Université de Bejaia **17.01.2023**

Département GE

Examen session normale
UEF 2312

***Exercice 1**: (10 pts):* *Soit un système linéaire défini par la représentation d'état:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0)$$

On désire placer les pôles du système en BF : -2-j 2 et -2+j 2

On boucle le système par la commande par retour d'état suivante :

$$u(t) = y_{ref}(\tau) - Kx(t)$$

1) *Tracer le schéma du réglage d'état*
2) *Vérifier la commandabilité du système*
3) *Déterminer le retour d'état K*

Pour annuler l'erreur en régime permanent, on insère un pré-compensateur (pré filtre) sous la forme: $u = \boldsymbol{N}.y_{ref} - Kx$

où y_{ref} est supposée constante dans notre cas (Echelon).

5) *Tracer le schéma du réglage d'état*
6) *Calculer le pré-compensateur N*

Exercice 2 (10pts) : O*n souhaite appliquer une commande prédictive généralisée (GPC) à un MCC dont le modèle d'état est comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad avec \quad f(x) = \begin{pmatrix} -50 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0)$$

Avec : $x_1 = \Omega : la\ vitesse\ de\ rotation$ $\qquad x_2 = i : le\ courant\ d'induit$

$y = x_1 = \Omega : la\ vitesse\ de\ rotation$ $\qquad u: la\ tension\ d'induit$

1) *Déterminer le degré relatif de la sortie y(t):*
2) *Calculer les prédictions de y et sa référence à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie.*
3) *Calculer la commande optimale qui optimise la fonction de coût suivante*

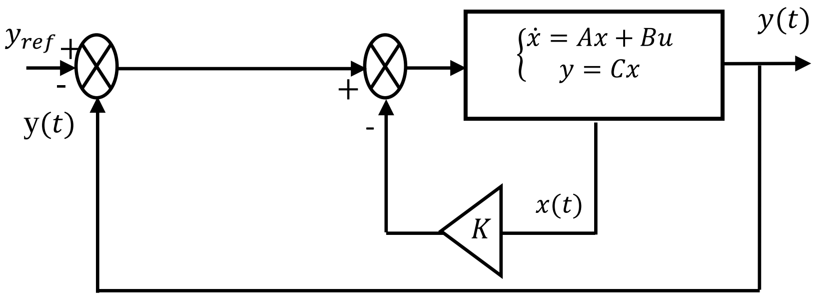
$$\Im = \frac{1}{2}\int_0^{T_p} [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]^T\,[y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]d\tau$$

T_p : le temps de prédiction

Bon courage
O.K

Solution Exercice 1 :

1) Tracer le schéma du réglage d'état ------------------------------------(1pts)



2) Vérifier la commandabilité du système

Mc=$(B \;\; AB)$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$Mc = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Det Mc=16 le système est commandable --(1pt)

3) Déterminer le retour d'état K

$\boldsymbol{\lambda_1}$ **= -2 - 2i** $\boldsymbol{\lambda_2}$**= -2 + 2i**

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée :

$\lambda_{[A-BK]}$(P)= $det(PI - [A - BK])$

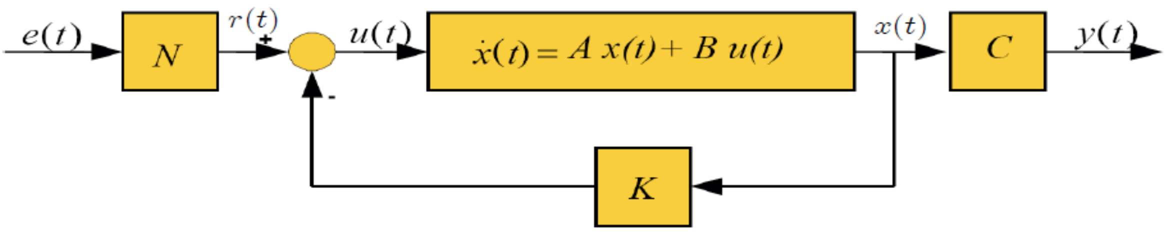
$$det\,(PI - [A - BK]) = \det\begin{pmatrix} P & -1 \\ 4k_1 & P + 2 + 4k_2 \end{pmatrix} = (P)(P + 2 + 4k_2) + 4k_1$$

$\lambda_{[A-BK]}$(P)= $\boldsymbol{P^2} + (2 + 4k_2)P + 4k_1$--(1pt)

$\lambda_{des}(P) = P^2 + 4P + 8 = \boldsymbol{P^2} + (2 + 4k_2)P + 4k_1$----------------------------(1pt)

$$\lambda_{des}(P) = \lambda_{[A_c - B_c K_c]} \Rightarrow \begin{cases} 4\mathrm{k}_1 = 8 \\ 2 + 4k_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{k}_1 = 2 \\ k_2 = 0.5 \end{cases}$$ ---------------------------------(2pts)

5) Tracer le schéma du réglage d'état --(1pt)



6) calculer le pré-compensateur N

Trouver $\boldsymbol{N}$de façon à ce que y converge vers $\boldsymbol{y_{ref}}$, lorsque la consigne $\boldsymbol{y_{ref}}$ est constante. Au régime permanent $\dot{x}(t) = 0$.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}.\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}.\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{y_{ref}} - \boldsymbol{Kx}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}.\left(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{y_{ref}} - \boldsymbol{Kx}\right) = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{C}.(\boldsymbol{BK} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}$---*(2pts)*

N* = *2.0000--(1pt)

Solution EXO 2 (10pts)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad avec \quad f(x) = \begin{pmatrix} -50 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0)$$

1) **Le degré relatif de la sortie y(t)** **(3pts)**

$y(t) = h(x) = x_1 \qquad\qquad x = (x_1\ x_2)^T$

$$\dot{y}(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + Bu(t)] = \frac{\partial h}{\partial x}f(x) + \frac{\partial h}{\partial x}B.u$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}f(x) \qquad\qquad L_B h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}B$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial x_2}\right) = (1 \quad 0\,)$$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}f(x) = (1\,0\,)\begin{pmatrix} -50 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-50 \quad -1)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -50x_1 - 1x_2$$

$$L_B h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}B = (1 \quad 0\,)\begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} = 0$$ Le degré relatif de la sortie $\rho > 1$

$\dot{y}(t) = L_f h(x) = -50x_1 - x_2$--------------------------(1pts)

On calcule la deuxième dérivée

$$\ddot{y}(t) = \frac{d\dot{y}(t)}{dt} = \frac{dL_f h(x)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}L_f h(x) \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \quad \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}\dot{x}(t) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}[f(x) + Bu]$$

$$= \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}f(x) + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x}Bu$$

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x} = \left(\frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1}\frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial(-50x_1 - 1x_2)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial(-50x_1 - 1x_2)}{\partial x_2}\right) = (-50 \quad -1)$$

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x}f(x) = (-50 \quad -1)\begin{pmatrix} -50 & -1 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (2499.5 \quad 50.5)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2499.5x_1 + 50.5x_2$$

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x}B = (-50 \quad -1)\begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} = -100$$

$\ddot{y}(t) = \quad 2499.5x_1 + 50.5x_2 - 100u$ --------------------------(1pts)

Le degré relatif de la sortie y= Ω estρ $= 2$:--------------------------(1pts)

2) Calculer la prédiction de y et sa référence à partir de l'expansion en série de Taylor, qui est exprimée par les dérivées de Lie. **(2pts)**

Le degré relatif de la sortie y= Ω estρ $= 2$:

$$y(t+\tau) = y(t) + \tau\dot{y}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t) = h(x) + \tau L_f h(x) + \frac{\tau^2}{2}(L^2{}_f h(x) + Gu(t)\,)$$

$$y(t+\tau) = y(t) + \tau\dot{y}(t) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}$$:--------------------------(1pts)

La sortie au futur $y(t+\tau)$est exprimée par :

$$y(t+\tau) = T(\tau)Y(t)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} \qquad T(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$y_{ref}(t+\tau) = T(\tau)Y_{ref}(t)$$

Avec : $Y_{ref}(t) = \begin{bmatrix} y_{ref}(t) \\ \dot{y}_{ref}(t) \\ \ddot{y}_{ref}(t) \end{bmatrix} \qquad T(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix}$--------------------------(1 pts)

3) Calculer la commande optimale qui optimise la fonction de coût: **(5pts)**

$$\Im = \frac{1}{2}\int_0^{T_p} [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]^T [y_{ref}(t+\tau) - y(t+\tau)]d\tau$$

$$\Im = \frac{1}{2}[Y_{ref}(t) - Y(t)]^T \int_0^{T_p} T(\tau)^T T(\tau) d\tau \ \ [Y_{ref}(t) - Y(t)] ---------------- (1\text{pts})$$

On calcule :

$$Y_{ref}(t) - Y(t) = \begin{bmatrix} y_{ref}(t) \\ \dot{y}_{ref}(t) \\ \ddot{y}_{ref}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{ref}(t) \\ \dot{y}_{ref}(t) \\ \ddot{y}_{ref}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ -50x_1 - x_2 \\ 2499.5x_1 + 50.5x_2 - 100u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 + Gu \end{bmatrix}$$

$avec$: $\begin{cases} M_0 = y_{ref} - x_1 \\ M_1 = \dot{y}_{ref} - (-50x_1 - x_2) \\ M_2 = \ddot{y}_{ref} - (2499.5x_1 + 50.5x_2) \\ G = -100 \end{cases}$--------------------------(2pts)

$$\int_0^{T_p} \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \end{bmatrix} d\tau = \int_0^{T_p} \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2} \\ \tau & \tau^2 & \frac{\tau^3}{2} \\ \frac{\tau^2}{2} & \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^4}{4} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T_p & \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{6} \\ \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{3} & \frac{T_p^4}{8} \\ \frac{T_p^3}{6} & \frac{T_p^4}{8} & \frac{T_p^5}{20} \end{bmatrix} ------------- (1\text{pts})$$

$$\Im = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 + Gu \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_p & \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{6} \\ \frac{T_p^2}{2} & \frac{T_p^3}{3} & \frac{T_p^4}{8} \\ \frac{T_p^3}{6} & \frac{T_p^4}{8} & \frac{T_p^5}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 + Gu \end{bmatrix}$$

La condition nécessaire à satisfaire pour trouver la commande optimale est la suivante :

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u} = 0 \qquad ------------(0.5pts)$$

$$u = -1/G(\frac{10}{3T_p^2}M_0 + \frac{5}{2T_p}M_1 + M_2)$$

$$u = 1/100(\frac{10}{3T_p^2}M_0 + \frac{5}{2T_p}M_1 + M_2) \quad ------------------------(2pts)$$

$$\begin{cases} M_0 = y_{ref} - x_1 \\ M_1 = \dot{y}_{ref} - (-50x_1 - x_2) \\ M_2 = \ddot{y}_{ref} - (2499.5x_1 + 50.5x_2) \\ G = -100 \end{cases}$$