Solution de l'examen de remplacement

Janv 2023

Exercice 1 :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

* Méthode de Cramer :

$(S) \Leftrightarrow AX = b$

$\det A = -1 - (-1) - 1 = -1 \neq 0$ 0,5

$\Rightarrow$ la sol existe et unique.

$$x = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$x = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad \boxed{x = -6}$$ 1

$$y = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-5+1-7) = 11$$

$\boxed{y = 11}$ 1

$$z = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(2-7+1)$$

$\boxed{z = 4}$ 1

$(x, y, z) = (-6, 11, 4)$ est sol de (S)

* Méthode du Pivot de Gauss.

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ matrice augmentée 0,5

1ère étape : $a_{11} = 1 \neq 0$

$l_2 \leftarrow l_2 - l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1$

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

2ème étape : $a'_{22} = -1 \neq 0$

$l'_3 \leftarrow l'_3 - l'_2$

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$\boxed{z = 4}$ 1

$-y + 2z = -3 \Rightarrow \boxed{y = 11}$ 1

$x + y - z = 1 \Rightarrow \boxed{x = -6}$ 1

Exercice 2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (-(1-\lambda) - 1)$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 2 - \lambda$$

$P_A(\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1)$ 1

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ ou $(1-\lambda)^2 + 1 = 0$

d'où $\lambda = 2 \vee \lambda = 1+i \vee \lambda = 1-i$

$\lambda_1 = 2$ v.p simple, $\alpha_1 = 1$ 0,5

$\lambda_2 = 1+i$ vp ″ , $\alpha_2 = 1$ 0,5

$\lambda_3 = 1-i$ vp ″ , $\alpha_3 = 1$