0 - V_0 = 1 - 12 = -11$ *et*
$U_0 - V_0 = -11 \left(\frac{1}{12}\right)^0 = -11$, *donc* $P(0)$ *est vraie.*

0,25

- *On démontre que:* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie.*

On suppose que $P(n)$ *est vraie à un rang* $n \in \mathbb{N}$ *fixé, c'est à dire:*

$$U_n - V_n = -11 \left(\frac{1}{12}\right)^n, \text{ (hypothèse de la récurrence).}$$

et on démontre que $P(n+1)$ *est vraie c'est à dire:* $U_{n+1} - V_{n+1} = -11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}$

0,25

On a:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - V_{n+1} &= \frac{U_n + 2V_n}{3} - \frac{U_n + 3V_n}{4} = \frac{U_n - V_n}{12} = \frac{1}{12}(U_n - V_n) \\ &= -11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} \text{ (d'après l'hypothèse de la récurrence)} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ *est vraie, d'où l'implication* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ *est vraie* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N} : U_n - V_n = -11 \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}$.

1

2) Etudions la monotonie des deux suites (U_n) *et* (V_n).

La monotonie de (U_n). *On a:*

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \frac{2V_n - 2U_n}{3} = \frac{-2}{3}(U_n - V_n) = \frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} > 0.$$

0,75

D'où la suite (U_n) *est croissante.*

La monotonie de (V_n). *On a:*

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3V_n}{4} - V_n = \frac{U_n - V_n}{4} = \frac{1}{4}(U_n - V_n) = \frac{-11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{n+1} < 0.$$

0,75

D'où la suite (V_n) *est décroissante.*

3) Déduissons que les deux suites (U_n) *et* (V_n) *sont adjacentes. On a:*

(U_n) *est croissante,* (V_n) *est décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = -11 \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{12}\right)^n = 0.$ 1

Alors, (U_n) *et* (V_n) *sont deux suites adjacentes.*

4) Montrons que la suite définie par: $T_n = 3U_n + 8V_n$ *est constante.*

On a: 0,75

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= (3U_{n+1} + 8V_{n+1}) - (3U_n + 8V_n) \\ &= 3\left(\frac{U_n + 2V_n}{3}\right) + 8\left(\frac{U_n + 3V_n}{4}\right) - 3U_n - 8V_n \\ &= U_n + 2V_n + 2U_n + 6V_n - 3U_n - 8V_n = 0 \end{aligned}$$

D'où la suite (T_n) *est constante.*

5) Déduissons la limite de chacune des suites (U_n) *et* (V_n).

On a (U_n) *et* (V_n) *deux suites adjacentes donc,* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, (T_n) *est constante donc,* $T_n = T_{n-1} = ... = T_0 = 3U_0 + 8V_0 = 3(1) + 8(12) =$ 0,25
99

Donc de $3U_n + 8V_n = 99$*, on aura:*

$$3\left(\lim_{n\to+\infty} U_n\right) + 8\left(\lim_{n\to+\infty} V_n\right) = 99 \Rightarrow 3\lambda + 8\lambda = 99 \text{ d'où } \lambda = 9$$ 1

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 9.$

6) Déterminons (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de ensemble suivant:

$$E = \{V_n\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

$$\text{On a: } E = \{V_n\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\} = \{V_0\ , V_1\ , V_2\ , ...\ , V_n\ \}.$$

La suite (V_n) *est décroissante est converge vers 9 et de premier terme* $V_0 = 12$ *donc on a:* 0,5

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \underbrace{12}_{V_0} \geq V_n > 9.$$

Donc,

0,25 *Les majorants de E sont :* $[12, +\infty[$ — *Les minorants de E sont :* $]-\infty, 9]$ 0,25

0,25 *La borne supérieure de E est :* $\sup E = 12$ — *La borne inférieure de E est :* $\inf E = 9$ 0,25

Le plus grand élément de E est : $\max E = 12$ — *Le plus petit élément de E : n'existe pas.*

0,25 0,25

Exercice 2. *(6points) La fonction:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{\sin x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

1) Déterminons D_f le domaine de définition de la fonction f. 0,5

On a: $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\cup \{0\} = \mathbb{R}$.

2) La continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

La continuité de f sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *la fonction* $x \mapsto -1 + \dfrac{\sin x}{x}$ *est continue (car est une somme et rapport des fonctions continues). Il reste d'étudier la continuité de f en* $x = 0$. 0,5

On a:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 0 = f(0).$$ 0,5

Donc, f est continue en $x = 0$, on conclut que: f est continue sur $\mathbb{R}$.

La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

- Sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, *la fonction f est dérivable (car f est somme et rapport des fonctions dérivables).* 0,5

Il reste d'étudier la dérivabilité de f en $x = 0$. On a:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{-1 + \frac{\sin x}{x}}{x} = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(-x + \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1 + \cos x}{2x}\right) = \frac{0}{0} \text{ (Forme indéterminée)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(-1 + \cos x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0. \end{aligned}$$ 1

D'où f est dérivable en 0, d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculons $f'(x)$.

Si $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *on a* $\left(-1 + \dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. *Donc,*

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & si\, x \neq 0 \\ 0 & si\, x = 0 \end{cases}$$ 1

3) Etudions la continuité de f' en 0.

- *Sur l'intervalle* $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ *la fonction* $x \mapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ *est continue (car est une somme et rapport des fonctions continues). Il reste d'étudier la continuité de* f' *en* $x = 0$. *On a:*

0,5

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{2}\right) = 0 = f'(0).$$

0,5

Donc, f' *est continue en* $x = 0$, *on conclut que:* f' *est continue sur* $\mathbb{R}$.

4) La fonction f est-elle de classe C^1 de D_f? Justifier.

La fonction f *est de classe* $C^1(\mathbb{R})$, *car* f *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* f' *est continue sur* $\mathbb{R}$.

1

Exercice 3. *(6points) 1) Ecrivons* $f(x) = 3 + |x^2 - 5x + 4|$ *sans valeur absolue:*

On a: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ *où* $x = 4$. *Donc,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 7 \quad si\ x \in]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[\\ -x^2 + 5x - 1\ si\ x \in [1, 4] \end{cases}$$

1,5

Ecrivons $g(x) = |2 - x| + |x + 3|$ ***sans valeur absolue.*** *On a:*

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x\ si\ x \in]-\infty, 2] \\ x - 2\ si\ x \in [2, +\infty[\end{cases} \quad et \quad |x + 3| = \begin{cases} x + 3 \quad si\ x \in [-3, +\infty[\\ -x - 3\ si\ x \in]-\infty, -3] \end{cases}$$

Donc,

$$g(x) = |2 - x| + |x + 3| = \begin{cases} -2x - 1\ si\ x \in]-\infty, -3] \\ 5 \qquad\quad si\ x \in [-3, 2] \\ 2x + 1 \quad si\ x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1,5

2) ***Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante:*** $E(x) = -4$. *On a:*

$$E(x) = -4 \Leftrightarrow (-4 \leq x < -4 + 1) \Leftrightarrow -4 \leq x < -3.$$

Donc, l'ensemble de solutions est: $[-4, -3[$.

1,5

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $E(1 - x) - 3 = 0$. *On a:*

$$E(1 - x) - 3 = 0 \Leftrightarrow (E(1 - x) = 3) \Leftrightarrow 3 \leq 1 - x < 3 + 1$$
$$\Leftrightarrow (2 \leq -x < 3) \Leftrightarrow (-2 \geq x > -3)$$

Donc, l'ensemble de solutions est: $]-3, -2]$.

1,5