Solution abrégée de l'examen d'algèbre III

Exercice n°01 :

1°/ $(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right]$ (1)

2°/ Résoudre (S) par la méthode de P.G

1ère étape : $a_{11} = 1 \neq 0$.

$L_2 \leftarrow L_2 + (-1)L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$; $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ (0,5 × 3)

On obtient :

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$ (0,5)

2ème étape : $a'_{22} = -1 \neq 0$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$; $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$ (0,5 × 2)

$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 13 \end{array}\right]$ (0,5)

(S) admet une infinité de sol ou pas de sol.

$-5z + 7t = 13 \Rightarrow z = 7/5\,t - \frac{13}{5}$ (1,5 × 3)

$-y + 2z - 3t = -8 \Rightarrow y = -1/5\,t + 14/5$.

$x + y - z + 2t = 8 \Rightarrow x = -2/5\,t + 13/5$

(S) admet une infinité de sol.

Exercice n°02

1°/ $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ (1)

$\lambda_1 = 1$, vp simple ie $\alpha_1 = 1$

$\lambda_2 = 3$, vp double ie $\alpha_2 = 2$

2°/ $sp(A) = \{1, 3\}$ (1)

3°/ $E_{\lambda_1} = vect\{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1}\}$, $\dim E_{\lambda_1} = 1 = \alpha_1$ (1)

$E_{\lambda_2} = vect\{\underbrace{(1,0,-2)}_{v_2}, \underbrace{(0,1,2)}_{v_3}\}$ (1) (1)

$\dim E_{\lambda_2} = 2 = \alpha_2$

4°/ A est diagonalisable puisque $\dim E_{\lambda_1} = \alpha_1 = 1$ et $\dim E_{\lambda_2} = \alpha_2 = 2$. (1)

5°/ A diag $\Rightarrow \exists$ une matrice P inversible et une matrice diagonale D tq $A = PDP^{-1}$ (1) tq

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (0,5) et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (0,5)

$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^2 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$

par récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$ $\forall n \geq 1$ (0,5)

On trouve $\det P = 1 \neq 0$

$com\,P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{com\,{}^tP}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (0,5)

D'où $A^n = \begin{pmatrix} 2-3^n & -2+2\cdot3^n & 1-3^n \\ 2-2\cdot3^n & -2+3\cdot3^n & 1-3^n \\ 2-2\cdot3^n & -2+2\cdot3^n & 1 \end{pmatrix}$ $\forall n \geq 1$. (1)

6°/ $X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow X_n = AX_{n-1}$

$\Rightarrow X_n = A^nX_0$. (0,5)

On trouve : $u_n = 3 - 3^n$ (0,5)

$v_n = 3 - 2\cdot3^n$ (0,5)

$w_n = 3 - 2\cdot3^n$ (0,5)